2011年北京市中学生数学竞赛高一年级决赛试题及参考解答

试　题

一、选择题(满分40分,每小题8分)

1. 二次三项式 x^2+ax+b 的根是实数,其中 a、b 是自然数,且 $ab=2^{2011}$,则这样的二次三项式共有______个.

2. 如图1,在半径为1的圆 O 中内接有锐角三角形 ABC, H 是 $\triangle ABC$ 的垂心,角平分线 AL 垂直于 OH,则 $BC=$ ________.

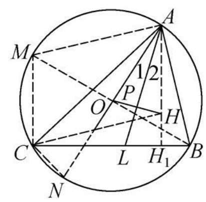

图1

3. 已知定义在 R 上的函数 $f(x)=x^2$ 和 $g(x)=2x+2m$,若 $F(x)=f(g(x))-g(f(x))$ 的最小值为 $\frac{1}{4}$,则 $m=$ ________.

4. $\tan 37.5°=$ ________.

5. 设 $f(x)=\frac{1+x}{1-3x}$,定义 $f_1(x)=f(f(x))$, $f_n(x)=f(f_{n-1}(x))$ $(n=2,3,\cdots)$, $f_{2011}(2011)=$ ________.

二、(满分15分) D 是正 $\triangle ABC$ 的边 BC 上一点,设 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 的内心分别为 I_1, I_2,外心分别为 O_1, O_2,求证: $(I_1O_1)^2+(I_2O_2)^2=(I_1I_2)^2$.

三、(满分15分) n 是正整数,记 $n!=1\times2\times3\times\cdots\times n$,如 $1!=1$, $2!=1\times2=2$, $3!=1\times2\times3=6$,又记 $[a]$ 表示不超过 a 的最大整数,求方程 $\left[\frac{x}{1!}\right]+\left[\frac{x}{2!}\right]+\left[\frac{x}{3!}\right]+\cdots+\left[\frac{x}{10!}\right]+\left[\frac{x}{11!}\right]=2011$ 的所有正整数解.

四、(满分15分)平面上的 n 个点,若其中任3个点中必有2个点的距离不大于1,则称这样的 n 个点为"标准 n 点组".要使一个半径为1的圆纸片,对任意"标准 n 点组"都能至少盖住其中的25个点,试求 n 的最小值.

五、(满分15分)已知函数 $f:R\rightarrow R$,使得对任意实数 x,y,z 都有 $\frac{1}{2}f(xy)+\frac{1}{2}f(xz)-f(x)f(yz)\geqslant\frac{1}{4}$,求 $[1\times f(1)]+[2\times f(2)]+[3\times f(3)]+\cdots+[2011\times f(2011)]$ 的值.其中对于实数 a, $[a]$ 表示不超过 a 的最大整数.

参考答案

1. 解　我们发现,实际上,数 a 和 b 是2的非负整数指数的幂,即 $a=2^k$, $b=2^{2011-k}$,则判别式 $\Delta=a^2-4b=2^{2k}-4\cdot2^{2011-k}=2^{2k}-2^{2013-k}\geqslant0$,得 $2k\geqslant2013-k$,因此 $k\geqslant\frac{2013}{3}=671$,但 $k\leqslant2011$,所以 k 能够取 $2011-671+1=1341$ 个不同的整数值.每个 k 恰对应一个所求的二次三项式,所以这样的二次三项式共有1341个.

2. 解　易知,圆心 O 及垂心 H 都在锐角三角形 ABC 的内部,延长 AO 交圆于 N,连接 AH 并延长至 H_1 与 BC 相交,连接 CN,在 $\mathrm{Rt}\triangle CAN$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle AH_1B$ 中, $\angle ANC=\angle ABC$,于是有 $\angle CAN=\angle BAH_1$,再由 AL 是 $\triangle ABC$ 的角平分线,得 $\angle1=\angle2$.

由条件 $AP\perp OH$,得 $AH=AO=1$.

连接 BO 交圆于 M,连接 AM、CM、CH,

可知 $AMCH$ 为平行四边形,

所以 $CM=AH=AO=1$, $BM=2$,

因为 $\triangle MBC$ 是直角三角形,

由勾股定理得 $BC=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$.

