

2022年普通高等学校招生全国统一考试（新高考I卷）

数 学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 请保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合 $M = \{x | \sqrt{x} < 4\}$ ， $N = \{x | 3x \geq 1\}$ ，则 $M \cap N =$

- A. $\{x | 0 \leq x < 2\}$ B. $\{x | \frac{1}{3} \leq x < 2\}$
C. $\{x | 3 \leq x < 16\}$ D. $\{x | \frac{1}{3} \leq x < 16\}$

【答案】D

【解析】集合 $M = \{x | 0 \leq x < 16\}$ ，集合 $N = \{x | x \geq \frac{1}{3}\}$ ， $M \cap N = \{x | \frac{1}{3} \leq x < 16\}$ 。

故选D。

2. 若 $i(1-z) = 1$ ，则 $z + \bar{z} =$

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

【答案】D

【解析】对原式两边同时乘以 i 得： $z-1=i$ ，即 $z=1+i$ ，所以 $\bar{z}=1-i$ ，即 $z+\bar{z}=2$ 。故选D。

3. 在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 AB 上， $BD = 2DA$ ，记 $\overrightarrow{CA} = m$ ， $\overrightarrow{CD} = n$ ，则 $\overrightarrow{CB} =$

- A. $3m - 2n$ B. $-2m + 3n$ C. $3m + 2n$ D. $2m + 3n$

【答案】B

【解析】因为 $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{AD}$ ，又因为 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA}$ ，所以 $\overrightarrow{CB} = -2\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{CD}$ ，即 $\overrightarrow{CB} = -2m + 3n$ ，故选B。

4. 南水北调工程缓解了北方一些地区水资源短缺问题, 其中一部分水落入某水库, 已知该水库水位为海拔148.5m时, 相应水面的面积为140km²; 水位为海拔157.5m时, 相应水面的面积为180km². 将该水库在这两个水位间的形状看作一个棱台, 则该水库水位从海拔148.5m上升到157.5m时, 增加的水量约为($\sqrt{7} \approx 2.65$)

- A. $1.0 \times 10^9 \text{ m}^3$ B. $1.2 \times 10^9 \text{ m}^3$
 C. $1.4 \times 10^9 \text{ m}^3$ D. $1.6 \times 10^9 \text{ m}^3$

【答案】C

【解析】由题意 $S_1 = 140 \text{ km}^2$, $S_2 = 180 \text{ km}^2$, $h = (157.5 - 148.5) \text{ km} = 9 \text{ km}$, 代入棱台体积 $V = \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})h$, 公式可得: $V \approx 1.4 \times 10^9 \text{ m}^3$, 故选 C.

5. 从2至8的7个整数中随机取2个不同的数, 则这2个数互质的概率为

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

【答案】D

【解析】总事件数共 $C_7^2 = \frac{7 \times 6}{2} = 21$.

第一个数取2时, 第二个数可以是3, 5, 7;

第一个数取3时, 第二个数可以是4, 5, 7, 8;

第一个数取4时, 第二个数可以是5, 7;

第一个数取5时, 第二个数可以是6, 7, 8;

第一个数取6时, 第二个数可以是7;

第一个数取7时, 第二个数可以是8;

所以 $P = \frac{3+4+2+3+1+1}{21} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$.

6. 记函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{4}) + b$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 T . 若 $\frac{2}{3}\pi < T < \pi$, 且 $y = f(x)$ 的函

数图象关于点 $(\frac{3\pi}{2}, 2)$ 中心对称, 则 $f(\frac{\pi}{2}) =$

- A. 1 B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{5}{2}$ D. 3

【答案】A

【解析】 $\omega = \frac{2\pi}{T} \in (2, 3)$, $y = f(x)$ 的函数图象关于点 $(\frac{3\pi}{2}, 2)$ 中心对称, 则有 $b = 2$, 且

$f(\frac{3\pi}{2})=2$, 所以 $\sin(\frac{3\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{4}) + 2 = 2$. 则 $\frac{3\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{4} = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$; 解得 $\omega = \frac{8k-1}{6}$, 由 $\omega \in (2, 3)$ 得 $k=2$, $\omega = \frac{5}{2}$, 故 $f(\frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{5}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}) + 2 = -1 + 2 = 1$.

