

2001年北京市中学生数学竞赛 初二年级复赛

(2001-04-15)

一、填空题(满分40分,每小题8分)

1. 已知有理数 x 满足方程 $\frac{1}{2001 - \frac{x}{x-1}} = \frac{1}{2001}$.

则 $\frac{x^3 - 2001}{x^4 + 29} =$ _____.

2. 如图1, 正方形 $ABCD$ 的面积是64平方厘米, 正方形 $CEFG$ 的面积是36平方厘米, DF 与 BG 相交于点 O . 则 $\triangle DBO$ 的面积等于 _____ 平方厘米.

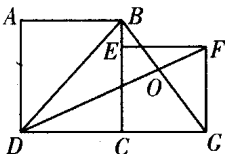


图1

3. 已知 $a^2 + b^2 = 6ab$ 且 $a > b > 0$. 则 $\frac{a+b}{a-b} =$ _____.

4. 化简表达式

$$\left[6 + \frac{a - \sqrt[3]{131 + a^3} - \sqrt{17160}}{a - \sqrt[3]{131 + a^3} - \sqrt{17160}} \right]^4,$$

所得的结果等于 _____.

5. 在边长为1厘米的正 $\triangle ABC$ 中, P_0 为 BC 边上一点, 作 $P_0P_1 \perp CA$ 于点 P_1 , 作 $P_1P_2 \perp AB$ 于点 P_2 , 作 $P_2P_3 \perp BC$ 于点 P_3 . 如果点 P_3 恰与点 P_0 重合, 则 $\triangle P_1P_2P_3$ 的面积是 _____ 平方厘米.

二、(满分15分) 证明恒等式:

$$a^4 + b^4 + (a+b)^4 = 2(a^2 + ab + b^2)^2.$$

三、(15分) 在六张纸片的正面分别写上整数1、2、3、4、5、6, 打乱次序后, 将纸片翻过来, 在它们的反面也随意分别写上1~6这六个整数, 然后计算每张纸片正面与反面所写数字之差的绝对值, 得出六个数. 请你证明: 所得的六个数中至少有两个是相同的.

四、(15分) 如图2, 在等腰 $\triangle ABC$ 中, 延长边 AB 到点 D , 延长边 CA 到点 E , 连结 DE , 恰

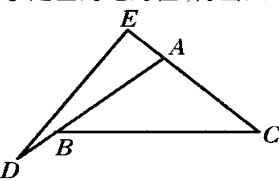


图2

有 $AD = BC = CE = DE$. 求证: $\angle BAC = 100^\circ$.

五、(15分) 1与0交替排列, 组成下面形式的一串数

101, 10 101, 1 010 101, 101 010 101, ...

请你回答, 在这串数中有多少个质数? 并请证明你的论断.

参考答案

一、1. -69 2. $24\frac{8}{37}$ 3. $\sqrt{2}$ 4. 625 5. $\frac{\sqrt{3}}{12}$

$$\begin{aligned} & \text{二、} a^4 + b^4 + (a+b)^4 - 2(a^2 + ab + b^2)^2 \\ &= (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 + (a^2 + 2ab + b^2)^2 \\ &\quad - 2(a^2 + ab + b^2)^2 \\ &= [(a^2 + b^2)^2 - (a^2 + ab + b^2)^2] \\ &\quad + [(a^2 + 2ab + b^2)^2 - (a^2 + ab + b^2)^2] \\ &\quad - 2a^2b^2 \\ &= (2a^2 + 2b^2 + ab)(-ab) + (2a^2 + 3ab + 2b^2) \\ &\quad \cdot ab - 2a^2b^2 \\ &= ab(-2a^2 - 2b^2 - ab + 2a^2 + 3ab + 2b^2 - 2ab) \\ &= 0. \end{aligned}$$

三、设六张卡片正面写的数是

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$;

反面写的数对应为 $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$.

(a_i, b_i 分别取值为 1, 2, 3, 4, 5, 6. $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.)

则这六张卡片正面写的数与反面写的数的绝对值分别为

$$|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, |a_3 - b_3|, |a_4 - b_4|, |a_5 - b_5|, |a_6 - b_6|.$$

设这六个数两两都不相等, 则它们只能取 0, 1, 2, 3, 4, 5 这六个值. 于是,

$$\sum_{i=1}^6 |a_i - b_i| = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 \quad (1)$$

是个奇数.

