2012年北京市中学生数学竞赛高一年级初赛试题及参考解答

2012年4月15日

试　题

一、选择题(满分36分)

1. 函数 $f(x)=\begin{cases}2+x, & x>0,\\ 5, & x=0,\\ 2^x, & x<0.\end{cases}$ 则 $f(-2)+f(0)+f(1)+f(3)$ 的值为(　　).

(A)8　(B)11　(C)$13\frac{1}{4}$　(D)$15\frac{1}{2}$

2. 一个锐角的正弦和余弦恰是二次三项式 ax^2+bx+c 的不同的根,则 a、b、c 之间的关系是(　　).

(A)$b^2=a^2-4ac$　(B)$b^2=a^2+4ac$

(C)$b^2=a^2-2ac$　(D)$b^2=a^2+2ac$

3. 定义域为 R 的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=3f(x)$,当 $x\in[0,2]$ 时,$f(x)=x^2-2x$,则 $f(x)$ 在 $x\in[-4,-2]$ 上的最小值为(　　).

(A)$-\frac{1}{9}$　(B)$-\frac{1}{3}$　(C)$\frac{1}{3}$　(D)$\frac{1}{9}$

4. 定义在正整数集 Z^+ 上的函数 f,对于每一个 $n\in Z^+$ 和无理数 $\pi=3.14159265358\cdots\cdots$ 满足

$$f(n)=\begin{cases}k^2\text{ 的末位数字},(\pi\text{ 的小数点后第 }n\text{ 位数字 }k\neq0\text{ 时});\\ 3.\quad(\pi\text{ 的小数点后第 }n\text{ 位数字 }k=0\text{ 时}).\end{cases}$$

若函数 $f(f(n))$ 的值域记为 M,则(　　).

(A)$1\notin M$　(B)$5\notin M$

(C)$6\notin M$　(D)$9\notin M$

5. 如图1,在△ABC 中,$\angle A=30°$,$\angle C=90°$,以 C 为圆心,CB 为半径作圆交 AB 边于 M,交 AC 边于 N,CM 与 BN 交于点 P.若 $AN=1$,则 $S_{\triangle CPN}-S_{\triangle BPM}$ 等于(　　).

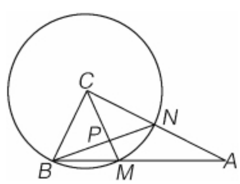

图1

(A)$\frac{1}{8}$　(B)$\frac{\sqrt{3}}{8}$　(C)$\frac{1}{4}$　(D)$\frac{\sqrt{3}}{4}$

6. 定义在$(-1,1)$上的函数 $f(x)-f(y)=f(\frac{x-y}{1-xy})$;当 $x\in(-1,0)$ 时,$f(x)>0$,若 $P=f(\frac{1}{4})+f(\frac{1}{5})$,$Q=f(\frac{1}{6})$,$R=f(0)$;则 P,Q,R 的大小关系为(　　).

(A)$R>P>Q$　(B)$R>Q>P$

(C)$P>R>Q$　(D)$Q>P>R$

二、填空题(满分64分)

1. 求 $\log_2\sin\frac{\pi}{3}+\log_2\tan\frac{\pi}{6}+\log_2\cos\frac{\pi}{4}$ 的值.

2. 已知 $f(x)$ 是四次多项式,且满足 $f(i)=\frac{1}{i}$,$i=1,2,3,4,5$,求 $f(6)$ 的值.

3. 若$[x]$表示不超过 x 的最大整数,求满足方程$[n\lg2]+[n\lg5]=2012$ 的自然数 n 的值.

4. 如图2,半径为1的两个等圆相交,在两圆的公共部分作一内接正方形 $ABCD$,如果圆心距 O_1O 等于1,试求正方形 $ABCD$ 的面积.

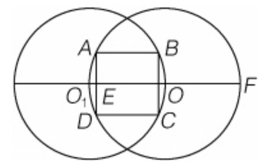

图2

5. 求 $$\frac{1^2}{1^2-1\times2012+\frac{1}{2}\times2012^2}+\frac{3^2}{3^2-3\times2012+\frac{1}{2}\times2012^2}+\frac{5^2}{5^2-5\times2012+\frac{1}{2}\times2012^2}+\frac{7^2}{7^2-7\times2012+\frac{1}{2}\times2012^2}+\cdots+\frac{2011^2}{2011^2-2011\times2012+\frac{1}{2}\times2012^2}$$ 的值.

6. 在单位正方形 $ABCD$ 中,分别以 A,B,C,D 四点为圆心,以1为半径画弧,如图3所示.交点为 M,N,L,K,求阴影部分的面积.