7. 设 $a=0.1e^{0.1}$, $b=\frac{1}{9}$, $c=-\ln 0.9$, 则

- A. $a < b < c$ B. $c < b < a$ C. $c < a < b$ D. $a < c < b$

【答案】C

【解析】令 $a = xe^x$, $b = \frac{x}{1-x}$, $c = -\ln(1-x)$,

$$\textcircled{1} \ln a - \ln b = x + \ln x - [\ln x - \ln(1-x)],$$

$$y = x + \ln(1-x), x \in (0, 0.1]; \quad y' = 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{-x}{1-x} < 0,$$

所以 $y \leq 0$, 所以 $\ln a - \ln b \leq 0$, 所以 $b > a$

$$\textcircled{2} a - c = xe^x + \ln(1-x), x \in (0, 0.1],$$

$$y' = xe^x + e^x - \frac{1}{1-x} = \frac{(1+x)(1-x)e^x - 1}{1-x},$$

$$\text{令 } k(x) = (1+x)(1-x)e^x - 1, \text{ 所以 } k'(x) = (1-x^2 - 2x)e^x > 0,$$

所以 $k(x) > k(0) > 0$, 所以 $y' > 0$,

所以 $a - c > 0$, 所以 $a > c$.

8. 已知正四棱锥的侧棱长为 l , 其各顶点都在同一球面上. 若该球的体积为 36π , 且

$3 \leq l \leq 3\sqrt{3}$, 则该正四棱锥体积的取值范围是

- A. $[18, \frac{81}{4}]$ B. $[\frac{27}{4}, \frac{81}{4}]$ C. $[\frac{27}{4}, \frac{64}{3}]$ D. $[18, 27]$

【答案】C

【解析】记三棱锥高与侧棱夹角为 θ , 高为 h , 底面中心到各顶点的距离为 m ,

$$\cos \theta = \frac{3^2 + l^2 - 3^2}{2 \times 3 \times l} = \frac{l}{6} \in [\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}], \text{ 则 } l = 6 \cos \theta, \quad m = l \cdot \sin \theta = 6 \sin \theta \cos \theta,$$

$$h = \frac{m}{\tan \theta} = \frac{6 \sin \theta \cos \theta}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}} = 6 \cos^2 \theta, \quad S_{\text{底}} = \frac{1}{2} \times 2m \times 2m = 2m^2,$$

$$\text{故 } V = \frac{1}{3} S_{\text{底}} \cdot h = \frac{1}{3} \times 2m^2 h = 144 (\sin \theta \cos^2 \theta)^2,$$

$$\text{令 } y = \sin \theta \cos^2 \theta = \sin \theta (1 - \sin^2 \theta) = x(1 - x^2) = -x^3 + x, x = \sin \theta \in [\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$$

$$y' = -3x^2 + 1, \text{ 故 } x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), y' < 0, \quad x \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right], y' > 0,$$

$$\text{即 } V_{\max} = 144y_{\max}^2 = 144 \times \left[\frac{\sqrt{3}}{3} \times \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2\right]^2 = \frac{64}{3},$$

$$V_{\min} = 144 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^2 = \frac{27}{4}.$$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ ，则

- A. 直线 BC_1 与 DA_1 所成的角为 90°
- B. 直线 BC_1 与 CA_1 所成的角为 90°
- C. 直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角为 45°
- D. 直线 BC_1 与平面 $ABCD$ 所成的角为 45°

【答案】 ABD

【解析】 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，因为 $BC_1 \perp B_1C$ ， $BC_1 \perp A_1B_1$ ，所以 $BC_1 \perp$ 平面 A_1B_1CD ，所以 $BC_1 \perp DA_1$ ， $BC_1 \perp CA_1$ ，故选项 A、B 均正确；

设 $A_1C_1 \cap B_1D_1 = O$ ，因为 $A_1C_1 \perp$ 平面 BB_1D_1D ，所以直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角为

$\angle C_1BO$ ，在直角 $\triangle C_1BO$ 中， $\sin \angle C_1BO = \frac{C_1O}{BC_1} = \frac{1}{2}$ ，故 $\angle C_1BO = 30^\circ$ ，故选项 C 错误；

直线 BC_1 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $\angle C_1BC = 45^\circ$ ，故选项 D 正确。综上，答案选 ABD。

10. 已知函数 $f(x) = x^3 - x + 1$ ，则

- A. $f(x)$ 有两个极值点
- B. $f(x)$ 有三个零点
- C. 点 $(0, 1)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的对称中心
- D. 直线 $y = 2x$ 是曲线 $y = f(x)$ 的切线

【答案】 AC

【解析】 $f'(x) = 3x^2 - 1$ ，所以 $f(x)$ 有两个极值点 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 与 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，又 $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{9} > 0$ ，

所以 $f(x)$ 只有一个零点；由 $f(x) + f(-x) = 2$ 可知，点 $(0, 1)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的对称中心；曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线方程为 $y = 2x - 1$ ，所以答案选 AC。

