第一篇　代　　数

第1章　实　　数

1.1　实数的运算

1.1.1 ★ **计算**：$2\,005\times 20\,062\,006-2\,006\times 20\,052\,005$.

解析　将 20 062 006 及 20 052 005 分别分解为两数的积，得

$$20\,062\,006=2\,006\times 10\,000+2\,006=2\,006\times 10\,001,$$
$$20\,052\,005=2\,005\times 10\,000+2\,005=2\,005\times 10\,001,$$

所以，原式 $=2\,005\times 2\,006\times 10\,001-2\,006\times 2\,005\times 10\,001=0$.

评注　一般地有

$\overline{abab}=\overline{ab}\times 101$；$\overline{abcabc}=\overline{abc}\times 1\,001$；$\overline{abcdabcd}=\overline{abcd}\times 10\,001$；…

1.1.2 ★ **计算**：$\dfrac{1\times 2\times 3+2\times 4\times 6+7\times 14\times 21}{1\times 3\times 5+2\times 6\times 10+7\times 21\times 35}$.

解析　原式$=\dfrac{1\times 2\times 3\times(1+2\times 2\times 2+7\times 7\times 7)}{1\times 3\times 5\times(1+2\times 2\times 2+7\times 7\times 7)}$

$=\dfrac{2}{5}$.

1.1.3 ★ **计算**：$\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\cdots+\dfrac{1}{99\times 100}$.

解析　原式$=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{99}-\dfrac{1}{100}\right)$

$=1-\dfrac{1}{100}=\dfrac{99}{100}$.

评注　在做分数加减法运算时，根据特点，将其中一些分数适当拆开，使得拆开后有一些分数可以相互抵消，达到简化运算的目的，这种方法叫拆项法. 本例中，我们把$\dfrac{1}{n\times(n+1)}$拆成$\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$，即有

$$\frac{1}{n\times(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

其他常用的拆项方法如：

(1) $\dfrac{d}{n\times(n+d)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+d}\left[\text{或}\dfrac{1}{n\times(n+d)}=\dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+d}\right)\right]$. 它经常用于分母各因子成等差数列,且公差为 d 的情形.

(2) $\dfrac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\dfrac{1}{2}\times\left[\dfrac{1}{n\times(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)\times(n+2)}\right]$.

1.1.4 ★ **计算**:$\dfrac{1}{18}+\dfrac{1}{54}+\dfrac{1}{108}+\dfrac{1}{180}+\dfrac{1}{270}+\dfrac{1}{378}+\dfrac{1}{504}+\dfrac{1}{648}+\dfrac{1}{810}+\dfrac{1}{990}$.

解析　原式

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{3\times6}+\frac{1}{6\times9}+\frac{1}{9\times12}+\frac{1}{12\times15}+\frac{1}{15\times18}+\frac{1}{18\times21}+\frac{1}{21\times24}\\&\quad+\frac{1}{24\times27}+\frac{1}{27\times30}+\frac{1}{30\times33}\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{12}\right)+\cdots\\&\quad+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{30}-\frac{1}{33}\right)\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{33}\right)=\frac{10}{99}.\end{aligned}$$

1.1.5 ★★ **计算**:$\dfrac{1}{1\times2\times3}+\dfrac{1}{2\times3\times4}+\cdots+\dfrac{1}{98\times99\times100}$.

解析　因为 $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k(k+1)}-\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$,所以

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4}\right)+\cdots\\&\quad+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{98\times99}-\frac{1}{99\times100}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{99\times100}\right)=\frac{4\,949}{19\,800}.\end{aligned}$$

1.1.6 ★★ **计算**:$\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\dfrac{1}{1+2+3+4}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+\cdots+100}$.

解析　因为 $\dfrac{1}{1+2+\cdots+n}=\dfrac{2}{n(n+1)}=2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$,所以

原式 $=\dfrac{2}{2\times3}+\dfrac{2}{3\times4}+\dfrac{2}{4\times5}+\cdots+\dfrac{2}{100\times101}=2\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{101}\right)=\dfrac{99}{101}$.

