

十二、类比法

方法简介

类比法是根据两个研究对象或两个系统在某些属性上类似而推出其他属性也类似的思维方法, 是一种由个别到个别的推理形式. 其结论必须由实验来检验, 类比对象间共有的属性越多, 则类比结论的可靠性越大.

在研究物理问题时, 经常会发现某些不同问题在一定范围内具有形式上的相似性, 其中包括数学表达式上的相似性和物理图像上的相似性. 类比法就是在于发现和探索这一相似性, 从而利用已知系统的物理规律去寻找未知系统的物理规律.

赛题精讲

例 1 图 12—1 中 AOB 是一内表面光滑的楔形槽, 固定在水平桌面 (图中纸面) 上, 夹角 $\alpha = 1^\circ$ (为了能看清楚, 图中画的是夸大的了). 现将一质点在 BOA 面内从 A 处以速度 $v = 5\text{m/s}$ 射出, 其方向与 AO 间的夹角 $\theta = 60^\circ$, $OA = 10\text{m}$. 设质点与桌面间的摩擦可忽略不计, 质点与 OB 面及 OA 面的碰撞都是弹性碰撞, 且每次碰撞时间极短, 可忽略不计, 试求:

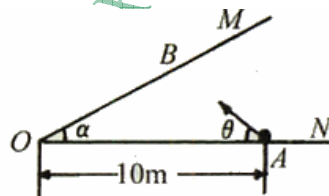


图12-1

- (1) 经过几次碰撞质点又回到 A 处与 OA 相碰? (计算次数时包括在 A 处的碰撞)
- (2) 共用多少时间?
- (3) 在这过程中, 质点离 O 点的最短距离是多少?

解析 由于此质点弹性碰撞时的运动轨迹所满足的规律和光的反射定律相同, 所以可用类比法通过几何光学的规律进行求解. 即可用光在平面镜上反射时, 物像关于镜面对称的规律和光路是可逆的规律求解.

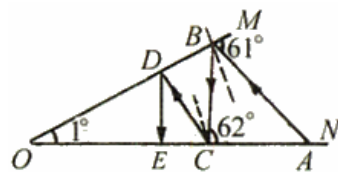


图12-1-甲

(1) 第一次, 第二次碰撞如图 12—1—甲所示, 由三角形的外角等于不相邻的一两个内角和可知 $\angle MBA = 60^\circ + 1^\circ = 61^\circ$, 故第一次碰撞的入射角为 $90^\circ - 61^\circ = 29^\circ$.

第二次碰撞, $\angle BCA = 61^\circ + 1^\circ = 62^\circ$, 故第二次碰撞的入射角为 $90^\circ - 62^\circ = 28^\circ$.

因此每碰一次, 入射角要减少 1° , 即入射角为 29° 、 28° 、 \dots 、 0° , 当入射角为 0° 时, 质点碰后沿原路返回. 包括最后在 A 处的碰撞在内, 往返总共 60 次碰撞.

(2) 如图 12—1—乙所示, 从 O 依次作出与 OB 边成 1° 、 2° 、 3° 、 \dots 的射线, 从对称规律可推知, 在 AB 的延长线上, BC' 、 $C'D'$ 、 $D'E'$ 、 \dots 分别和 BC、CD、DE、 \dots 相等, 它们和各射线的交角即为各次碰撞的入射角与直角之和. 碰撞入射角为 0° 时, 即交角为 90° 时开始返回. 故质点运动的总路程为一锐角为 60° 的 $\text{Rt}\triangle AMO$ 的较小直角边 AM 的二倍.