11. 已知 O 为坐标原点，点 $A(1, 1)$ 在抛物线 $C: x^2 = 2py$ ($p > 0$) 上，过点 $B(0, -1)$ 的直线

交 C 于 P, Q 两点，则

- A. C 的准线为 $y = -1$
- B. 直线 AB 与 C 相切

C. $|OP| \cdot |OQ| > |OA|^2$

D. $|BP| \cdot |BQ| > |BA|^2$

【答案】BCD

【解析】由题意可知： $1=2p$ ，所以抛物线 $C: x^2=y$ ，故 C 的准线为 $y=-\frac{1}{4}$ ，故 A 不对；

由 $y'=2x$ 得曲线 C 在点 $A(1,1)$ 处的切线斜率为 2，所以切线方程为 $y=2x-1$ ，故直线 AB 与 C 相切；

过点 $B(0,-1)$ 的直线设为 $y=kx-1$ ，交 C 于 P, Q 两点的坐标分别设为 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ ，

联立直线与 C 方程可得 $\begin{cases} x^2=y \\ y=kx-1 \end{cases} \Rightarrow x^2-kx+1=0$ ，所以有 $x_1+x_2=k, x_1x_2=1$ ，

且 $\Delta=k^2-4>0$ ，即 $k^2>4$ ，进一步可得 $y_1+y_2=k^2-2, y_1y_2=1$ ，此时

$$|OP| \cdot |OQ| = \sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)} = \sqrt{(y_1+y_2^2)(y_2+y_1^2)} = \sqrt{y_1y_2(y_1y_2+y_1+y_2+1)} = \sqrt{k^2} > 4$$

又 $|OA|^2=2$ ，所以 C 正确；

$$|BP| \cdot |BQ| = \overline{BP} \cdot \overline{BQ} = (x_1+y_1+1)(x_2+y_2+1) = x_1x_2+y_1y_2+y_1+y_2+1 = k^2+1 > 5$$
，又

$|BA|^2=5$ ，故 D 正确；综上，答案选 BCD。

12. 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 \mathbf{R} ，记 $g(x) = kf(x) - kf'(x)$ ，若 $f(\frac{3}{2}-2x), g(2+x)$ 均为偶函数，则

- A. $f(0)=0$ B. $g(-\frac{1}{2})=0$ C. $f(-1)=f(4)$ D. $g(-1)=g(2)$

【答案】BC

【解析】由 $f(\frac{3}{2}-2x)$ 为偶函数可知 $f(x)$ 关于直线 $x=\frac{3}{2}$ 对称，

由 $g(2+x)$ 为偶函数可知： $g(x)$ 关于直线 $x=2$ 对称，

结合 $g(x)=f'(x)$ ，根据 $g(x)$ 关于直线 $x=2$ 对称可知 $f(x)$ 关于点 $(2, t)$ 对称，

根据 $f(x)$ 关于直线 $x=\frac{3}{2}$ 对称可知： $g(x)$ 关于点 $(\frac{3}{2}, 0)$ 对称，

综上，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均是周期为 2 的周期函数，所以有 $f(0)=f(2)=t$ ，所以 A 不正确；

$f(-1)=f(1), f(4)=f(2), f(1)=f(2)$ ，故 $f(-1)=f(4)$ ，所以 C 正确。

$g(-\frac{1}{2})=g(\frac{3}{2})=0, g(-1)=g(1)$ ，所以 B 正确；

又 $g(1)+g(2)=0$ ，所以 $g(-1)+g(2)=0$ ，所以 D 不正确。

故选 BC。

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $(1 - \frac{y}{x})(x+y)^8$ 的展开式中 x^2y^6 的系数为_____ (用数字作答).

【答案】 -28

【解析】原式等于 $(x+y)^8 - \frac{y}{x}(x+y)^8$, 由二项式定理, 其展开式中 x^2y^6 的系数为 $C_8^2 - C_8^3 = -28$.

14. 写出与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 和 $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 16$ 都相切的一条直线的方程_____.

