2014 年全国高中数学联赛一试试题　B 卷

一、填空题（每小题 8 分，共 64 分）

1、若函数 $f(x)$ 的图像是由依次连接点 $(0,0),(1,1)$和$(2,3)$ 的折线，则 $f^{-1}(2)=$ _______.

2、在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，二面角 $A'-BD-C'$ 等于____________.(用反三角表示)

3、对于实数 R 的任意子集 U，我们在 R 上定义函数 $f_U(x)=\begin{cases}1, x\in U\\ 0, x\notin U\end{cases}$，如果 A，B 是实数 R 的两个子集，则 $f_A(x)+f_B(x)\equiv 1$，的充分必要条件是____________ .

4、若果 $\Delta\mathrm{ABC}$ 的三个内角 A,B,C 的余切 $\cot A,\cot B,\cot C$ 依次成等差数列，则角 B 的最大值是__________.

5、实数列 $\{a_n\}$ 满足条件：$a_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1, a_2=\sqrt{2}+1, a_{n+1}+a_{n-1}=\dfrac{n}{a_n-a_{n-1}}+2(n\ge 2)$，则通项公式 $a_n=$________________________$(n\ge 1)$.

6、F_1,F_2 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个焦点，P 为椭圆上的一点，如果 ΔPF_1F_2 的面积为 1，$\tan\angle PF_1F_2=\dfrac{1}{2},\tan\angle PF_2F_1=-2$，则 $a=$ ____________.

7、将一副扑克牌中的大小王去掉，在剩下的 52 张牌中随机地抽取 5 张，其中至少有两张牌上的数字（或者字母 J，Q，K，A）相同的概率是________（要求计算出这个概率的数值，精确到 0.01）.

8、设 $g(x)=\sqrt{x(1-x)}$ 是定义在区间 $[0,1]$ 上的函数，则函数 $y=xg(x)$ 的图像与 x 轴所围成图形的面积是__________.

二、解答题（本大题共 3 小题，共 56 分）

9、（16 分）设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $\mathrm{S_n}$ 组成的数列满足 $S_n+S_{n+1}+S_{n+2}=6n^2+9n+7(n\ge 1)$. 已知 $a_1=1, a_2=5$，求数列 a_n 的通项公式.

10、(20 分)设 x_1,x_2,x_3 是多项式方程 $x^3-10x+11=0$ 的三个根.

$a)$ 已知 x_1,x_2,x_3 都落在区间 $(-5,5)$ 之中，求这三个根的整数部分；

$b)$ 证明：$\arctan x_1+\arctan x_2+\arctan x_3=\dfrac{\pi}{4}$.

11、(20 分)如下图，椭圆$\Gamma:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，$A(-2,0),B(0,-1)$是椭圆$\Gamma$上的两点，直线

$l_1:x=-2,l_2:y=-1$，$P(x_0,y_0)(x_0>0,y_0>0)$是Γ上的一个动点，l_3是过点P且

与Γ相切的直线，C、D、E分别是直线l_1与l_2，l_2与l_3，l_1与l_3的交点.

求证：三条直线AD，BE和CP共点 .