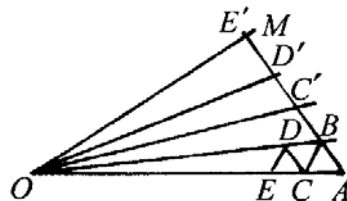


图 12—1—乙

$$\text{即 } s = 2AM = 2AO \cdot \cos 60^\circ = 10\text{m}$$

$$\text{所用总时间 } t = \frac{s}{v} = \frac{10}{5} = 2\text{s}$$

(3) 碰撞过程中离 O 的最近距离为另一直角边长 $OM = AO \cdot \sin 60^\circ = 5\sqrt{3}m$

此题也可以用递推法求解，读者可自己试解。

例 2 有一个很大的湖，岸边（可视湖岸为直线）停放着一艘小船，缆绳突然断开，小船被风刮跑，其方向与湖岸成 15° 角，速度为 2.5km/h 。同时岸上一人从停放点起追赶小船，已知他在岸上跑的速度为 4.0km/h ，在水中游的速度为 2.0km/h ，问此人能否追上小船？

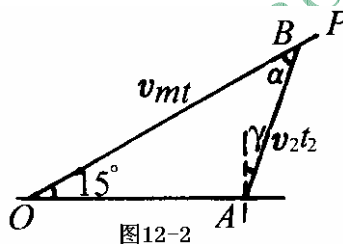
解析 费马原理指出：光总是沿着光程为极小值的路径传播。据此可以证明，光在平面分界面上的折射是以时间为极小值的路程传播。本题求最短时间问题，可类比类在平面分界面上的折射情况，这样就一个运动问题通过类比可转化为光的折射问题求解。

如图 12—2 所示，船沿 OP 方向被刮跑，设人从 O 点出发先沿湖岸跑，在 A 点入水游到 OP 的 B 点，如果符合光的折射定律，则所用时间最短。

根据折射定律：

$$\frac{\sin 90^\circ}{\sin \gamma} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{4.0}{2.0} \quad \text{解得 } \gamma = 30^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - 15^\circ - (90^\circ + \gamma) = 45^\circ$$



在这最短时间内，若船还未到达 B 点，则人能追上小船，若船已经通过了 B 点，则人不能追上小船，所以船刚好能到达 B 点所对应的船速就是小船能被追及的最大船速 v_m 。

根据正弦定理
$$\frac{v_m t}{\sin 120^\circ} = \frac{v_1 t_1}{\sin 45^\circ} = \frac{v_2 t_2}{\sin 15^\circ} \quad \text{①}$$

又 $t = t_1 + t_2$

由以上两式可解得
$$v_m = \frac{v_1 v_2 \sin 120^\circ}{v_1 \sin 15^\circ + v_2 \sin 45^\circ} = 2\sqrt{2}(\text{km/h}) \quad \text{②}$$

此即小船能被人追上的最大速度，而小船实际速度只有 2.5km/h ，小于 $2\sqrt{2}\text{km/h}$ ，所以人能追上小船。

例 3 一只蚂蚁洞沿直线爬出，已知爬出速度 v 的大小与距蚂蚁洞中心的距离 L 成反比，当蚂蚁爬到距蚂蚁洞中心距离 $L_1=1\text{m}$ 的 A 点时，速度大小为 $v_1 = 20\text{cm/s}$ ，问当蚂蚁爬到距蚂蚁洞中心 $L_2=2\text{m}$ 的 B 点时，其速度大小 $v_2 = ?$ 蚂蚁从 A 点到达 B 点所用的时间 $t = ?$

解析 虽然蚂蚁的运动我们不能直接用已学过的运动学公式求解，但只要能找到描述蚂蚁运动的公式和学过的公式的形式相同，便可借助学过的公式形式使问题得以解决。

由已知得：蚂蚁在距离巢中心 Δ 处的速度为 $v = k \frac{1}{L}$ ，代入已知得：

$$k = vL = 0.2 \times 1 = 0.2\text{m}^2/\text{s}, \text{ 所以当 } L_2 = 2\text{m} \text{ 时, 其速度 } v_2 = \frac{k}{L_2} = 0.1\text{m/s}$$

由速度的定义得蚂蚁从 L 到 $L+\Delta L$ 所需时间为 Δt

$$\text{所以 } \Delta t = \frac{\Delta L}{v} = \frac{1}{k} \cdot \Delta L \cdot L \quad (1)$$

