第三届全国大学生数学竞赛预赛试题

（非数学类，2011）

考试形式：闭卷　　　　考试时间：150 分钟　　　　满分：100 分

一、（本大题共 4 小题，每小题 6 分，共 24 分）计算下列各题（要求写出重要步骤）

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2(1-\ln(1+x))}{x}$

(2) 设 $a_n=\cos\dfrac{\theta}{2}\cdot\cos\dfrac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\dfrac{\theta}{2^n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

(3) 求 $\iint\limits_D \operatorname{sgn}(xy-1)dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 2, 0\le y\le 2\}$

(4) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 的和函数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^{2n-1}}$ 的和

二、（本题共16分）设 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为数列，a,λ 为有限数，求证：

(1) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a.$

(2) 如果存在正整数 p，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{\lambda}{p}$

三、（本题共15分）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有连续的三阶导数，且 $f(-1)=0, f(1)=1, f'(0)=0$.求证：在开区间（-1，1）内至少存在一点 x_0，使得 $f'''(x_0)=3.$

四、（本题共15分）在平面上，有一条从点$(a,0)$向右的射线，其线密度为ρ.在点（0，h）处（其中h>0）有一质量为m的质点.求射线对该质点的引力.

五、（本题共15分）设z=$z(x,y)$是由方程$F(z+\frac{1}{x},z-\frac{1}{y})=0$确定的隐函数，且具有连续的二阶偏导数.求证：$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=0$和$x^3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy(x+y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

六、（本题共15分）设函数$f(x)$连续，a,b,c为常数，Σ是单位球面$x^2+y^2+z^2=1$.记第一型曲面积分I=$\iint\limits_{\Sigma} f(ax+by+cz)dS$.求证：$I=2\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2})du$