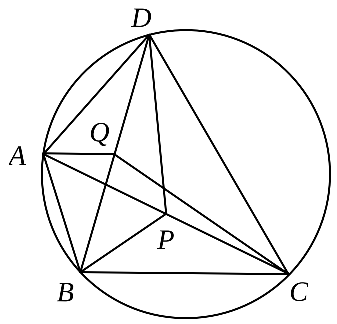
2011 年全国高中数学联合竞赛加试试题参考答案（A 卷）

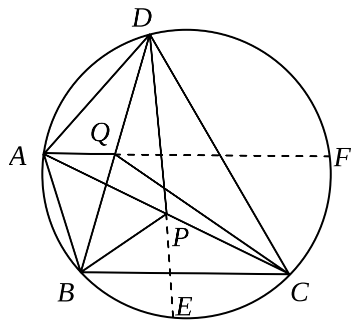
说明：

1．评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分；

2．如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，10 分为一个档次，不要再增加其他中间档次.

一、（本题满分 40 分） 如图，P, Q 分别是圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 的中点．若 $\angle BPA=\angle DPA$，证明：$\angle AQB=\angle CQB$．





证明 延长线段 DP 与圆交地另一点 E，则 $\angle CPE=\angle DPA=\angle BPA$，又 P 是线段 AC 的中点，故 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CE}$，从而 $\angle CDP=\angle BDA$．

又 $\angle ABD=\angle PCD$，所以△ $ABD\backsim$△ PCD，于是 $\frac{AB}{BD}=\frac{PC}{CD}$，即

$$AB\cdot CD=PC\cdot BD$$

从而有
$$AB\cdot CD=\frac{1}{2}AC\cdot BD=AC\cdot(\frac{1}{2}BD)=AC\cdot BQ，$$

即
$$\frac{AB}{AC}=\frac{BQ}{CD}.$$

又 $\angle ABQ=\angle ACD$，所以△$ABQ\backsim$△ACD，所以 $\angle QAB=\angle DAC$．

延长线段 AQ 与圆交于另一点 F，则 $\angle CAB=\angle DAF$，故 $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{DF}$．

又因为 Q 为 BD 的中点，所以 $\angle CQB=\angle DQF$．

又 $\angle AQB=\angle DQF$，所以 $\angle AQB=\angle CQB$．

二、（本题满分 40 分）证明：对任意整数$n \ge 4$，存在一个n次多项式

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

具有如下性质：

（1）$a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$均为正整数；

（2）对任意正整数m，及任意k $(k \ge 2)$个互不相同的正整数$r_1, r_2, \cdots, r_k$，均有

$$f(m) \ne f(r_1) f(r_2) \cdots f(r_k) .$$

证明 令

$$f(x) = (x+1)(x+2)\cdots(x+n) + 2 , \qquad ①$$

将①的右边展开即知$f(x)$是一个首项系数为 1 的正整数系数的n次多项式.

下面证明$f(x)$满足性质（2）.

对任意整数t，由于$n \ge 4$，故连续的n个整数$t+1, t+2, \cdots, t+n$中必有一个为 4 的倍数，从而由①知$f(t) \equiv 2 (\bmod 4)$.

因此，对任意k $(k \ge 2)$个正整数$r_1, r_2, \cdots, r_k$，有

$$f(r_1) f(r_2) \cdots f(r_k) \equiv 2^k \equiv 0 (\bmod 4) .$$

但对任意正整数m，有$f(m) \equiv 2 (\bmod 4)$，故

$$f(m) \not\equiv f(r_1) f(r_2) \cdots f(r_k) (\bmod 4) ,$$

从而$f(m) \ne f(r_1) f(r_2) \cdots f(r_k)$.

所以$f(x)$符合题设要求.

三、（本题满分 50 分）设 $a_1,a_2,\cdots,a_n\ (n\ge 4)$ 是给定的正实数，$a_1<a_2<\cdots<a_n$．对任意正实数 r，满足 $\dfrac{a_j-a_i}{a_k-a_j}=r\ (1\le i<j<k\le n)$ 的三元数组 (i,j,k) 的个数记为 $f_n(r)$．