类比初速 $v_0 = 0$ 的匀加速直线运动的两个基本公式 $\begin{cases} \Delta s = v\Delta t \\ v = at \end{cases}$

$$\text{在 } t \text{ 到 } \Delta t \text{ 时刻所经位移 } \Delta s \text{ 为 } \Delta s = a \cdot \Delta t \cdot t \quad (2)$$

比较①、②两式可以看出两式的表述形式相同。

据此，可得蚂蚁问题中的参量 t 和 L 分别类比为初速为零的匀加速直线运动中的 s 和 t 。

而 $\frac{1}{k}$ 相当于加速度 a ，于是可得：在此蚂蚁问题中 $t = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k} \cdot L^2$

$$\text{令 } t_1 \text{ 对应 } L_1, t_2 \text{ 对应 } L_2, \text{ 则所求时间为 } \begin{cases} t_1 = \frac{1}{2k} L_1^2 \\ t_2 = \frac{1}{2k} L_2^2 \end{cases}$$

代入已知可得从 A 到 B 所用的时间为

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{1}{2k} L_2^2 - \frac{1}{2k} L_1^2 = \frac{2^2}{2 \times 0.2} - \frac{1}{2 \times 0.2} = 7.5s$$

此题也可以用图像法、等效法求解，读者可试试。

例4 如图12—3所示为一很大的接地导体板，在与导体板相距为 d 的 A 处放一带电量为 $-q$ 的点电荷。

(1) 试求板上感应电荷在导体内 P 点产生的电场强度；

(2) 试求感应电荷在导体外 P' 点产生的电场强度， P 与 P' 对导体板右表面对称的；

(3) 在本题情形中根据场强分析证明导体表面附近的电场强度的方向与导体表面垂直；

(4) 试求导体上的感应电荷对点电荷 $-q$ 的作用力；

(5) 若在切断导体板与地的连线后，再将 $+Q$ 电荷置于导体板上，试说明这部分电荷在导体板上如何分布可达到静电平衡。(略去边缘效应)

解析 面电荷问题有时可用点电荷场来类比，使问题大大简化。

(1) 因导体处于静电平衡状态，内部场强为零，因此感应电荷在 P 点产生的场强可用点电荷场类比，若在 A 点放 $+q$ 在导体中

P 点产生的场和感应电荷在 P 点产生的场相同，因此有 $E_P = k \frac{q}{r^2}$ ，方向如图12—3—甲所示。(r 为 AP 间距离)

(2) 同理，感应电荷在导体外 P' 点产生的电场跟把 $+q$ 放在与 A 关于导体右表面对称的 A' 点产生的电场相同，即 $E_{P'} = \frac{kq}{r^2}$ ，方向如图12—3—甲所示。

(3) 取导体外极靠近导体表面的一点 P_1 ，此处电场由感应电荷和 $-q$ 共同产生，可类比等量异号点电荷形成的电场，导体表面

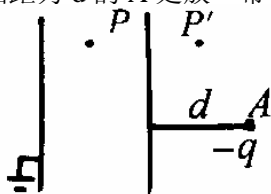


图12—3

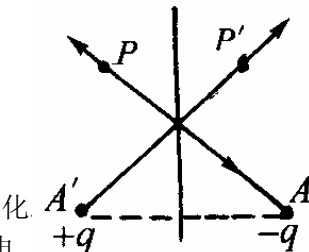


图12—3—甲

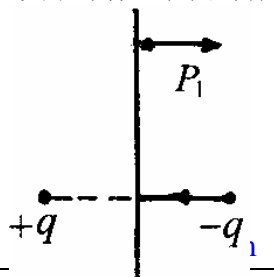


图12—3—乙

可类比为等势面，场强和等势面是垂直的，因此 P_1 点的场强方向跟导体表面垂直。如图 12—3—乙所示。

(4) 感应电荷对 $-q$ 的作用力也可类比在 A' 点放的 $+q$ 对它的库仑力求。如图 12—3—乙所示。

$$F = \frac{kq}{(2d)^2} \cdot q = \frac{kq}{4d^2} \cdot q$$

(5) 切断接地线后，感应电荷分布不变，感应电荷和 $-q$ 在导体中产生的电场强度为零（相当于不带电情况），将 $+Q$ 置于导体板上时，类比孤立无限大带电平板，电荷将均匀分布