4. 解1　作 $\mathrm{Rt}\triangle ADB$,使得 $\angle ADB=90°$, $AD=1$, $AB=2$,

则 $\angle B=30°$, $BD=\sqrt{3}$.

延长 BD 到 C,使 $BC=2$,则 $DC=2-\sqrt{3}$.

连接 AC,则 $\angle ACB=(180°-30°)\div2=75°$.

作 $\angle ACD$ 的平分线交 AD 于 E,

则 $\angle ECD=37.5°$.

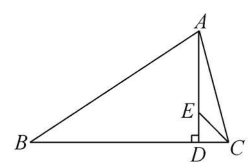

图2

由于 $AC^2=AD^2+DC^2=1+(2-\sqrt{3})^2=8-4\sqrt{3}$,

所以 $AC=\sqrt{8-4\sqrt{3}}$

$=\sqrt{6-2\sqrt{12}+2}$

$=\sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}$

$=\sqrt{6}-\sqrt{2}$.

由三角形的角平分线定理,得 $\frac{AE}{ED}=\frac{AC}{DC}$,

于是 $\frac{AE+ED}{ED}=\frac{AC+DC}{DC}$,

即 $\frac{ED}{DC}=\frac{AD}{AC+CD}=\frac{AD}{\sqrt{6}-\sqrt{2}+2-\sqrt{3}}$

$=\frac{1}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}=(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)$,

所以 $\tan 37.5^\circ=\frac{ED}{DC}=(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)$

$=\sqrt{6}-2+\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

解 2 作等腰直角三角形 ABC,使 $\angle C=90^\circ$, $AC=BC=1$,则 $AB=\sqrt{2}$.

作 $\angle CAD=30^\circ$,

则 $CD=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $AD=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

则 $\angle DAB=15^\circ$.

作 $\angle BAD$ 的平分线 AE,记 $CE=x$,

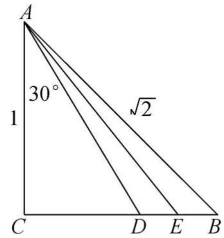

图 3

则 $BE=1-x$, $DE=x-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

所以 $\frac{x-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{2\sqrt{3}}{3}}=\frac{1-x}{\sqrt{2}}$,

整理得 $x=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-2}$

$=\sqrt{6}-2+\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

$\tan 37.5^\circ=\frac{CE}{AC}=\frac{x}{1}=\sqrt{6}-2+\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

5. 解 记 $f(x)=f_0(x)=\frac{1+x}{1-3x}$,

则 $f_1(x)=f(f(x))=\frac{1+\frac{1+x}{1-3x}}{1-3\cdot\frac{1-x}{1-3x}}=-\frac{1-x}{1+3x}$;

$f_2(x)=f(f_1(x))=\frac{1-\frac{1-x}{1+3x}}{1+3\cdot\frac{1-x}{1+3x}}=x$;

$f_3(x)=f(f_2(x))=\frac{1+x}{1-3x}=f(x)=f_0(x)$;

接下来有 $f_4(x)=f_1(x)$, $f_5(x)=f_2(x)$, $f_6(x)=f_3(x)$, …, $f_n(x)$ 的表达式是循环重复的,以 3 项为一周期.

所以, $f_{2011}(x)=f_{3\times 670+1}(x)=f_1(x)=\frac{x-1}{1+3x}$,

$f_{2011}(2011)=\frac{2011-1}{1+3\times 2011}=\frac{2010}{6034}=\frac{1005}{3017}$.

二、证明 作以 A 为中心、逆时针旋转 60° 的变换 $R(A,60^\circ)$,使 $\triangle ABD$ 到 $\triangle ACD_1$,由于 $\angle ADC+\angle AD_1C=\angle ADC+\angle ADB=180^\circ$,所以 A、D、C、D_1 共圆,因此 O_2 是 $\triangle AD_1C$ 的外心,也就是 $O_1\xrightarrow{R(A,60^\circ)}O_2$,因此 $AO_1=DO_1=AO_2=DO_2=O_1O_2$,

所以 $\angle O_1AO_2=\angle O_1DO_2=60^\circ$.