另一方面, $|a_i - b_i|$ 与 $a_i - b_i$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) 的奇偶性相同, 所以,

$$\sum_{i=1}^6 |a_i - b_i|$$

与

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^6 (a_i - b_i) \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6) \\ & \quad - (b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6) \\ &= (1+2+3+4+5+6) - (1+2+3+4+5+6) \\ &= 0 \end{aligned}$$

的奇偶性相同,是个偶数,与式(1)矛盾.

故 $|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, |a_3 - b_3|, |a_4 - b_4|, |a_5 - b_5|, |a_6 - b_6|$ 这六个数中至少有两个是相同的.

四、易知 ADE 为等腰三角形,其底角 EAD 必为锐角,所以等腰 ABC 中, BAC 为钝角,必是顶角,则 AB, AC 是腰,有 $AB = AC$.

如图 3,过 C 作 AD 的平行线 CF ,与过 D 所作 BC 的平行线交于点 F ,连结 EF ,易知 $BCFD$ 为平行四边形.因此, $DB = CF, BC = DF, EAD = ECF$.

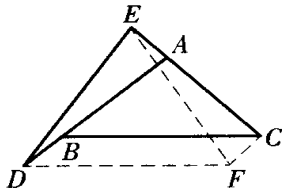


图 3

在 ADE 与 CEF 中,

$$AD = CE, AE = DB = CF, \quad EAD = ECF,$$

则 $\triangle ADE \cong \triangle CEF$, 有 $ED = EF$.

但 $ED = BC = DF$, $\triangle DEF$ 是等边三角形,那么, $\angle EDF = 60^\circ$.

设 $\angle BAC = \alpha$, 则

$$\angle ADF = \angle ABC = \frac{180^\circ - \alpha}{2}, \quad \angle DAE = 180^\circ - \alpha,$$

$$\begin{aligned} \angle ADE &= 180^\circ - 2 \angle DAE = 180^\circ - 2(180^\circ - \alpha) \\ &= 2\alpha - 180^\circ \end{aligned}$$

由 $\angle ADF + \angle ADE = \angle EDF = 60^\circ$, 得

$$\frac{180^\circ - \alpha}{2} + (2\alpha - 180^\circ) = 60^\circ$$

解得 $\alpha = 100^\circ$,

即 $\angle BAC = 100^\circ$.

五、很明显, 101 是个质数.

下面证明, $N = \underbrace{101010\dots01}_{k \text{ 个 } 0}$ ($k \geq 3$) 都是合数(中

间有 $k-1$ 个 0).

$$11N = 11 \times \underbrace{101010\dots01}_{k \text{ 个 } 0}$$

$$\underbrace{11\dots11}_{2k \text{ 个 } 1} \underbrace{11\dots11}_{k \text{ 个 } 1} \times (10^k + 1).$$

(1) 当 k 为不小于 3 的奇数时, 根据被 11 整除的判别法可知 11 不整除 $\underbrace{11\dots11}_{k \text{ 个 } 1}$, 所以, $11 \mid (10^k + 1)$, 即

$$\frac{10^k + 1}{11} = M_1 > 1.$$

$$\text{故 } N = \underbrace{11\dots11}_{k \text{ 个 } 1} \times \left(\frac{10^k + 1}{11} \right) = \underbrace{11\dots11}_{k \text{ 个 } 1} \times M_1.$$

则 N 是个合数.

(2) 当 k 为不小于 3 的偶数时, 易知 $11 \mid \underbrace{11\dots11}_{k \text{ 个 } 1}$.

$$\text{即 } \frac{\underbrace{11\dots11}_{k \text{ 个 } 1}}{11} = M_2 > 1.$$

$$\text{故 } N = \frac{\underbrace{11\dots11}_{k \text{ 个 } 1}}{11} \times (10^k + 1) = M_2 (10^k + 1).$$

则 N 是个合数.

综上, 当 $k \geq 3$ 时, $N = \underbrace{101010\dots01}_{k \text{ 个 } 0}$ 必为合数.

所以, 在 101, 10 101, 1 010 101, 101 010 101, …… 中, 只有 101 是质数.

(首都师范大学 周春荔 提供)

欢迎 中学生数学 订阅

高中刊邮发代号: 2—519

初中刊邮发代号: 2—518

《中学生数学》是中国数学会为中学生创办的一份期刊。她希望成为同学们的朋友, 希望成为教师指导学生们学习、交流的一个园地。

欢迎广大师生到邮局(所)订阅(两种刊物都是每月 1 期, 全年 12 期, 每期定价 3 元)。也可以直接与杂志社联系邮购(加 20% 的邮寄费)。

邮购地址: 首都师范大学数学系《中学生数学》杂志社, 邮编: 100037。

联系电话: 010-68902486