例 5 如图 12—4 所示为一无限多电容器连成的网络，若其中每个电容器的电容均为 C ，求此网络 A、B 间的等效电容 C_{AB} 。

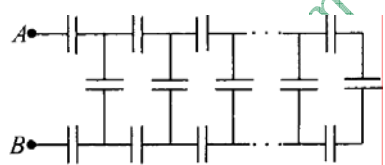


图 12—4

解析 电容器两极板间所加电压为 U ，正极板上的电量为 Q 时，电容为： $C=Q/U$ 。电阻器两端所加电压为 U ，通过的电流为 I 时，电阻为 $R=U/I$ 。

在 C 、 R 表达式中 U 相同， Q 与 I 类比，但两个式子显然有颠倒的关系，若为电容器引

入 $C^* = \frac{1}{C} = \frac{U}{Q}$

C^* 便可与 R 类比，通过对 R 的求解，求出 C^* ，再求出它的倒数即为 C 。当将阻值为 R 的电阻替换电容 C 时，可以求得：AB 间的总电阻为 $R_{AB} = (\sqrt{3} + 1)R$

现在用 C^* 取代 R ，可解得 $C_{AB}^* = (\sqrt{3} + 1)C^*$

也即 $\frac{1}{C_{AB}} = (\sqrt{3} + 1) \frac{1}{C}$

所以 AB 间的等效电容为 $C_{AB} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} C$

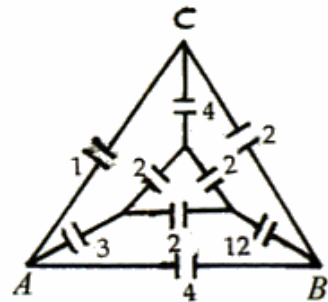


图 12—5

例 6 电容器网络如图 12—5 所示，各电容器以 μF 为单位的电容量数值已在图中标出。求 A、B 两点之间的等效电容 C_{AB} 。

解析 同样用类比法为电容器引入辅助参量 $C^* = \frac{1}{C}$ ，则 C^* 的串并联公式与电阻 R 的串并联公式完全一样，而且如图 12—5—甲中两个电容网络元之间有完全类似于电阻网络元的 Y— Δ 变换。

变换公式为： $C_a^* = \frac{C_{AB}^* C_{CA}^*}{C_{AB}^* + C_{BC}^* + C_{CA}^*}$

$$C_b^* = \frac{C_{AB}^* C_{BC}^*}{C_{AB}^* + C_{BC}^* + C_{CA}^*}$$

$$C_c^* = \frac{C_{BC}^* C_{CA}^*}{C_{AB}^* + C_{BC}^* + C_{CA}^*}$$

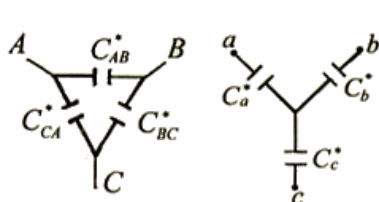


图 12-5-甲

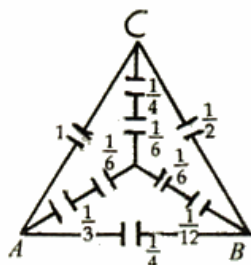


图 12-5-乙

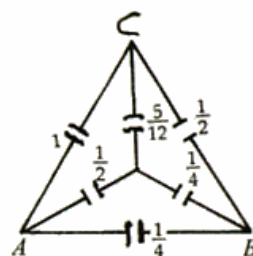


图 12-5-丙

通过变换公式对题中的网络进行交换，从而求解。

$$\text{设 } C^* = \frac{1}{C}$$

将中间同为 $C = 2\mu F$ 的电容变为 $C^* = \frac{1}{2}(\mu F)^{-1}$ ，再将三个 C^* 组成的 Δ 网络元变换为

$$C^* = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{6}(\mu F)^{-1} \text{ 的三个 Y 网络元，于是将原网络等效为如图 12-5-乙网络，}$$