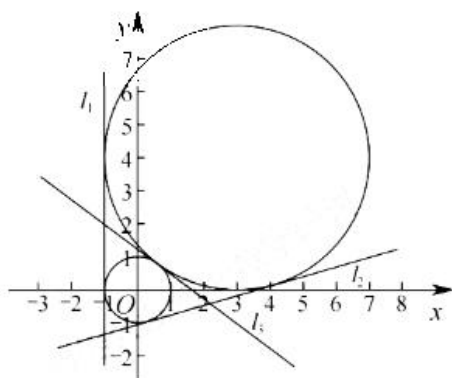
【答案】 $x = -1$, 或 $y = \frac{7}{24}x - \frac{25}{24}$, 或 $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$ (答对其中之一即可)

【解析】由图可得, 两圆外切, 且均与直线 $l_1: x = -1$ 相切. 另过两圆圆心的直线 l 的方程为 $y = \frac{4}{3}x$, 可得 l 与 l_1 交点为 $P(-1, -\frac{4}{3})$. 由切线定理得, 两圆另一公切线 l_2 过点 P , 设

$l_2: y + \frac{4}{3} = k(x+1)$, 由点到直线距离公式可得 $\frac{|k-4|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$, 解得 $k = \frac{7}{24}$, 即

$l_2: y = \frac{7}{24}x - \frac{25}{24}$. 另由于两圆外切, 因此在公切点处存在公切线 l_3 与 l 垂直, 解得

$l_3: y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$.



15. 若曲线 $y = (x+a)e^x$ 有两条过坐标原点的切线, 则 a 的取值范围是_____.

【答案】 $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$

【解析】易得曲线不过原点, 设切点为 $(x_0, (x_0+a)e^{x_0})$, 则切线斜率为

$f'(x_0) = (x_0+a+1)e^{x_0}$. 可得切线方程为 $y - (x_0+a)e^{x_0} = (x_0+a+1)e^{x_0}(x-x_0)$, 又切线过原点,

可得 $-(x_0+a)e^{x_0} = -x_0(x_0+a+1)e^{x_0}$, 化简得 $x_0^2 + ax_0 - a = 0$ (*), 又切线有两条, 即*

方程有两不等实根, 由判别式 $\Delta = a^2 + 4a > 0$, 得 $a < -4$, 或 $a > 0$.

16. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, C 的上顶点为 A , 两个焦点为 F_1, F_2 , 离心率为 $\frac{1}{2}$, 过 F_1 且垂直于 AF_2 的直线与 C 交于 D, E 两点, $|DE| = 6$, 则 $\triangle ADE$ 的周长是_____.

【答案】13

【解析】椭圆离心率为 $\frac{1}{2}$, 不妨设 $C: \frac{x^2}{4c^2} + \frac{y^2}{3c^2} = 1$, 且 $\triangle AF_1F_2$ 为正三角形, 则直线

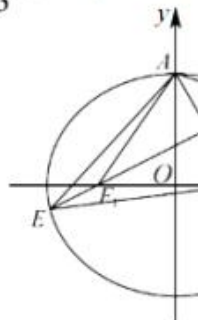
DE 斜率 $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 由等腰三角形性质可得, $|AE| = |EF_2|$, $|AD| = |DF_2|$, 由椭圆性质得

$\triangle ADE$ 的周长等价于 $|DE| + |DF_2| + |EF_2| = 4a$. 另设直线 DE 方程为 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+c)$, 与椭圆

方程联立得 $13x^2 + 8cx - 32c^2 = 0$.

由弦长公式 $|DE| = \sqrt{k^2 + 1} \cdot |x_1 - x_2| = \sqrt{k^2 + 1} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$ 得

$$|DE| = \sqrt{\frac{1}{3} + 1} \cdot \sqrt{\left(-\frac{8c}{13}\right)^2 + \frac{128c^2}{13}} = \frac{48}{13}c = 6, \text{ 即 } c = \frac{13}{8}, 4a = 8c = 13.$$



四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_1 = 1$, $\{\frac{S_n}{a_n}\}$ 是公差为 $\frac{1}{3}$ 的等差数列.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 证明: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < 2$.

【解析】(1) $S_1 = a_1 = 1$, 所以 $\frac{S_1}{a_1} = 1$,

所以 $\{\frac{S_n}{a_n}\}$ 是首项为 1, 公差为 $\frac{1}{3}$ 的等差数列,

所以 $\frac{S_n}{a_n} = 1 + (n-1) \cdot \frac{1}{3} = \frac{n+2}{3}$, 所以 $S_n = \frac{n+2}{3}a_n$.

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n+2}{3}a_n - \frac{n+1}{3}a_{n-1}$,

所以 $(n-1)a_n = (n+1)a_{n-1}$, 即 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n+1}{n-1} (n \geq 2)$;

累积法可得: $a_n = \frac{n(n+1)}{2} (n \geq 2)$, 又 $a_1 = 1$ 满足该式,

所以 $\{a_n\}$ 得通项公式为 $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

$$\begin{aligned} (2) \quad & \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 2 \left[\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right] \\ & = 2 \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ & = 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) < 2. \end{aligned}$$

18. (12分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\frac{\cos A}{1 + \sin A} = \frac{\sin 2B}{1 + \cos 2B}$.