1.1.7 ★★ **设** $A=48\times\left(\dfrac{1}{3^2-4}+\dfrac{1}{4^2-4}+\cdots+\dfrac{1}{100^2-4}\right)$,**求与** A **最接近的正整数.**

解析　对于正整数 $n\geqslant3$,有

$$\frac{1}{n^2-4}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+2}\right),$$

所以
$$\begin{aligned}A&=48\times\left(\frac{1}{3^2-4}+\frac{1}{4^2-4}+\cdots+\frac{1}{100^2-4}\right)\\&=48\times\frac{1}{4}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{98}\right)-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{102}\right)\right]\\&=12\times\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{99}-\frac{1}{100}-\frac{1}{101}-\frac{1}{102}\right)\\&=25-12\times\left(\frac{1}{99}+\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\frac{1}{102}\right).\end{aligned}$$

因为 $12\times\left(\frac{1}{99}+\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\frac{1}{102}\right)<12\times\frac{4}{99}<\frac{1}{2}$，所以，与 A 最接近的正整数为 25.

1.1.8 ★★ 2 008 加上它的 $\frac{1}{2}$ 得到一个数，再加上所得的数的 $\frac{1}{3}$ 又得到一个数，再加上这次得数的 $\frac{1}{4}$ 又得到一个数，…，依此类推，一直加到上一次得数的 $\frac{1}{2\,008}$. 最后得到的数是多少?

解析 由 2 008 加上它的 $\frac{1}{2}$ 得 $2\,008\times\left(1+\frac{1}{2}\right)$，再加上这数的 $\frac{1}{3}$ 得 $2\,008\times\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(1+\frac{1}{3}\right)$，依此类推，最后得到的数为

$$\begin{aligned}&2\,008\times\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(1+\frac{1}{3}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{1}{2\,008}\right)\\&=2\,008\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{2\,009}{2\,008}=\frac{2\,008\times2\,009}{2}\\&=2\,017\,036.\end{aligned}$$

1.1.9 ★ 计算：$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}$.

解析 原式
$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\left(\frac{1}{64}+\frac{1}{64}\right)-\frac{1}{64}\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\left(\frac{1}{32}+\frac{1}{32}\right)-\frac{1}{64}\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right)-\frac{1}{64}\\&=\cdots=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{64}=\frac{63}{64}.\end{aligned}$$

1.1.10 ★ 计算：$S=1-2+3-4+\cdots+2\,007-2\,008$.

解析
$$\begin{aligned}S&=(1-2)+(3-4)+\cdots+(2\,007-2\,008)\\&=\underbrace{(-1)+(-1)+\cdots+(-1)}_{\text{共}1\,004\text{个}}\end{aligned}$$

$=-1\,004.$

1.1.11 ★★ **计算**：$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+19\times20.$

解析　因为

$$1\times2=\frac{1}{3}\times1\times2\times3,$$

$$2\times3=\frac{1}{3}(2\times3\times4-1\times2\times3),$$

$$3\times4=\frac{1}{3}(3\times4\times5-2\times3\times4),$$

……

$$19\times20=\frac{1}{3}(19\times20\times21-18\times19\times20),$$

所以

$$\begin{aligned}&1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+19\times20\\=&\frac{1}{3}\times1\times2\times3+\frac{1}{3}(2\times3\times4-1\times2\times3)+\cdots\\&+\frac{1}{3}(19\times20\times21-18\times19\times20)\\=&\frac{1}{3}\times19\times20\times21=2\,660.\end{aligned}$$

1.1.12 ★★ **计算**：$1\times2\times3+2\times3\times4+3\times4\times5+\cdots+28\times29\times30.$