图 12-5-乙中所标数值均为 C^* 值，为此网络可等效如图 12-5-丙网络，图中所标数值仍是 C^* 值。

因为此网络中没有电流图 12-5-丙可当作平衡的桥式电路，中间的 $\frac{5}{12}$ 电容可拆去，此网络又可等效为图 12-5-丁，再类比电阻串并联公式可得

$$C_{AB}^* = \frac{1}{6}(\mu F)^{-1}$$

故原网络 A、B 间的等效电容为 $C_{AB} = C_{AB}^{*-1} = 6\mu F$

例 7 如图 12-6 所示，一个由绝缘细线构成的刚性圆形轨道，其半径为 R 。此轨道水平放置，圆心在 O 点，一个金属小珠 P 穿在此轨道上，可沿轨道无摩擦地滑动，小珠 P 带电荷 Q 。已知在轨道平面内 A 点 ($OA = r < R$) 放有一电荷 q 。若在 OA 连线上某一点 A_1 放电荷 q_1 ，则给 P 一个初速度，它就沿轨道做匀速圆周运动。求 A_1 点位置及电荷 q_1 之值。

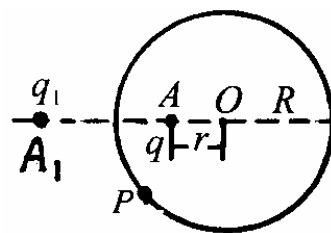


图 12-6

解析 因为 P 可沿圆轨道做匀速圆周运动，说明此圆轨道是一等势线，将此等势线看成一个球面镜的一部分。已知半径为 R ，所以此球面镜的焦距为 $\frac{R}{2}$ 。

由成像公式 $\frac{1}{P} + \frac{1}{P'} = \frac{1}{f}$

若 q 为物点, q_1 为像点不成立, 只能是 q_1 为物点成虚像于 q , 所以有

$$\frac{1}{P'} - \frac{1}{R-r} = \frac{-2}{R} \Rightarrow P' = \frac{R(R-r)}{2r-R}$$

$$\text{又} \because \frac{q}{q_1} = \frac{|P|}{|P'|} = \frac{(R-r)(R-2r)}{R(R-r)} = \frac{R-2r}{R}$$

$$\text{解得} \quad q_1 = \frac{R}{R-2r} q$$

例 8 将焦距为 10cm 的一块双凸透镜沿其表面的垂直方向切割成相同的两部分, 把这两部分沿垂直于主轴的方向移开一段距离 $\delta = 0.1\text{cm}$, 并用不透明的材料将其挡住. 若在原透镜左侧主轴上, 距透镜光心 20cm 处放一点光源 M , 如图 12-7 所示,

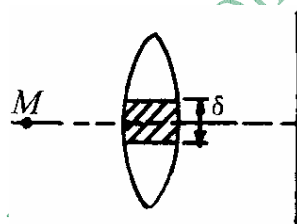


图 12-7

点光源能射出波长为 $0.5\mu\text{m}$ 的单色光, 那么在透镜另一侧距透镜

50cm 的屏幕 (垂直于透镜主轴放置) 上, 将出现多少亮条纹?

解析 由透镜成像规律可知, 单色点光源 M , 经切割成的两个半透镜分别成两个像 M_1 , M_2 (此时每个半透镜相当于一个透镜). 这两个像距相等, 关于主光轴对称, 形成相干光源, 从而在屏幕上可看到干涉条纹, 屏幕中央是零级亮条纹, 两侧依次分布着各级干涉条纹.

$$\text{根据透镜成像公式: } \frac{1}{P} + \frac{1}{P'} = \frac{1}{f} \quad \text{得} P' = \frac{Pf}{P-f} \quad \text{①}$$

设两个像之间的距离 $M_1M_2 = d$

$$\text{由图 12-7-甲中的几何关系可知} \quad \frac{d}{\delta} = \frac{P+P'}{P} \quad \text{②}$$

$$\text{由①、②两式得} \quad d = \frac{\delta}{P} \left(P + \frac{Pf}{P-f} \right) = \frac{\delta P}{P-f} \quad \text{③}$$