(1) 若 $C = \frac{2\pi}{3}$, 求 B ;

(2) 求 $\frac{a^2 + b^2}{c^2}$ 的最小值.

【解析】 1. 由已知条件得: $\sin 2B + \sin A \sin 2B = \cos A + \cos A \cos 2B$

$$\sin 2B = \cos A + \cos A \cos 2B - \sin A \sin 2B = \cos A + \cos(A + 2B)$$

$$= \cos[\pi - (B + C)] + \cos[\pi - (B + C) + 2B]$$

$$= -\cos(B + C) + \cos[\pi + (B - C)]$$

$$= -2\cos B \cos C$$

所以 $2\sin B \cos B = -2\cos B \cos C$, 即 $(\sin B + \cos C)\cos B = 0$.

由已知条件: $1 + \cos 2B \neq 0$, 则 $B \neq \frac{\pi}{2}$, 可得 $\cos B \neq 0$,

所以 $\sin B = -\cos C = \frac{1}{2}$, $B = \frac{\pi}{6}$.

(2) 由 (1) 知 $\sin B = -\cos C > 0$, 则 $B = C - \frac{\pi}{2}$, $\sin B = \sin(C - \frac{\pi}{2}) = -\cos C$,

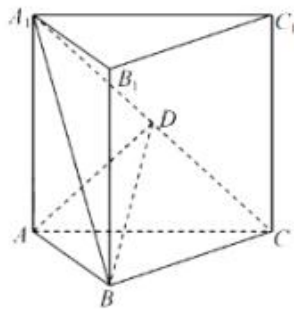
$$\sin A = \sin(B + C) = \sin(2C - \frac{\pi}{2}) = -\cos 2C,$$

$$\begin{aligned} \text{由正弦定理} \quad \frac{a^2 + b^2}{c^2} &= \frac{\sin^2 A + \sin^2 B}{\sin^2 C} = \frac{\cos^2 2C + \cos^2 C}{\sin^2 C} \\ &= \frac{(1 - 2\sin^2 C)^2 + (1 - \sin^2 C)}{\sin^2 C} \\ &= \frac{2 + 4\sin^4 C - 5\sin^2 C}{\sin^2 C} = \frac{2}{\sin^2 C} + 4\sin^2 C - 5 \\ &\geq 2\sqrt{\frac{2}{\sin^2 C} \cdot 4\sin^2 C} - 5 = 4\sqrt{2} - 5, \end{aligned}$$

当且仅当 $\sin^2 C = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立, 所以 $\frac{a^2 + b^2}{c^2}$ 的最小值为 $4\sqrt{2} - 5$.

19. (12分)

如图,直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 4, $\triangle A_1BC$ 的面积为 $2\sqrt{2}$.



(1) 求 A 到平面 A_1BC 的距离;

(2) 设 D 为 A_1C_1 的中点, $AA_1 = AB$, 平面 $A_1BC \perp$ 平面 ABB_1A_1 , 求二面角 $A-BD-C$ 的正弦值.

【解析】 (1) 设 A 到平面 A_1BC 的距离为 h ,

$$V_{A_1-ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot A_1A = \frac{1}{3} V_{A-ABC} = \frac{1}{3} \times 4 = \frac{4}{3},$$

$$V_{A-ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle A_1BC} \cdot h = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{2} \cdot h,$$

所以 $\frac{1}{3} \times 2\sqrt{2} \cdot h = \frac{4}{3}$, 所以 $h = \sqrt{2}$, 所以 A 到平面 A_1BC 的距离为 $\sqrt{2}$.

(3) 取 A_1B_1 的中点 E , 连接 AE ,

因为 $AA_1 = AB$, 所以 $AE \perp A_1B_1$,

因为平面 $A_1BC \perp$ 平面 ABB_1A_1 , 平面 $A_1BC \cap$ 平面 $ABB_1A_1 = A_1B_1$,

所以 $AE \perp$ 平面 A_1BC , $AE = \sqrt{2}$, 则 $A_1A = AB = 2$, 所以 $AE \perp BC$,

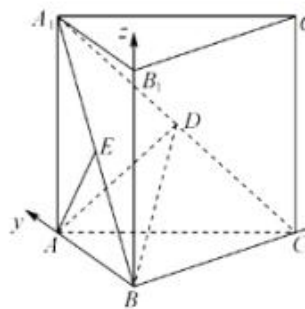
因为直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$, 所以 $A_1A \perp BC$,