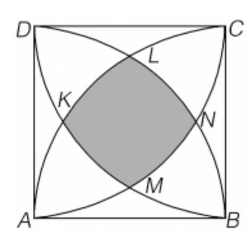

图3

7. 已知二次函数

$f(x)$满足$f(-10)=9$，$f(-6)=7$，$f(2)=-9$，求$f(100)$的值.

8. 上底$BC=2$，下底$AD=3$的梯形$ABCD$的对角线相交于点O，彼此外切于点O的两个圆分别切直线AD于点A和D，交BC分别于点K和L(如图4)，求AK^2+DL^2的值.

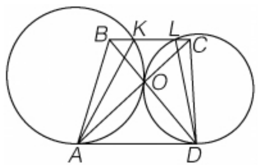

图4

参考答案

一、选择题

1. 解 $f(-2)+f(0)+f(1)+f(3)=2^{-2}+5+3+5=13\frac{1}{4}$. 答:(C).

2. 解 因为$a\neq0$，由韦达定理得$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{c}{a}$和$\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{b}{a}$，

因为$\left(\frac{b}{a}\right)^2(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=1+2\sin\alpha\cos\alpha=1+2\frac{c}{a}$，

所以$b^2=a^2+2ac$. 答:(D).

3. 解 由$f(x+2)=3f(x)$，可得

$f(x+4)=3f(x+2)=9f(x)$，

所以$x\in[-4,-2]$上的图像，是由$x\in[0,2]$时的图像向左平移4个单位，再将纵坐标缩短为原来的$\frac{1}{9}$，

所以$f(x)$在$x\in[-4,-2]$上的最小值为$x\in[0,2]$上最小值的$\frac{1}{9}$，即$\frac{1}{9}f(1)=-\frac{1}{9}$. 答:(A).

4. 解 易知$f(n)$的值域为$\{1,3,4,5,6,9\}$，$f(f(n))$的值域$M=\{1,4,5,9\}$. 答:(C).

5. 解 设$CB=x$，则$CN=x$，$AC=1+x$. 因为$\angle C=90°$，$\angle A=30°$，所以$1+x=\sqrt{3}x$，所以$x=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

所以$S_{\triangle CBN}=\frac{1}{2}\times(\frac{\sqrt{3}+1}{2})^2=\frac{\sqrt{3}+2}{4}$，

$S_{\triangle CBM}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}BC^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\frac{\sqrt{3}+1}{2})^2=\frac{3+2\sqrt{3}}{8}$，

所以$S_{\triangle CPN}-S_{\triangle BPM}=S_{\triangle CBN}-S_{\triangle BCM}=\frac{1}{8}$.

答:(A).

6. 解 由$f(x)-f(y)=f(\frac{x-y}{1-xy})$，

令$x=y$，得$f(0)=0$，

令$x=0$，得$-f(y)=f(-y)$，即$f(x)$是奇函数，又由已知，当$x\in(-1,0)$时，$f(x)>0$，设$-1<x<y<0$，可证得$-1<\frac{x-y}{1-xy}<0$，而$f(\frac{x-y}{1-xy})>0$，所以$f(x)-f(y)=f(\frac{x-y}{1-xy})>0$，于是$f(x)<f(y)$. 在$(-1,0)$上$f(x)$单调递减，又$f(x)$是奇函数，可知在$x\in(0,1)$时，$f(x)<0$也单调递减，所以在$(-1,1)$上$f(x)$单调递减.

又$f(x)=f(y)+f(\frac{x-y}{1-xy})$，

得$P=f(\frac{1}{4})+f(\frac{1}{5})=f(\frac{3}{7})$，

又因为$\frac{3}{7}>\frac{1}{6}>0$，所以$R>Q>P$. 答:(B).

二、填空题

1. 解 $\log_2\sin\frac{\pi}{3}+\log_2\tan\frac{\pi}{6}+\log_2\cos\frac{\pi}{4}=\log_2\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\log_2\frac{\sqrt{2}}{4}=\log_2 2^{-\frac{3}{2}}=-\frac{3}{2}$.

2. 解 设$g(x)=xf(x)-1$，则$g(i)=0$，$i=1,2,3,4,5$. 因为$f(x)$是四次多项式，所以$g(x)$为五次多项式，则可设$g(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$，

所以

$$f(x)=\frac{a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)+1}{x},$$

且是四次多项式，所以

$a(-1)(-2)(-3)(-4)(-5)+1=0$，得$a=\frac{1}{5!}$，

所以$f(6)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

3. 解 因为$n\lg2$和$n\lg5$是无理数，那么可以表示$n\lg2=x+y$，其中$x=[n\lg2]$，$y=\{n\lg2\}\neq0$.