解析

$$\begin{aligned}&1\times2\times3+2\times3\times4+3\times4\times5+\cdots+28\times29\times30\\=&\frac{1}{4}\times1\times2\times3\times4+\frac{1}{4}(2\times3\times4\times5-1\times2\times3\times4)+\cdots\\&+\frac{1}{4}(28\times29\times30\times31-27\times28\times29\times30)\\=&\frac{1}{4}\times28\times29\times30\times31=188\,790.\end{aligned}$$

1.1.13 ★★ **计算**：$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{100}}.$

解析　设 $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{100}}$，则

$$\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{100}}+\frac{1}{2^{101}},$$

所以

$$S-\frac{1}{2}S=1-\frac{1}{2^{101}},$$

故

$$S=2-\frac{1}{2^{100}}.$$

评注　一般地，对于求和：$1+q+q^2+\cdots+q^n$，我们常常采用如下方法，令

$$S=1+q+q^2+\cdots+q^n,$$

则
$$qS=q+q^2+\cdots+q^n+q^{n+1},$$

于是
$$S-qS=1-q^{n+1},$$

$$S=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}(q\neq 1).$$

1.1.14 ★★ **计算**：$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{10}}$.

解析 设 $S=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{10}}$，则 $\frac{1}{3}S=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{3^{11}}$，所以

$$S-\frac{1}{3}S=1-\frac{1}{3^{11}},\ S=\frac{3}{2}-\frac{1}{2\times 3^{10}}.$$

1.1.15 ★ **计算**：$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1\,999}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{1\,998}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{1\,999}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1\,998}\right)$.

解析 设 $a=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1\,999}$，$b=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1\,998}$，则

原式 $=a(1+b)-(1+a)b=a-b=\frac{1}{1\,999}$.

1.1.16 ★★ **计算下列繁分数**：

$$1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{\ddots\ 1-\cfrac{1}{1-\cfrac{113}{355}}}}}\text{（2 008 个减号）}.$$

解析 先耐心地算几步，从中发现规律. 可将 $\frac{355}{113}$ 用字母 a 代替（这样可以得到更一般的结论）. 自下而上逐步算出

$$1-\frac{1}{a}=\frac{a-1}{a},\ 1-\frac{1}{\frac{a-1}{a}}=1-\frac{a}{a-1}=\frac{-1}{a-1},$$

$$1-\frac{1}{\frac{-1}{a-1}}=1+(a-1)=a.$$

由此可见，每计算 3 步，a 又重新出现，即 3 是一个周期. 而 $2\,008=3\times 669+$

1，所以，原式 $=1-\frac{1}{a}=\frac{a-1}{a}$. 特别地，在 $a=\frac{355}{113}$ 时，得出本题的答案是 $1-\frac{113}{355}=\frac{242}{355}$.

1.1.17 ★★ 比较 $S_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\cdots+\frac{n}{2^n}$ 与 2 的大小.

解析 先将 S_n 中的每一个数拆成两数的差：

$\frac{1}{2}=2-\frac{3}{2}$，$\frac{2}{4}=\frac{3}{2}-\frac{4}{4}$，$\frac{3}{8}=\frac{4}{4}-\frac{5}{8}$，$\frac{4}{16}=\frac{5}{8}-\frac{6}{16}$，…，$\frac{n}{2^n}=\frac{n+1}{2^{n-1}}-\frac{n+2}{2^n}$.

所以，
$$\begin{aligned}S_n&=\left(2-\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{4}\right)+\left(\frac{4}{4}-\frac{5}{8}\right)+\left(\frac{5}{8}-\frac{6}{16}\right)+\cdots\\&\quad+\left(\frac{n+1}{2^{n-1}}-\frac{n+2}{2^n}\right)\\&=2-\frac{n+2}{2^n}<2,\end{aligned}$$

即 $S_n<2$.