证明：$f_n(r)<\dfrac{n^2}{4}$．

证明 对给定的 $j\ (1<j<n)$，满足 $1\le i<j<k\le n$，且

$$\frac{a_j-a_i}{a_k-a_j}=r \qquad ①$$

的三元数组 (i,j,k) 的个数记为 $g_j(r)$．

注意到，若 i,j 固定，则显然至多有一个 k 使得①成立．因 $i<j$，即 i 有 $j-1$ 种选法，故 $g_j(r)\le j-1$．

同样地，若 j,k 固定，则至多有一个 i 使得①成立．因 $k>j$，即 k 有 $n-j$ 种选法，故 $g_j(r)\le n-j$．从而

$$g_j(r)\le \min\{j-1,n-j\}.$$

因此，当 n 为偶数时，设 $n=2m$，则有

$$f_n(r)=\sum_{j=2}^{n-1}g_j(r)=\sum_{j=2}^{m-1}g_j(r)+\sum_{j=m}^{2m-1}g_j(r)$$

$$\le\sum_{j=2}^{m}(j-1)+\sum_{j=m+1}^{2m-1}(2m-j)=\frac{m(m-1)}{2}+\frac{m(m-1)}{2}$$

$$=m^2-m<m^2=\frac{n^2}{4}.$$

当 n 为奇数时，设 $n=2m+1$，则有

$$f_n(r)=\sum_{j=2}^{n-1}g_j(r)=\sum_{j=2}^{m}g_j(r)+\sum_{j=m+1}^{2m}g_j(r)$$

$$\le\sum_{j=2}^{m}(j-1)+\sum_{j=m+1}^{2m}(2m+1-j)$$

$$=m^2=\frac{n^2}{4}.$$

四、（本题满分 50 分）设 A 是一个3×9的方格表，在每一个小方格内各填一个正整数．称 A 中的一个$m\times n$ $(1\le m\le 3, 1\le n\le 9)$方格表为“好矩形”，若它的所有数的和为 10 的倍数．称 A 中的一个1×1的小方格为“坏格”，若它不包含于任何一个“好矩形”．求 A 中“坏格”个数的最大值．

解 首先证明 A 中“坏格”不多于 25 个．

用反证法．假设结论不成立，则方格表 A 中至多有 1 个小方格不是“坏格”．由表格的对称性，不妨假设此时第 1 行都是“坏格”．

设方格表 A 第 i 列从上到下填的数依次为 a_i, b_i, c_i，$i=1,2,\cdots,9$．记

$$S_k=\sum_{i=1}^{k}a_i, T_k=\sum_{i=1}^{k}(b_i+c_i),\ k=0,1,2,\cdots,9\text{，这里 } S_0=T_0=0\text{ ．}$$

我们证明：三组数 $S_0,S_1,\cdots,S_9$； $T_0,T_1,\cdots,T_9$ 及 $S_0+T_0,S_1+T_1,\cdots,S_9+T_9$ 都是模 10 的完全剩余系．

事实上，假如存在 $m,n,\ 0\le m<n\le 9$，使 $S_m\equiv S_n \pmod{10}$，则

$$\sum_{i=m+1}^{n}a_i=S_n-S_m\equiv 0 \pmod{10}\text{，}$$

即第 1 行的第 $m+1$ 至第 n 列组成一个“好矩形”，与第 1 行都是“坏格”矛盾．

又假如存在 $m,n,\ 0\le m<n\le 9$，使 $T_m\equiv T_n \pmod{10}$，则

$$\sum_{i=m+1}^{n}(b_i+c_i)=T_n-T_m\equiv 0 \pmod{10}\text{，}$$

即第 2 行至第 3 行、第 $m+1$ 列至第 n 列组成一个“好矩形”，从而至少有 2 个小方格不是“坏格”，矛盾．

类似地，也不存在 $m,n,\ 0\le m<n\le 9$，使 $S_m+T_m\equiv S_n+T_n \pmod{10}$．

因此上述断言得证．故

$$\sum_{k=0}^{9}S_k\equiv\sum_{k=0}^{9}T_k\equiv\sum_{k=0}^{9}(S_k+T_k)\equiv 0+1+2+\cdots+9\equiv 5 \pmod{10}\text{，}$$

所以
$$\sum_{k=0}^{9}(S_k+T_k)\equiv\sum_{k=0}^{9}S_k+\sum_{k=0}^{9}T_k\equiv 5+5\equiv 0 \pmod{10}\text{，}$$

矛盾！故假设不成立，即“坏格”不可能多于 25 个．

另一方面，构造如下一个3×9的方格表，可验证每个不填 10 的小方格都是“坏格”，此时有 25 个“坏格”．

1	1	1	2	1	1	1	1	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	10	1	1	1	1	2

综上所述，“坏格”个数的最大值是 25．