由 $\angle AO_1O_2+\angle ACB=120^\circ+60^\circ=180^\circ$,

O_1 在 $\triangle ACD$ 的外接圆 $\odot O_2$ 上.

由于 $\angle AI_1D=\angle ABD+\frac{1}{2}(180^\circ-\angle ABD)$

$=60^\circ+\frac{1}{2}\times 120^\circ=120^\circ$,

所以 I_1 在 $\odot O_2$ 上,因此 $\angle O_1I_1D=180^\circ-\angle O_1AD=180^\circ-30^\circ=150^\circ$,

$\angle I_1O_1D+\angle I_1DO_1=180^\circ-150^\circ=30^\circ$.

同理可证, I_2 在 $\triangle ABD$ 的外接圆 $\odot O_1$ 上,

所以 $\angle DI_2O_2=150^\circ$.

由于 $\angle I_1DI_2=\frac{1}{2}\times 180^\circ=90^\circ$,

$\angle I_2DO_2+\angle I_1DO_1=\angle I_1DI_2-\angle O_1DO_2$

$=90^\circ-60^\circ=30^\circ$,

比较可得 $\angle I_1O_1D=\angle I_2DO_2$.

在 $\triangle O_1I_1D$ 与 $\triangle DI_2O_2$ 中,

因为已证 $O_1D=DO_2$,

$\angle O_1I_1D=\angle DI_2O_2=150^\circ$,

又 $\angle I_1O_1D=\angle I_2DO_2$.

因此 $\triangle O_1I_1D\cong\triangle DI_2O_2$.

所以 $I_1O_1=DI_2$,

$DI_1=I_2O_2$.

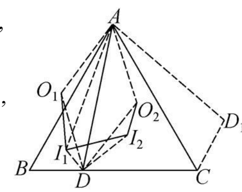

图 4

由于 $\angle I_1DI_2=90^\circ$, $\triangle I_1DI_2$ 是直角三角形.

根据勾股定理,有 $(DI_1)^2+(DI_2)^2=(I_1I_2)^2$,

而 $I_1O_1=DI_2$, $DI_1=I_2O_2$.

因此 $(I_1O_1)^2+(I_2O_2)^2=(I_1I_2)^2$.

三、解 由于当 x 是正整数时, $[\frac{x}{1!}]=[x]$,

$[\frac{x}{2!}]=[\frac{x}{2}]\geqslant\frac{x-1}{2}$, $[\frac{x}{3!}]=[\frac{x}{6}]>\frac{x}{6}-1$,

所以 $x+\frac{x-1}{2}+\frac{x}{6}-1<2011$,即 $\frac{5x}{3}<2012\frac{1}{2}$,

得方程的正整数解 x 满足 $0<x<1207.5$.

由于 $6!=720$, $7!=5040$,

所以方程的正整数解 $x<7!$,即

$[\frac{x}{7!}]=[\frac{x}{8!}]=[\frac{x}{9!}]=[\frac{x}{10!}]=[\frac{x}{11!}]=0$.

因此,方程 $[\frac{x}{1!}]+[\frac{x}{2!}]+[\frac{x}{3!}]+[\frac{x}{4!}]+[\frac{x}{5!}]+$

$[\frac{x}{6!}]=2011$ 的解与原方程的解是一样的.

设小于 $7!$ 的正整数 x 为上述方程的解, 我们写出 $\frac{x}{k!}(k=1,2,3,4,5,6)$ 的带余除法表达式:

设 $\frac{x}{6!}=a+\frac{r_1}{6!}, 0\leqslant r_1<6!, (0\leqslant a\leqslant 6, a\in \mathbf{N})$;

因此 $[\frac{x}{6!}]=a$ ①

$\frac{x}{5!}=6a+\frac{r_1}{5!}=6a+b+\frac{r_2}{5!}, 0\leqslant r_2<5!, (0\leqslant b\leqslant 5, b\in \mathbf{N})$,