1.1.18 ★★ 已知 $a=\frac{11\times66+12\times67+13\times68+14\times69+15\times70}{11\times65+12\times66+13\times67+14\times68+15\times69}\times100$，问：$a$ 的整数部分是多少？

解析 我们只要估算出 a 在哪两个相邻整数之间即可.

$$\begin{aligned}a&=\frac{11\times66+12\times67+13\times68+14\times69+15\times70}{11\times65+12\times66+13\times67+14\times68+15\times69}\times100\\&=\frac{\begin{gathered}11\times(65+1)+12\times(66+1)+13\\\times(67+1)+14\times(68+1)+15\times(69+1)\end{gathered}}{11\times65+12\times66+13\times67+14\times68+15\times69}\times100\\&=\frac{11\times65+11+12\times66+12+13\times67+13+14\times68+14+15\times69+15}{11\times65+12\times66+13\times67+14\times68+15\times69}\times100\\&=\left(1+\frac{11+12+13+14+15}{11\times65+12\times66+13\times67+14\times68+15\times69}\right)\times100\\&=100+b.\end{aligned}$$

这里 $b=\frac{11+12+13+14+15}{11\times65+12\times66+13\times67+14\times68+15\times69}\times100$，下面进一步估计 b 介于哪两个相邻整数之间.

$$b=\frac{11+12+13+14+15}{11\times65+12\times66+13\times67+14\times68+15\times69}\times100$$

$$
\begin{aligned}
&< \frac{11+12+13+14+15}{11\times65+12\times65+13\times65+14\times65+15\times65}\times100\\
&= \frac{11+12+13+14+15}{(11+12+13+14+15)\times65}\times100=\frac{100}{65}<2,\\
b &= \frac{11+12+13+14+15}{11\times65+12\times66+13\times67+14\times68+15\times69}\times100\\
&> \frac{11+12+13+14+15}{11\times69+12\times69+13\times69+14\times69+15\times69}\times100\\
&= \frac{11+12+13+14+15}{(11+12+13+14+15)\times69}\times100=\frac{100}{69}>1.
\end{aligned}
$$

所以，$1<b<2$，$101<a<102$.

即 a 的整数部分是 101.

1.1.19 ★★ 在数 $\frac{2}{10}$，$\frac{3}{10}$，$\frac{4}{10}$，$\frac{5}{10}$，$\frac{6}{10}$，$\frac{7}{10}$，$\frac{8}{10}$，$\frac{9}{10}$ 的前面分别添加“$+$”或“$-$”，使它们的和为 1. 你能想出多少种方法?

解析 这 8 个有理数的分母都是 10，只要 $2,3,4,5,6,7,8,9$ 这 8 个整数的代数和为 10 即可，而 $2+3+\cdots+9=44$，所以添加“$+$”或“$-$”后，正数的和应为 $27\left(=\frac{1}{2}(44+10)\right)$.

方法很多. 如：

$$
\begin{aligned}
&\frac{2}{10}+\frac{3}{10}+\frac{4}{10}+\frac{5}{10}+\frac{6}{10}+\frac{7}{10}-\frac{8}{10}-\frac{9}{10}=1,\\
&-\frac{2}{10}+\frac{3}{10}+\frac{4}{10}+\frac{5}{10}-\frac{6}{10}+\frac{7}{10}+\frac{8}{10}-\frac{9}{10}=1,\\
&\frac{2}{10}-\frac{3}{10}+\frac{4}{10}-\frac{5}{10}+\frac{6}{10}+\frac{7}{10}+\frac{8}{10}-\frac{9}{10}=1,\\
&\frac{2}{10}-\frac{3}{10}+\frac{4}{10}+\frac{5}{10}-\frac{6}{10}+\frac{7}{10}-\frac{8}{10}+\frac{9}{10}=1,\\
&\frac{2}{10}+\frac{3}{10}-\frac{4}{10}+\frac{5}{10}-\frac{6}{10}-\frac{7}{10}+\frac{8}{10}+\frac{9}{10}=1\text{ 等.}
\end{aligned}
$$

1.1.20 ★★ 计算 $\frac{(7^4+64)(15^4+64)(23^4+64)(31^4+64)(39^4+64)}{(3^4+64)(11^4+64)(19^4+64)(27^4+64)(35^4+64)}$.