因为 $AE \cap A_1A = A$, 所以 $BC \perp$ 平面 ABB_1A_1 , 所以 $BC \perp AB$,

由 $V_{ABC-A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot A_1A = \frac{1}{2} \times 2 \times BC \times 2 = 4$, 所以 $BC = 2$,

以 BC 为 x 轴, BA 为 y 轴, BB_1 为 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,

所以 $B(0,0,0)$, $A(0,2,0)$, $C(2,0,0)$, $A_1(0,2,2)$, $E(0,1,1)$, $D(1,1,1)$



平面 BDC 的法向量设为 $\vec{n}_1 = \vec{AE} = (0, -1, 1)$, 平面 BDA 的法向量设为 $\vec{n}_2 = (x, y, z)$,

$$\vec{BA} = (0, 2, 0), \vec{BD} = (1, 1, 1),$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{BA} \cdot \vec{n}_2 = 0 \\ \overrightarrow{BD} \cdot \vec{n}_2 = 0 \end{cases}, \text{ 所以 } \begin{cases} 2y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}, \text{ 所以 } y = 0,$$

设 $x = 1$, 则 $z = -1$, 所以 $\vec{n}_2 = (1, 0, -1)$, 所以 $\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = -\frac{1}{2}$,

设二面角 $A-BD-C$ 的平面角为 α , 则 $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以二面角 $A-BD-C$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

20. (12分)

一医疗团队为研究某地的一种地方性疾病与当地居民的卫生习惯(卫生习惯分为良好和不够良好两类)的关系, 在已患该疾病的病例中随机调查了100例(称为病例组), 同时在未患该疾病的人群中随机调查了100人(称为对照组), 得到如下数据:

	不够良好	良好
病例组	40	60
对照组	10	90

(1) 能否有99%的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异?

(2) 从该地的人群中任选一人, A 表示事件“选到的人卫生习惯不够良好”, B 表示事件“选到的人患有该疾病”,

$\frac{P(B|A)}{P(\bar{B}|A)}$ 与 $\frac{P(B|\bar{A})}{P(\bar{B}|\bar{A})}$ 的比值是卫生习惯不够良好对患该疾病风险

程度的一项度量指标, 记该指标为 R .

(i) 证明: $R = \frac{P(A|B)}{P(A|\bar{B})} \cdot \frac{P(\bar{A}|B)}{P(\bar{A}|\bar{B})}$;

(ii) 利用该调查数据, 给出 $P(A|B)$, $P(A|\bar{B})$ 的估计值, 并利用(i)的结果给出 R 的估计值.

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \quad \begin{array}{c|c|c|c} P(K^2 \geq k) & 0.050 & 0.010 & 0.001 \\ \hline k & 3.841 & 6.635 & 10.828 \end{array}$$

【解析】(1) 假设患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯没有差异,

$$\text{则 } K^2 = \frac{200(40 \times 90 - 60 \times 10)^2}{50 \times 150 \times 100 \times 100} = 24 > 10.828,$$

所以有99%的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异;

$$(2) (i) R = \frac{P(B|A) \cdot \frac{P(\bar{B}|\bar{A})}{P(\bar{B}|\bar{A})}}{\frac{P(B|A)}{P(B|A)} \cdot \frac{P(\bar{B}|\bar{A})}{P(\bar{B}|\bar{A})}} = \frac{P(AB) \cdot \frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{A}\bar{B})}}{\frac{P(AB)}{P(A)} \cdot \frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{A}\bar{B})}} = \frac{P(AB)}{P(A)} \cdot \frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{A}\bar{B})}$$

$$= \frac{P(AB)}{P(AB)} \cdot \frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{A}\bar{B})} = \frac{P(B)}{P(B)} \cdot \frac{P(\bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A|B)}{P(A|B)} \cdot \frac{P(\bar{A}|\bar{B})}{P(\bar{A}|\bar{B})}, \text{ 得证:}$$

$$(ii) \text{ 由调查数据可知 } P(A|B) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}, \quad P(A|\bar{B}) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10},$$

$$\text{则 } P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B) = \frac{3}{5}, \quad P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{9}{10}. \text{ 所以 } R = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{9}{10}}{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{10}} = 6.$$

21. (12分)

已知点 $A(2,1)$ 在双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2-1} = 1 (a > 1)$ 上, 直线 l 交 C 于 P, Q 两点, 直线

AP, AQ 的斜率之和为 0.

(1) 求 l 的斜率;

(2) 若 $\tan \angle PAQ = 2\sqrt{2}$, 求 $\triangle PAQ$ 的面积.