由图 12-7-甲知 $L = H - P'$

$$= H - \frac{Pf}{P-f} = \frac{H(P-f) - Pf}{P-f}$$

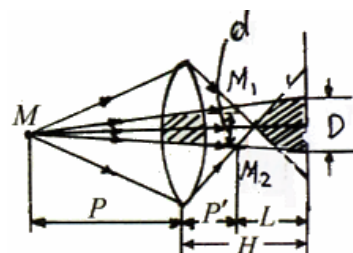


图 12-7-甲

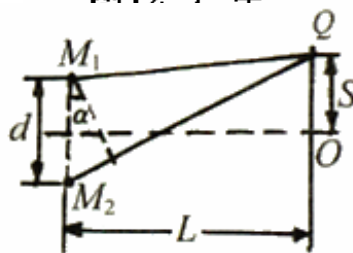


图 12-7-乙

类比光的双缝干涉作图 12-7-乙. 设屏幕上 Q 为一级亮条纹, 则光程差为 $\Delta\delta = M_2Q - M_1Q \approx d \sin \alpha = \lambda$

$$\text{⑤}$$

因为 α 解很小, 所以有 $\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \frac{S}{L}$

$$\text{将其代入⑤式得: } S = \frac{\lambda L}{d} \quad \text{⑥}$$

$$\text{将③、④代入⑥式得: } S = \frac{\lambda}{P\delta} [H(P-f) - Pf] \quad \text{⑦}$$



由于干涉条纹是等间距的，所以屏幕上出现的亮条纹数目为 $N = \frac{D}{S}$ ⑧

由图 12—7—甲中几何关系得： $\frac{\delta}{D} = \frac{P}{P+H}$

解得 $D = \frac{\delta(H+P)}{P}$ ⑨

将⑨代入⑧式得 $N = \frac{\delta(H+P)}{P} \cdot \frac{P\delta}{\lambda[H(P-f) - P \cdot f]} = \frac{\delta^2(H+P)}{\lambda[H(P-f) - Pf]}$ ⑩

将已知代入⑩得 $N=46.6$

所以亮条纹的条数为 46 条.

例 9 如图 12—8 所示，半径 $R=10\text{cm}$ 的光滑凹球面容器固定在地面上，有一小物块在与容器最低点 P 相距 5mm 的 C 点由静止无摩擦滑下，则物块自静止下滑到第二次通过 P 点时所经历的时间是多少？若此装置放在以加速度 a 向上运动的实验舱中，上述所求的时间又是多少？

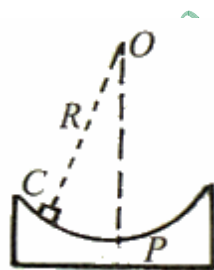


图 12—8

解析 本题中的小物块是在重力、弹力作用下做变速曲线运动，我们若抓住物体受力做 $\theta < 5^\circ$ 往复运动的本质特征，便可以进行模型等效，即把小物块在凹球面上的运动等效为单摆模型.

将上述装置等效为单摆，根据单摆的周期公式 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

得 $t = \frac{3}{4}T = \frac{3}{2}\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$

若此装置放在以加速度 a 向上运动的实验舱中，比较两种情形中物体受力运动的特征，可以等效为单摆的重力加速度为 $g' = g + a$ 的情形，经类比推理可得：

$t' = \frac{3}{4}T' = \frac{3}{2}\pi\sqrt{\frac{R}{g+a}}$

针对训练

1. 宇航员站在一星球表面上的某高处，沿水平方向抛出一个小球，经过时间 t ，小球落到星球表面，测得抛出点与落地点之间的距离为 L . 若抛出时的初速度增大到 2 倍，则抛出点与落地点之间的距离为 $\sqrt{3}L$. 已知两落地点在同一水平面上，该星球的半径为 R ，万有引力常数为 G . 求该星球的质量 M .