解析 因为

$$
\begin{aligned}
a^4+64 &= a^4+16a^2+64-16a^2=(a^2+8)^2-16a^2\\
&=(a^2+4a+8)(a^2-4a+8)\\
&=[(a+2)^2+4][(a-2)^2+4],
\end{aligned}
$$

所以，原式等于

$$\frac{(5^2+4)(9^2+4)(13^2+4)(17^2+4)(21^2+4)\quad(25^2+4)(29^2+4)(33^2+4)(37^2+4)(41^2+4)}{(1^2+4)(5^2+4)(9^2+4)(13^2+4)(17^2+4)\quad(21^2+4)(25^2+4)(29^2+4)(33^2+4)(37^2+4)}$$

$$=\frac{41^2+4}{1^2+4}=337.$$

1.1.21 ★★ **求和**：$\frac{1}{1+1^2+1^4}+\frac{2}{1+2^2+2^4}+\frac{3}{1+3^2+3^4}+\cdots+\frac{100}{1+100^2+100^4}$.

解析 **因为** $1+k^2+k^4=(1+k^2)^2-k^2=(1-k+k^2)(1+k+k^2)$，**所以**

$$\frac{k}{1+k^2+k^4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k-1)+1}-\frac{1}{k(k+1)+1}\right),$$

故原式$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{0\times1+1}-\frac{1}{1\times2+1}\right)+\left(\frac{1}{1\times2+1}-\frac{1}{2\times3+1}\right)+\cdots\right.$

$\left.+\left(\frac{1}{99\times100+1}-\frac{1}{100\times101+1}\right)\right]$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{10\,101}\right)=\frac{5\,050}{10\,101}.$

1.1.22 ★★ **计算**：$\frac{1+3}{1\times(1+2)}+\frac{1+3+5}{(1+2)\times(1+2+3)}+\frac{1+3+5+7}{(1+2+3)\times(1+2+3+4)}$

$+\cdots+\frac{1+3+5+\cdots+29}{(1+2+3+\cdots+14)\times(1+2+3+\cdots+15)}$.

解析 **原式的第** k **个分数是**

$$\begin{aligned}&\frac{1+3+5+\cdots+(2k+1)}{(1+2+3+\cdots+k)[1+2+3+\cdots+(k+1)]}\\&=\frac{(k+1)^2}{\frac{k(k+1)}{2}\cdot\frac{(k+1)(k+2)}{2}}\\&=\frac{4}{k(k+2)}=2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right),\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ 14.\end{aligned}$$

故原式$=2\times\left(\frac{2}{1\times3}+\frac{2}{2\times4}+\frac{2}{3\times5}+\frac{2}{4\times6}+\cdots+\frac{2}{14\times16}\right)$

$=2\times\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)\right.$

$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{14}-\frac{1}{16}\right)\right]$

$=2\times\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{15}-\frac{1}{16}\right)=\frac{329}{120}.$

1.1.23 ★★ 求下列分式的值：$\frac{1^2}{1^2-100+5\,000}+\frac{2^2}{2^2-200+5\,000}+\cdots+\frac{99^2}{99^2-9\,900+5\,000}$.

解析 由于$\frac{k^2}{k^2-100k+5\,000}+\frac{(100-k)^2}{(100-k)^2-100(100-k)+5\,000}$

$$=\frac{2k^2}{k^2+(100-k)^2}+\frac{2(100-k)^2}{(100-k)^2+k^2}=2,$$

由此，原式$=\left(\frac{1^2}{1^2-100+5\,000}+\frac{99^2}{99^2-9\,900+5\,000}\right)+\cdots$

$$+\left(\frac{49^2}{49^2-4\,900+5\,000}+\frac{51^2}{51^2-5\,100+5\,000}\right)$$

$$+\frac{50^2}{50^2-5\,000+5\,000}$$

$$=2\cdot\frac{99-1}{2}+1=99.$$

评注 对通项的分子分母同乘 2，发现可以首尾配对是本题的关键.

