2006 年北京市中学生数学竞赛(高一)

一、选择题(每小题 5 分,共 25 分)

1. 点 P 从 O 出发,按逆时针方向沿周长为 l 的图形运动一周,点 O、P 的距离(y)与点 P 走过的路程(x)的函数关系如图 1 所示. 那么,点 P 所走过的图形是图 2 中的( ).

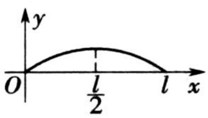

图 1

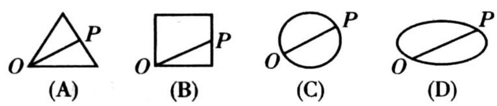

图 2

2. 已知函数 $f(x)=\pi\sin\frac{x}{4}$. 如果存在实数 x_1、x_2,使得对任意的实数 x,都有

$$f(x_1)\leqslant f(x)\leqslant f(x_2),$$

则 $|x_1-x_2|$ 的最小值是( ).

(A) 8π (B) 4π (C) 2π (D) π

3. 已知数列

$$a_1=\frac{1}{2},a_2=\frac{1}{3}+\frac{2}{3},\cdots,$$

$$a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n+1}+\cdots+\frac{n}{n+1},\cdots.$$

设 $S_n=\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}}$. 则 S_{2006} 最接近的整数为( ).

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

4. n 是正整数,规定:$n!=1\times2\times\cdots\times n$. 则 $1!\times1+2!\times2+\cdots+59!\times59$ 除以 2 006 的余数是( ).

(A) 1 (B) 5 (C) 401 (D) 2 005

5. 若两个整数 x、y 满足方程

$$(2x+9y)^{2006}+(4x-y)^{2006}=7777^{777},①$$

就称数组 (x,y) 为方程①的一组整数解. 则方程①的整数解的组数为( ).

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 2 006

二、填空题(每小题 7 分,共 35 分)

1. 若 $|a|=1$,$|b|=2$,$c=a+b$,且 $c\perp a$,则向量 a 与 b 的夹角为______度.

2. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,且 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=\frac{1}{2}$ 对称. 则

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(2006)=\_\_\_\_\_\_.$$

3. 在 $\triangle ABC$ 中,已知

$$\frac{a+b}{a}=\frac{\sin B}{\sin B-\sin A},$$

且 $\cos(A-B)+\cos C=1-\cos 2C$.

则 $\frac{a+c}{b}=$______.

4. 设递增数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=6$,$n\in\mathbf{N}_+$,且当 $n\geqslant2$ 时,$a_n+a_{n-1}=\frac{9}{a_n-a_{n-1}}+8$. 则 $a_{70}=$______.

5. 已知 $\triangle ABC$ 的三条边 $AB=\sqrt{34}$,$BC=5\sqrt{10}$,$CA=2\sqrt{26}$. 则 $\triangle ABC$ 的面积等于______.

三、(10 分) 在 $\triangle ABC$ 中,r 为内切圆半径,与边 BC、AC、AB 分别相切的旁切圆的半径记为 r_a、r_b、r_c. 证明:$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$.

注:与三角形的一边相切同时与另两边的延长线相切的圆,称为该三角形的一个旁切圆. 每个三角形都有三个旁切圆.

四、(15 分) 已知 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是正数,对实数 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 和 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 总满足 $a_ic_i>b_i^2\ (i=1,2,\cdots,n)$. 求证:

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)(c_1+c_2+\cdots+c_n)\geqslant(b_1+b_2+\cdots+b_n)^2.$$

五、(15分)在$\triangle ABC$内部取n个点,将$\triangle ABC$剖分为若干个小三角形(每两个小三角形或者有一个公共顶点,或者有一条公共边,或者完全没有公共点,如图3所示).现将点A染红色,点B染蓝色,点C染黑色,其余n个点的每个点也任意染上红、蓝、黑三色之一.我们称三个顶点的颜色恰为红、蓝、黑的小三角形为"特征三角形".证明:至少有一个小三角形是特征三角形.

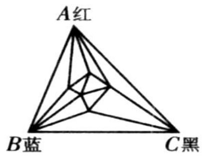

图3

参考答案

一、1. C.

易知,选项(A)、(B)的图像是若干条线段组成的折线;选项(D)中当点P走过的路程为$x=\frac{l}{2}$时,OP不是最大值(过点P作OP的垂线交椭圆于点P',显然,$OP'>OP$);选项(C)中$y=\frac{l}{\pi}\sin\frac{\pi x}{l}$,其图像如图1.