因此 $[\frac{x}{5!}]=6a+b$ ②

$\frac{x}{4!}=30a+5b+\frac{r_2}{4!}=30a+5b+c+\frac{r_3}{4!}, 0\leqslant r_3<4!, (0\leqslant c\leqslant 4, c\in \mathbf{N})$,

因此 $[\frac{x}{4!}]=30a+5b+c$ ③

$\frac{x}{3!}=120a+20b+4c+\frac{r_3}{3!}=120a+20b+4c+d+\frac{r_4}{3!}, 0\leqslant r_4<3!, (0\leqslant d\leqslant 3, d\in \mathbf{N})$;

因此 $[\frac{x}{3!}]=120a+20b+4c+d$ ④

$\frac{x}{2!}=360a+60b+12c+3d+\frac{r_4}{2!}=360a+60b+12c+3d+e+\frac{r_5}{2!}, 0\leqslant r_5<2, (e=0,1,2)$;

因此 $[\frac{x}{2!}]=360a+60b+12c+3d+e$ ⑤

$\frac{x}{1!}=720a+120b+24c+6d+2e+\frac{r_5}{1!}=720a+120b+24c+6d+2e+f, (f=0,1)$;

因此 $[\frac{x}{1!}]=720a+120b+24c+6d+2e+f$ ⑥

①~⑥相加得 $1237a+206b+41c+10d+3e+f=2011$.

显然 $a=1$, 因此 $206b+41c+10d+3e+f=2011-1237=774$;

易知 $b=3$, 因此 $41c+10d+3e+f=774-206\times 3=156$;

易知 $c=3$, 于是 $10d+3e+f=156-41\times 3=33$;

类似求得 $d=3, e=1, f=0$.

所求的 $x=1\times 720+3\times 120+3\times 24+3\times 6+1\times 2+0\times 1=1172$.

$x=1172$ 是方程 $[\frac{x}{1!}]+[\frac{x}{2!}]+[\frac{x}{3!}]+\cdots+[\frac{x}{10!}]+[\frac{x}{11!}]=2011$ 的唯一正整数解.

四、解　首先证明, $n_{\min}>48$.

如图5, 在平面上画长为5的线段 AB, 分别以 A、B 为圆心, 画半径为0.5的两个圆, 在每一个圆内, 取24个点, 则平面上有48个点满足题设条件(其中任意3点中必有2点的距离不大于1), 显然, 不可能画出一个半径为1的圆, 其包含有25个所选的点, 所以 $n>48$.

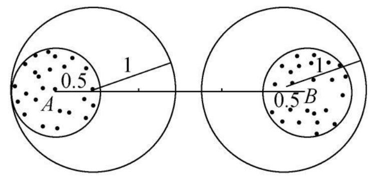

图5

下面证明 $n_{\min}=49$.

若 $n=49$, 设 A 是其中的一点, 作以 A 为圆心半径为1的 $\odot A$, 若所有的点都在圆 A 中, 那么就满足题设条件.

若不是所有的点都在圆 A 中, 则至少有一点 B 不在圆 A 中, 再作以 B 为圆心、半径为1的 $\odot B$, 则 A、B 的距离大于1(如图6), 除 A, B 外, 余下的47个点中每一点 P 都与 A、B 组成3点组, 必有两个点的距离不大于1, 所以要么 $PA\leqslant 1$, 要么 $PB\leqslant 1$, 即点 P 要么在 $\odot A$ 中, 要么在 $\odot B$ 中, 根据抽屉原理, 必有一个圆至少包含了这47个点中的24个点, 不妨设这个圆就是 $\odot A$, 再加上圆心 A 点, 就有不少于25个点在这个半径为1的 $\odot A$ 中(圆内或圆周上).

所以 n 的最小值是49.

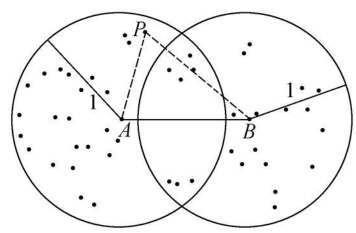

图6

五、解　由于已知函数 $f: R\to R$, 使得对任意实数 x, y, z 都满足 $\frac{1}{2}f(xy)+\frac{1}{2}f(xz)-f(x)f(yz)\geqslant\frac{1}{4}$, 可令 $x=y=z=0$,

有 $\frac{1}{2}f(0)+\frac{1}{2}f(0)-(f(0))^2\geqslant\frac{1}{4}$,

即$\left(f(0)-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant 0$,

由于$f(0)$是一个实数,所以$f(0)=\frac{1}{2}$.