【答案】 (1) l 的斜率为 0; (2) $\triangle PAQ$ 的面积为 $\frac{16\sqrt{2}}{9}$

【解析】 (1) 将点 A 代入双曲线方程得 $\frac{4}{a^2} - \frac{1}{a^2-1} = 1$, 化简得 $a^4 - 4a^2 + 4 = 0$ 得:

$$a^2 = 2, \text{ 故双曲线方程为 } \frac{x^2}{2} - y^2 = 1;$$

由题显然直线 l 的斜率存在, 设 $l: y = kx + m$, 设 $P(x_1, y_1) Q(x_2, y_2)$, 则联立直线与

$$\text{双曲线得: } (2k^2 - 1)x^2 + 4kmx + 2m^2 + 2 = 0,$$

$$\text{故 } x_1 + x_2 = -\frac{4km}{2k^2 - 1}, \quad x_1 x_2 = \frac{2m^2 + 2}{2k^2 - 1},$$

$$k_{AP} + k_{AQ} = \frac{y_1 - 1}{x_1 - 2} + \frac{y_2 - 1}{x_2 - 2} = \frac{kx_1 + m - 1}{x_1 - 2} + \frac{kx_2 + m - 1}{x_2 - 2} = 0,$$

化简得: $2kx_1x_2 + (m-1-2k)(x_1+x_2) - 4(m-1) = 0$,

$$\text{故 } \frac{2k(2m^2+2)}{2k^2-1} + (m-1-2k)\left(-\frac{4km}{2k^2-1}\right) - 4(m-1) = 0,$$

即 $(k+1)(m+2k-1) = 0$, 而直线 l 不过 A 点, 故 $k = -1$.

(2) 设直线 AP 的倾斜角为 α , 由 $\tan \angle PAQ = 2\sqrt{2}$, 得 $\tan \frac{\angle PAQ}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

由 $2\alpha + \angle PAQ = \pi$, 得 $k_{AP} = \tan \alpha = \sqrt{2}$, 即 $\frac{y_1-1}{x_1-2} = \sqrt{2}$,

$$\text{联立 } \frac{y_1-1}{x_1-2} = \sqrt{2}, \text{ 及 } \frac{x_1^2}{2} - y_1^2 = 1 \text{ 得 } x_1 = \frac{10-4\sqrt{2}}{3}, y_1 = \frac{4\sqrt{2}-5}{3},$$

代入直线 l 得 $m = \frac{5}{3}$, 故 $x_1+x_2 = \frac{20}{3}$, $x_1x_2 = \frac{68}{9}$

而 $|AP| = \sqrt{3}|x_1-2|$, $|AQ| = \sqrt{3}|x_2-2|$,

由 $\tan \angle PAQ = 2\sqrt{2}$, 得 $\sin \angle PAQ = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,

$$\text{故 } S_{\triangle PAQ} = \frac{1}{2}|AP||AQ|\sin \angle PAQ = \sqrt{2}|x_1x_2 - 2(x_1+x_2) + 4| = \frac{16\sqrt{2}}{9}.$$

22. (12分)

已知函数 $f(x) = e^x - ax$ 和 $g(x) = ax - \ln x$ 有相同的最小值

(1) 求 a ;

(2) 证明: 存在直线 $y = b$, 其与两条曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 共有三个不同的交点,

并且从左到右的三个交点的横坐标成等差数列.

【解析】(1) $f'(x) = e^x - a$, $g'(x) = a - \frac{1}{x}$

① $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$ 恒成立, 所以 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 即 $f(x)$ 没有最小值.

该类情况应舍去.

② $a > 0$ 时, $f'(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上小于 0, 在 $(\ln a, +\infty)$ 上大于 0,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减, 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(x)$ 在 $x = \ln a$ 处有最小值为 $f(\ln a) = a - a \ln a$,

所以 $g'(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上小于 0, 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上大于 0,

所以 $g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $g(x)$ 在 $x = \frac{1}{a}$ 处有最小值为 $g(\frac{1}{a}) = 1 + \ln a$,

因为 $f(x) = e^{-ax}$ 和 $g(x) = ax - \ln x$ 有相同的最小值

所以有 $f(\ln a) = a - a \ln a = g(\frac{1}{a}) = 1 + \ln a$, 即 $a - a \ln a = 1 + \ln a$

因为 $a > 0$, 所以上式等价于 $\ln a - \frac{a-1}{a+1} = 0$,

令 $h(x) = \ln x - \frac{x-1}{x+1} (x > 0)$,

则 $h'(x) = \frac{x^2+1}{x(x+1)^2} > 0$ 恒成立, 所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增

又因为 $h(1) = 0 = h(a)$ 且 $a > 0$, 所以 $a = 1$

(2) 证明: 由 (1) $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = x - \ln x$,

且 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 且 $f(x)_{\min} = g(x)_{\min} = 1$.