2. B.

显然,$f(x_1)$、$f(x_2)$分别是$f(x)$的最小值、最大值,即$\sin\frac{x_1}{4}=-1$,$\sin\frac{x_2}{4}=1$.故

$x_1=8k_1\pi-2\pi$,$x_2=8k_2\pi+2\pi$.

所以,$|x_1-x_2|\geqslant 4\pi$.

3. C.

由于$a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n+1}+\cdots+\frac{n}{n+1}=\frac{n}{2}$,故

$$S_n=\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}}$$

$$=\frac{4}{1\times2}+\frac{4}{2\times3}+\cdots+\frac{4}{n(n+1)}$$

$$=4\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$$

$$=4\left(1-\frac{1}{n+1}\right).$$

所以,$S_{2\,006}=4(1-\frac{1}{2\,007})$最接近的整数为4.

4. D.

注意到$2\,006=2\times17\times59$,故$2\,006\mid60!$.

又$1!\times1+2!\times2+\cdots+59!\times59$

$=1!\times(2-1)+2!\times(3-1)+\cdots+59!\times(60-1)$

$=(2!-1!)+(3!-2!)+\cdots+(60!-59!)$

$=60!-1$.

所以,所求余数是2 005.

5. A.

假设存在整数x、y满足方程①.

若$7\mid(2x+9y)$,由方程①知$7\mid(4x-y)$,此时,方程①左边能被$7^{2\,006}$整除,但方程①右边只能被7^{777}整除.

所以,$7\nmid(2x+9y)$,$7\nmid(4x-y)$.

对$\forall a\in\mathbf{Z}$,

$7\mid[(a-3)(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)(a+3)]$

$\Rightarrow7\mid(a^7-a)=a(a^6-1)$.

所以,$7\mid[(2x+9y)^6-1]$,$7\mid[(4x-y)^6-1]$.

从而,$7\mid\{(2x+9y)^2[(2x+9y)^{6\times334}-1]\}$,

$7\mid\{(4x-y)^2[(4x-y)^{6\times334}-1]\}$.

由式①知

$7\mid[(2x+9y)^2+(4x-y)^2]\Rightarrow7\mid(x^2+2y^2)$.

易知,任意完全平方数被7除余数为0,1,2,4.

经检验,只有当$7\mid x$,$7\mid y$时,$7\mid(x^2+2y^2)$.但此时,$7\mid(2x+9y)$,$7\mid(4x-y)$,矛盾.

所以,不存在整数x、y满足方程①.

二、1. $120°$.

由$\mathbf{c}\perp\mathbf{a}\Rightarrow\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}=0\Rightarrow(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}=0$

$\Rightarrow|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos\alpha=0\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{1}{2}$.

所以,向量$\mathbf{a}$与$\mathbf{b}$的夹角$\alpha=120°$.

2. 0.

由$y=f(x)$的图像关于直线$x=\frac{1}{2}$对称,知

$f(x)=f(1-x)$.

又$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数,故

$f(1-x)=-f(x-1)$.

从而,$f(x)+f(x-1)=0$.

所以,$f(1)+f(2)+\cdots+f(2\,006)=0$.

3. $\frac{\sqrt5-1}{2}+\sqrt{\frac{\sqrt5-1}{2}}$.

由$\cos(A-B)+\cos C=1-\cos2C$

$\Rightarrow\cos(A-B)-\cos(A+B)=2\sin^2C$

$\Rightarrow2\sin A\cdot\sin B=2\sin^2C\Rightarrow ab=c^2$.

由$\frac{a+b}{a}=\frac{\sin B}{\sin B-\sin A}\Rightarrow b^2-a^2=ab$

$\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{\sqrt5-1}{2}$.

所以，$\frac{c}{b}=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

4. 29.

由 $a_k+a_{k-1}=\frac{9}{a_k-a_{k-1}}+8$

$\Rightarrow a_k^2-a_{k-1}^2=8(a_k-a_{k-1})+9$.

取 $k=2,3,\cdots,n$，累加得

$a_n^2-a_1^2=8(a_n-a_1)+9(n-1)$.

故 $a_{70}^2-6^2=8(a_{70}-6)+9\times69$，即

$a_{70}^2-8a_{70}-609=0$.

故 $a_{70}=29$（负值舍去）.

5. 10.

如图4，以 BC 为斜边，向 $\triangle ABC$ 一侧作 Rt $\triangle BCD$，使 $\angle BDC=90°$，$BD=5$，$CD=15$.