再令$x=y=z=1$,

有$\frac{1}{2}f(1)+\frac{1}{2}f(1)-(f(1))^2\geqslant\frac{1}{4}$,

即$\left(f(1)-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant 0$,

由于$f(1)$是一个实数,所以$f(1)=\frac{1}{2}$.

又令$y=z=0$,

有$\frac{1}{2}f(0)+\frac{1}{2}f(0)-f(x)f(0)\geqslant\frac{1}{4}$,

代入$f(0)=\frac{1}{2}$得

对任意实数x,都有$f(x)\leqslant\frac{1}{2}$ ①

又令$y=z=1$,

有$\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(x)-f(x)f(1)\geqslant\frac{1}{4}$,

代入$f(1)=\frac{1}{2}$得

对任意实数x,都有$f(x)\geqslant\frac{1}{2}$ ②

综合①、②可得,对任意实数x,都有$f(x)=\frac{1}{2}$.

验证:函数$f(x)=\frac{1}{2}$满足题设条件,取的是等号,所以满足题设条件的函数的唯一解为$f(x)=\frac{1}{2}$.

于是

$$[1\times f(1)]+[2\times f(2)]+[3\times f(3)]+\cdots+[2011\times f(2011)]$$
$$=\left[\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{2}{2}\right]+\left[\frac{3}{2}\right]+\left[\frac{4}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{2011}{2}\right]$$
$$=0+1+1+2+2+3+3+\cdots+1005+1005$$
$$=2\times(1+2+3+\cdots+1005)$$
$$=(1+1005)\times1005$$
$$=1011030.$$

(北京数学会普及委员会提供)

(上接第43页)

为此,我们用穷举的方法,把各种排列写出来:(前面已讨论过1、2排在最前面的情形,这里可以略去.)

3,1,2,4, 3,1,4,2, 3,2,1,4, 3,2,4,1, 3,4,1,2, 3,4,2,1;

4,1,2,3, 4,1,3,2, 4,2,1,3, 4,2,3,1, 4,3,1,2, 4,3,2,1.

不难看出用第二种方法能找到最好旅馆的排列,除了前面所说‘2排在最前面’的6种外,还有这里的下述排法:3,1,2,4, 3,1,4,2, 3,4,1,2, 4,1,2,3, 4,1,3,2,共5种.因此,用第二种方法找到最好旅馆的概率是$\frac{11}{24}$.

用第三种方法能找到最好旅馆的排列是:3,2,1,4, 3,2,4,1, 3,4,2,1, 4,2,1,3, 4,2,3,1, 4,3,1,2,共6种.因此,第三种方法找到最好旅馆的概率,和第一种方法找到旅馆的概率一样,也是$\frac{1}{4}$.

如果排列是4,3,2,1,那么上述三种方法都无法找到最好旅馆.

第二种方法找到最好旅馆的概率最大.

(北京高中数学知识应用竞赛组委会提供)

欢迎投稿

来稿须知

1.稿件的内容要新颖、形式要活泼,以适合中学生阅读,应避免写成教学交流文章.

2.提倡短小精悍的文章,讲清一、两个问题,不要追求"大而全".稿一般不超过1500字,中学生习作栏目的稿件更要注意求简求精.

3.来稿请用300或400字稿纸誊清,打印稿应留有一定的行距、字距(每行40个字);文稿中的外文字母要分清语种、大写、小写、正体、斜体;数学符号、图形要清楚、规范,容易混淆的字母、符号在第一次出现时请用铅笔注明;文稿中的计算要准确.

4.来稿请在左上方注明文稿适合初中生还是高中生阅读,标题下方请写明作者的通讯地址、邮编、作者姓名.

5.来稿切忌一稿多投,如发现抄袭现象我们将作出公开批评.来稿一律不退,请作者自留底稿.