2. 如图 12—9 所示，有一半径为 R 的接地导体球，在距离球心 a 处放有一点电荷 Q ，由于静电感应，球的表面出现感应电荷，求点电荷 Q 和导体球之间的相互作用力.

3. 如图 12—10 所示，如果导体球不接地，且与外界绝缘，带电量为 q ，则点电荷 Q 和导体球之间的作用力大小是多少？

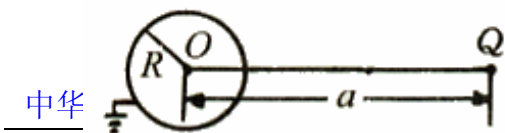


图 12—9

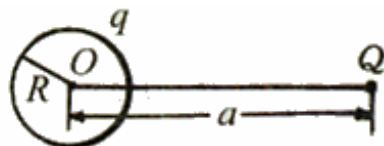


图 12—10

4. 已知, $C_1 = C_2 = C_3 = C_9 = 1\mu F, C_4 = C_5 = C_6 = C_7 = 2\mu F, C_8 = C_{10} = 3\mu F$, 试求如图 12—11 所示的电路中, A、B 间的等效电容 C_{AB} .

5. 电容器网络如图 12—12 所示, 各电容器以 μF 为单位的电容量数值已在图中标出, 试求 A、B 两点间的等效电容 C_{AB} .

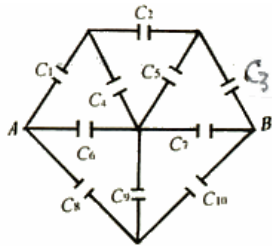


图 12-11

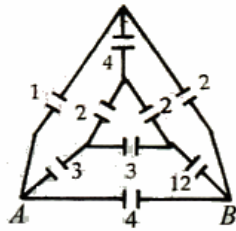


图 12-12

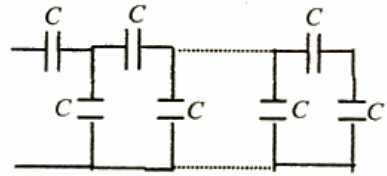


图 12-13

6. 许多电容量都为 C 的电容器组成一个多级网络, 如图 12—13 所示.

(1) 问在最后一级右边的电容器上并联一个多大的电容 C' , 可使整个网络的总电容也等于 C ?

(2) 如不加 C' , 但无限增加级数, 问整个网络的总电容是多少?

(3) 当电路中的级数足够多时, 如果在最后一级右边的电容器上并联一个任意大小的电容 C_x ,

问整个网络的总电容是多少?

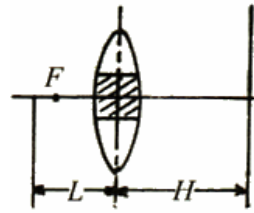


图 12-14

7. 将焦距为 f 的一块透镜沿其表面的垂直方向切割成两部分. 如图 12—14 所示, 把两块半透镜移开一小段距离, 如果在透镜的一方距离 $l > f$ 处放置一个单色点光源, 问在透镜的另一方距 H 处的屏幕上, 将出现多少条干涉条纹?



图 12-15

8. 将焦距 $f = 20\text{cm}$ 的凸薄透镜从正中切去宽度为 a 的小部分, 如图 12—15 所示, 再将剩下两半粘在一起, 构成一个“粘合透镜”, 见图 12—15 甲中 $D=2\text{cm}$. 在粘合透镜一侧的中心轴线上距镜 20cm 处, 置一波长 $\lambda = 0.5 \times 10^{-6}\text{m}$ 的单色点光源 S , 另一侧垂直于中心轴线上放置屏幕, 见图 12—15—乙. 屏幕上出现干涉条纹, 条纹间距 $\Delta x = 0.2\text{cm}$. 试问:

(1) 切去部分的宽度 a 是多少?

(2) 为获得最多的干涉条纹, 屏幕应离透镜多远?



图 12-15-甲

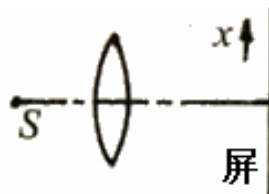


图 12-15-乙