

第二届全国大学生数学竞赛预赛试题

(非数学类, 2010)

考试形式 闭卷

考试时间 150 分钟

满分 100 分

一、(本题共 5 小题, 各小题 5 分, 共 25 分) 计算下列各题 (要求写出重要步骤) .

(1) 设 $x_n = (1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$, 其中 $|a| < 1$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

(2) 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}$.

(3) 设 $s > 0$, 求 $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-sx} x^n dx$ ($n=1, 2, \dots$) .

(4) 设函数 $f(t)$ 有二阶连续导数, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $g(x, y) = f\left(\frac{1}{r}\right)$, 求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

(5) 求直线 $l_1: \begin{cases} x-y=0 \\ z=0 \end{cases}$ 与直线 $l_2: \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{-1}$ 的距离.

二、(本题 15 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上具有二阶导数, 并且

$$f''(x) > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \beta < 0,$$

且存在一点 x_0 , 使得 $f(x_0) < 0$. 证明 $f(x) = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 恰有两实根.

三、(本题 15 分) 设函数 $y = f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 2t + t^2 \\ y = \psi(t) \end{cases}$ ($t > -1$) 所确定, 且

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{3}{4(1+t)},$$

其中 $\psi(t)$ 具有二阶导数, 曲线 $y = \psi(t)$ 与 $y = \int_1^{t^2} e^{-u^2} du + \frac{3}{2e}$ 在 $t=1$ 处

相切, 求函数 $\psi(t)$.

四、(本题 15 分) 设 $a_n > 0$, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, 证明:

(1) 当 $\alpha > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 收敛;

(2) 当 $\alpha \leq 1$, 且 $S_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) 时, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 发散.

五、(本题 15 分) 设 l 是过原点、方向为 (α, β, γ) (其中 $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$) 的直线,

均匀椭球 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (其中 $0 < c < b < a$, 密度为 1) 绕 l 旋转.

(1) 求其转动惯量;

(2) 求其转动惯量关于方向 (α, β, γ) 的最大值和最小值.

六、(本题 15 分) 设函数 $\varphi(x)$ 具有连续的导数, 在围绕原点的任意光滑的简单闭曲线 C

上, 曲线积分 $\oint_C \frac{2x y dx + \varphi(x) dy}{x^4 + y^2}$ 的值为常数.

(1) 设 L 为正向闭曲线 $(x-2)^2 + y^2 = 1$, 证明 $\oint_C \frac{2x y dx + \varphi(x) dy}{x^4 + y^2} = 0$;

(2) 求函数 $\varphi(x)$;

(3) 设 C 是围绕原点的光滑简单正向闭曲线, 求 $\oint_C \frac{2x y dx + \varphi(x) dy}{x^4 + y^2}$.