① $b < 1$ 时, 此时 $f(x)_{\min} = g(x)_{\min} = 1 > b$, 显然 $y = b$ 与两条曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$

共有 0 个交点, 不符合题意;

② $b = 1$ 时, 此时 $f(x)_{\min} = g(x)_{\min} = 1 = b$, $y = b$ 与两条曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 共有

2 个交点, 交点的横坐标分别为 0 和 1;

③ $b > 1$ 时, 首先, 证明 $y = b$ 与曲线 $y = f(x)$ 有 2 个交点:

即证明 $F(x) = f(x) - b$ 有 2 个零点, $F'(x) = f'(x) = e^x - 1$,

所以 $F(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

又因为 $F(-b) = e^{-b} > 0$, $F(0) = 1 - b < 0$, $F(b) = e^b - 2b > 0$,

(令 $t(b) = e^b - 2b$, 则 $t'(b) = e^b - 2 > 0$, $t(b) > t(1) = e - 2 > 0$)

所以明 $F(x) = f(x) - b$ 在 $(-\infty, 0)$ 上存在且只存在 1 个零点, 设为 x_1 , 在 $(0, +\infty)$ 上存在

且只存在 1 个零点, 设为 x_2 .

其次, 证明 $y = b$ 与曲线和 有 2 个交点:

即证明 $G(x) = g(x) - b$ 有 2 个零点, $G'(x) = g'(x) = 1 - \frac{1}{x}$,

所以 $G(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

又因为 $G(e^{-b}) = e^{-b} > 0$, $G(0) = 1 - b < 0$, $G(2b) = b - \ln 2b > 0$,

(令 $\mu(b) = b - \ln 2b$, 则 $\mu'(b) = 1 - \frac{1}{b} > 0$, $\mu(b) > \mu(1) = 1 - \ln 2 > 0$)

所以 $F(x) = f(x) - b$ 在 $(0, 1)$ 上存在且只存在 1 个零点, 设为 x_3 , 在 $(1, +\infty)$ 上存在且只

存在 1 个零点, 设为 x_4 .

再次, 证明存在 b 使得 $x_2 = x_3$:

因为 $F(x_2) = G(x_3) = 0$, 所以 $b = e^{x_2} - x_2 = x_3 - \ln x_3$,

若 $x_2 = x_3$, 则 $e^{x_2} - x_2 = x_2 - \ln x_2$, 即 $e^{x_2} - 2x_2 + \ln x_2 = 0$,

所以只需证明 $e^x - 2x + \ln x = 0$ 在 $(0, 1)$ 上有解即可,

即 $\varphi(x) = e^x - 2x + \ln x$ 在 $(0, 1)$ 上有零点,

因为 $\varphi\left(\frac{1}{e^3}\right) = e^{\frac{1}{e^3}} - \frac{2}{e^3} - 3 < 0$, $\varphi(1) = e - 2 > 0$,

所以 $\varphi(x) = e^x - 2x + \ln x$ 在 $(0, 1)$ 上存在零点, 取一零点为 x_0 , 令 $x_2 = x_3 = x_0$ 即可,

此时取 $b = e^{x_0} - x_0$

则此时存在直线 $y = b$ ，其与两条曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 共有三个不同的交点

最后证明 $x_1 + x_4 = 2x_0$ ，即从左到右的三个交点的横坐标成等差数列：

因为 $F(x_1) = F(x_2) = F(x_0) = 0 = G(x_3) = G(x_0) = G(x_4)$ ，

所以 $F(x_1) = G(x_0) = F(\ln x_0)$ ，

又因为 $F(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减， $x_1 < 0$ ， $0 < x_0 < 1$ 即 $\ln x_0 < 0$ ，所以 $x_1 = \ln x_0$

同理，因为 $F(x_0) = G(e^{x_0}) = G(x_4)$ ，

又因为 $G(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增， $x_0 > 0$ 即 $e^{x_0} > 1$ ， $x_4 > 1$ ，所以 $x_4 = e^{x_0}$ ，

又因为 $e^{x_0} - 2x_0 + \ln x_0 = 0$ ，所以 $x_1 + x_4 = e^{x_0} + \ln x_0 = 2x_0$ ，

即直线 $y = b$ ，与两条曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 从左到右的三个交点的横坐标成等差数列。