全国高中数学联赛模拟试题（五）

第一试

一、选择题：（每小题 6 分，共 36 分）

1、空间中 n（$n\geqslant3$）个平面，其中任意三个平面无公垂面．那么，下面四个结论

（1）没有任何两个平面互相平行；

（2）没有任何三个平面相交于一条直线；

（3）平面间的任意两条交线都不平行；

（4）平面间的每一条交线均与 $n-2$ 个平面相交．

其中，正确的个数为

（A）1（B）2（C）3 （D）4

2、若函数 $y=f(x)$在$[a,b]$上的一段图像可以近似地看作直线段，则当 $c\in(a,b)$时，$f(c)$的近似值可表示为

（A）$\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$ （B）$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$

（C）$\dfrac{(b-c)f(a)+(c-a)f(b)}{(b-a)}$ （D）$f(a)-\dfrac{c-a}{b-a}\left[f(b)-f(a)\right]$

3、设 $a>b>c$，$a+b+c=1$，且 $a^2+b^2+c^2=1$，则

（A）$a+b>1$（B）$a+b=1$（C）$a+b<1$（D）不能确定，与 a、b 的具体取值有关

4、设椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$的离心率$e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，已知点$P\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$到椭圆上的点的最远距离是$\dfrac{7}{4}$，则短半轴之长 $b=$

（A）$\dfrac{1}{16}$（B）$\dfrac{1}{8}$（C）$\dfrac{1}{4}$（D）$\dfrac{1}{2}$

5、$S=\{1,2,\cdots,2003\}$，A 是 S 的三元子集，满足：A 中的所有元素可以组成等差数列．那么，这样的三元子集 A 的个数是

（A）C_{2003}^{3}（B）$\mathrm{C}_{1001}^{2}+\mathrm{C}_{1002}^{2}$（C）$\mathrm{A}_{1001}^{2}+\mathrm{A}_{1002}^{2}$（D）$\mathrm{A}_{2003}^{3}$

6、长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，AC_1 为体对角线．现以 A 为球心，AB、AD、AA_1、AC_1 为半径作四个同心球，其体积依次为 V_1、V_2、V_3、V_4，则有

（A）$V_4<V_1+V_2+V_3$ （B）$V_4=V_1+V_2+V_3$

（C）$V_4>V_1+V_2+V_3$ （D）不能确定，与长方体的棱长有关

二、填空题：（每小题 9 分，共 54 分）

1、已知$\dfrac{\sin^3\alpha}{\sin\beta}=\dfrac{\cos^3\alpha}{\cos\beta}=k$，则 k 的取值范围为_____.

2、等差数列$\{a_n\}$的首项 $a_1=8$，且存在惟一的 k 使得点(k,a_k)在圆 $x^2+y^2=10^2$ 上，则这样的等差数列共有_____个.

3、在四面体 $P\text{–}ABC$ 中，$PA=PB=a$，$PC=AB=BC=CA=b$，且 $a<b$，则 $\dfrac{a}{b}$ 的取值范围为_____.

4、动点 A 对应的复数为 $z=4(\cos\theta+i\sin\theta)$，定点 B 对应的复数为 2，点 C 为线段 AB 的中点，过点 C 作 AB 的垂线交 OA 与 D，则 D 所在的轨迹方程为_____.

5、$\sum\limits_{k=1}^{2003}3^k$ 被 8 所除得的余数为_____.

6、圆周上有 100 个等分点，以这些点为顶点组成的钝角三角形的个数为_____.

三、（20 分）

已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$的一条长为 l 的弦 AB．求 AB 中点 M 到 y 轴的最短距离，并求出此时点 M 的坐标．

四、（20 分）

单位正方体 $ABCD\text{–}A_1B_1C_1D_1$ 中，正方形 $ABCD$ 的中心为点 M，正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心为点 N，连 AN、B_1M．

（1）求证：AN、B_1M 为异面直线；

（2）求出 AN 与 B_1M 的夹角．

五、（20 分）

对正实数 a、b、c．求证：

$$\frac{\sqrt{a^2+8bc}}{a}+\frac{\sqrt{b^2+8ac}}{b}+\frac{\sqrt{c^2+8ab}}{c}\geqslant 9.$$

第二试

一、（50 分）

设 $ABCD$ 是面积为 2 的长方形，P 为边 CD 上的一点，Q 为$\triangle PAB$ 的内切圆与边 AB 的切点.乘积 $PA\cdot PB$ 的值随着长方形 $ABCD$ 及点 P 的变化而变化，当 $PA\cdot PB$ 取最小值时，

（1）证明：$AB\geqslant 2BC$;

（2）求 $AQ\cdot BQ$ 的值.

二、（50 分）

给定由正整数组成的数列

$$\begin{cases} a_1=1, a_2=2 \\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \end{cases}\quad (n\geqslant 1).$$

（1）求证：数列相邻项组成的无穷个整点(a_1,a_2)，(a_3,a_4)，⋯，(a_{2k-1},a_{2k})，⋯均在曲线 $x^2+xy-y^2+1=0$ 上.

（2）若设 $f(x)=x^n+x^{n-1}-a_nx-a_{n-1}$，$g(x)=x^2-x-1$，证明：$g(x)$整除 $f(x)$.

三、（50 分）

我们称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为集合 A 的一个 n 分划，如果

（1） $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=A$；

（2） $A_i\cap A_j\neq\varnothing$，$1\leqslant i<j\leqslant n$.

求最小正整数 m，使得对 $A=\{1,2,\cdots,m\}$的任意一个 13 分划 $A_1,A_2,\cdots,A_{13}$，一定存在某个集合 $A_i(1\leqslant i\leqslant 13)$，在 A_i 中有两个元素 a、b 满足 $b<a\leqslant \dfrac{9}{8}b$.

参考答案

第一试

一、选择题：

1、D；2、C；3、A；4、C；5、B；6、C

二、填空题：

1、$\left(-1,-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},1\right)$ ；2、17；3、$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}},1\right)$；4、$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；5、4；6、117600．

三、$\begin{cases}\frac{l^2}{8p},0<l<2p,M\left(\frac{l^2}{8p},0\right)\\ \frac{l-p}{2},l\geq 2p,M\left(\frac{l-p}{2},\sqrt{\frac{pl}{2}-p^2}\right)\end{cases}$

四、（1）证略；（2）$\arccos\frac{2}{3}$.

五、证略.

第二试

一、（1）证略（提示：用面积法，得 $PA\cdot PB$ 最小值为 2，此时∠APB＝90°）；

（2）$AQ\cdot BQ$=1．

二、证略（提示：用数学归纳法）.

三、m=117．