再作矩形 $DEA'F$，使 $DE=2$，$DF=5$. 则 $BE=3$，$CF=10$. 此时，

$A'C=\sqrt{104}=AC$，

$A'B=\sqrt{34}=AB$.

所以，点 A 与 A' 重合.

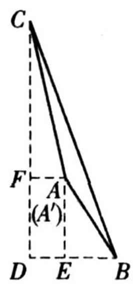

图4

故 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BCD}-S_{\triangle ABE}-S_{\triangle ACF}-S_{矩形DEAF}$

$=\frac{1}{2}\times5\times15-\frac{1}{2}\times3\times5-\frac{1}{2}\times2\times10-2\times5$

$=10$.

三、为简单起见，本题解答用 $\triangle ABC$ 同时表示它的面积.

如图5，联结 AO_a、BO_a、CO_a，则

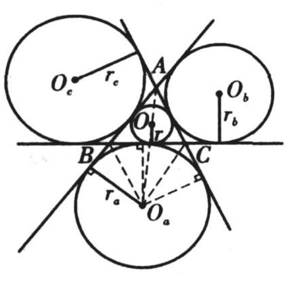

图5

$\triangle AO_aB=\frac{1}{2}r_ac$，

$\triangle AO_aC=\frac{1}{2}r_ab$，

$\triangle BO_aC=\frac{1}{2}r_aa$.

而 $\triangle ABC=\frac{1}{2}r(a+b+c)$.

由 $\triangle ABC=\triangle AO_aB+\triangle AO_aC-\triangle BO_aC$，可得

$r(a+b+c)=r_a(b+c-a)$，

即 $r\times2p=r_a(2p-2a)$.

所以，$rp=r_a(p-a)$.

同理，$rp=r_b(p-b)$，$rp=r_c(p-c)$.

故 $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{p-a}{rp}+\frac{p-b}{rp}+\frac{p-c}{rp}$

$=\frac{1}{r}\cdot\frac{3p-2p}{p}=\frac{1}{r}$.

四、构造 n 个二次函数

$f_i(x)=a_ix^2+2b_ix+c_i(i=1,2,\cdots,n)$.

由于对每个 i，都有 $a_i>0$，$a_ic_i>b_i^2$，即 $\Delta_i=(2b_i)^2-4a_ic_i\leqslant0$，所以，$f_i(x)\geqslant0$，也就是

$f_i(x)=a_ix^2+2b_ix+c_i\geqslant0(i=1,2,\cdots,n)$.

相加得 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)\geqslant0$，即

$$f(x)=(a_1+a_2+\cdots+a_n)x^2+2(b_1+b_2+\cdots+b_n)x+(c_1+c_2+\cdots+c_n)\geqslant0.$$

因为 $a_1+a_2+\cdots+a_n>0$，抛物线的开口向上，且有 $f(x)\geqslant0$，所以，$\Delta\leqslant0$. 则有

$$\Delta=[2(b_1+b_2+\cdots+b_n)]^2-4(a_1+a_2+\cdots+a_n)(c_1+c_2+\cdots+c_n)\leqslant0.$$

故 $(a_1+a_2+\cdots+a_n)(c_1+c_2+\cdots+c_n)\geqslant(b_1+b_2+\cdots+b_n)^2$.

五、设在 $\triangle ABC$ 内部的红蓝边（即一端点为红点，一端点为蓝点的边）有 k 条，又设三个顶点颜色不同（红、蓝、黑各一个）的特征三角形共有 p 个，三顶点分别为红、红、蓝或蓝、蓝、红的小三角形共有 q 个，其余的小三角形（如顶点颜色为红、红、黑；红、红、红；蓝、蓝、黑；蓝、蓝、蓝；黑、黑、黑；黑、黑、红；黑、黑、蓝等）共 r 个.

我们统计每个小三角形红蓝边的条数，再把它们加起来，总和数为 $p+2q$.

从另一角度看，由于每一条在大三角形的内部的红蓝边都为两个小三角形的公共边，即被统计两次，而大 $\triangle ABC$ 的一条红蓝边 AB 只属于一个小三角形，只计数一次. 所以，总和数为 $2k+1$. 因此，

$p+2q=2k+1$.

从而，$p=2(k-q)+1$ 是个奇数.

因此，三个顶点的颜色全不相同的特征三角形个数 p 是奇数，p 最少是1. 也就是说至少有一个小三角形是特征三角形.

（说明：选择题及填空题答案由本刊编辑部宋强老师提供.）

（李延林 提供）