而$n\lg5=n\lg\frac{10}{2}=n-n\lg2=n-x-y=n-x-1+(1-y)$.

因为$0<y<1$，

所以$0<1-y<1$，因此$[n\lg5]=n-x-1$，

由此得到

$2012=[n\lg 2]+[n\lg 5]=x+(n-x-1)=n-1$,

所以 $n=2013$.

4.解　如图2所示的字母,由相交弦定理得 $AE^2=O_1E\cdot EF$,设 $AE=\frac{x}{2}$,则 $O_1E=\frac{1-x}{2}$,

$EF=O_1F-O_1E=2-\frac{1-x}{2}=\frac{3+x}{2}$.

因此,$\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{1-x}{2}\cdot\frac{3+x}{2}$,即 $2x^2+2x-3=0$,

解得 $x=\frac{\sqrt{7}-1}{2}$(负根舍).

所以,正方形 $ABCD$ 的面积 $=x^2=\left(\frac{\sqrt{7}-1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}(4-\sqrt{7})$.

5.解　设加项的通项为 $f(n)=\frac{n^2}{n^2-2\times 1006n+2\times 1006^2}=\frac{n^2}{(n-1006)^2+1006^2}$,

$n=2k-1,k=1,2,3,\cdots,1006$.则

$f(n)+f(2012-n)=\frac{n^2+(2012-n)^2}{(n-1006)^2+1006^2}=\frac{[1006+(n-1006)]^2+[1006-(n-1006)]^2}{(n-1006)^2+1006^2}=2$.

这1006项按照 $f(n)$ 与 $f(2012-n)$ 配对,503对,每对的和为2,

所以,所求的值为 $2\times 503=1006$.

6.解　根据对称性,如图5所表示的,阴影部分的面积为 u,其余部分是4个 x 和4个 y,于是,等腰曲边形 ABL 的面积 $=u+2y+x=2\times\frac{\pi}{6}\times 1^2-\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

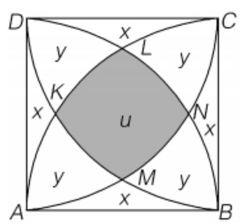

图5

同理,等腰曲边形 ADN 的面积 $=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

因此,曲边形 ANL 的面积 $=u+y=2\times\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\times 1^2=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

而枣核形 AC 的面积 $=2y+u=2\times\frac{\pi}{4}\times 1^2-1^2=\frac{\pi}{2}-1$,

所以,阴影部分 $MNLK$ 的面积 $=2\times\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=\frac{\pi}{3}+1-\sqrt{3}$.

7.解　设 $f(x)=ax^2+bx+c$,则由已知条件得关于 a、b、c 的方程组:

$$\begin{cases}9=100a-10b+c & ①\\ 7=36a-6b+c & ②\\ -9=4a+2b+c & ③\end{cases}$$

由①减③得 $3=16a-2b$　　④

由②减③得 $4=8a-2b$　　⑤

由④减⑤得 $a=-\frac{1}{8}$,

以 $a=-\frac{1}{8}$ 代入⑤,解得 $b=-\frac{5}{2}$.

再以 $a=-\frac{1}{8},b=-\frac{5}{2}$ 代入③得 $c=-\frac{7}{2}$,

所以 $f(x)=-\frac{1}{8}x^2-\frac{5}{2}x-\frac{7}{2}$,

$f(100)=-\frac{100^2}{8}-\frac{5\times 100}{2}-\frac{7}{2}=-1503.5$.

8.解　过点 O 作两圆的公切线交 AD 于 P,则 $PO=AP=DP$,这意味着 $\triangle AOD$ 是直角三角形,

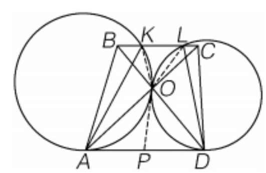

图6

显然 $\triangle AOD\backsim\triangle COB$,其相似比 $\frac{BC}{AD}=\frac{2}{3}$.

因为 $\angle ACK=\angle CAP=\angle AOP=\angle AKO$,

$\angle KAO=\angle KAO$,

所以,$\triangle ACK\backsim\triangle AKO$,

所以,$\frac{AK}{AO}=\frac{AC}{AK}$,因此

$AK^2=AO\cdot AC=AO^2\ \frac{AO+OC}{AO}=\frac{5}{3}\cdot AO^2$.

同理可得,$DL^2=\frac{5}{3}\cdot OD^2$.所以

$$\begin{aligned}AK^2+DL^2&=\frac{5}{3}\cdot AO^2+\frac{5}{3}\cdot OD^2\\&=\frac{5}{3}\cdot AD^2\\&=\frac{5}{3}\times 3^2=15.\end{aligned}$$

(北京数学会普及委员会提供)