1.1.24 ★ 已知一列数，$\frac{1}{1}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{2}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，…，那么$\frac{7}{10}$是第________个数，第 400 个数是________.

解析 把这些分数按分母分组：

第一组：$\frac{1}{1}$；

第二组：$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{2}$，$\frac{1}{2}$；

第三组：$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{3}$；

……

分组之后，易发现：

(1) 第一、二、三、…组中，分数的个数依次为 1，3，5，…，

(2) 第 k 组的分母都是 k；

(3) 各组中分数的分子是从 1 到 n 再到 1.

利用这三条规律，易知

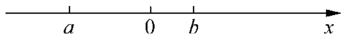
$$\frac{7}{10}\text{是第}(1+3+5+\cdots+17)+7=88(\text{个}),$$

$$\text{或第}(1+3+5+\cdots+19)-6=94(\text{个});$$

第 400 个分数的分母是 20，分子是 1，该分数是$\frac{1}{20}$.

1.2 实数与数轴

1.2.1 ★ 数a、b在数轴上对应的点如图所示，试化简$|a+b|+|b-a|+|b|-|a-|a||$.



解析 由图可知$a<0$，$b>0$，而且由于a点离原点的距离比b点离原点的距离大，因此$a+b<0$. 我们有

$$\begin{aligned}&|a+b|+|b-a|+|b|-|a-|a||\\=&-(a+b)+(b-a)+b-|a-(-a)|\\=&-a-b+b-a+b-(-2a)\\=&b.\end{aligned}$$

评注 本题由图，即数轴上a、b两点的位置，“读”得$a<0$，$b>0$，$a+b<0$等条件，从而去掉绝对值符号，解决问题.

1.2.2 ★ 已知$x<-3$，化简：$|3+|2-|1+x|||$.

解析 这是一个含有多层绝对值符号的问题，可从里往外一层一层地去绝对值符号.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=|3+|2+(1+x)||\ (\text{因为 }1+x<0)\\&=|3+|3+x||=|3-(3+x)|\ (\text{因为 }3+x<0)\\&=|-x|=-x.\end{aligned}$$

1.2.3 ★ 若$x<0$，化简$\dfrac{||x|-2x|}{|x-3|-|x|}$.

解析 因为$x<0$，所以$x-3<0$，从而

$$\begin{aligned}&|x|=-x,\ |x-3|=-(x-3)=3-x,\\&|x-3|-|x|=3-x-(-x)=3,\\&||x|-2x|=|-x-2x|=|-3x|=-3x,\end{aligned}$$

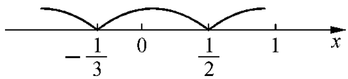
因此，原式$=\dfrac{-3x}{3}=-x$.

评注 根据所给的条件，先确定绝对值符号内的代数式的正负，然后化去绝对值符号. 若有多层绝对值符号，即在一个绝对值符号内又含有绝对值符号（如本例中的分子$||x|-2x|$），通常从最内层开始，逐层向外化去绝对值符号.

1.2.4 ★ 化简：$|3x+1|+|2x-1|$.

解析 本题是两个绝对值和的问题. 解题的关键是如何同时去掉两个绝对值符号. 若分别去掉每个绝对值符号，则是很容易的事. 例如，化简$|3x+1|$，只要考

虑 $3x+1$ 的正负，即可去掉绝对值符号. 这里我们是分 $x \geqslant -\frac{1}{3}$ 与 $x < -\frac{1}{3}$ 两种情况加以讨论的，此时 $x=-\frac{1}{3}$ 是一个分界点. 类似地，对于 $|2x-1|$ 而言，$x=\frac{1}{2}$ 是一个分界点. 为同时去掉两个绝对值符号，我们把两个分界点 $-\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{2}$ 标在数轴上，把数轴分为三个部分（如图所示），即



$$x < -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3} \leqslant x < \frac{1}{2},\ x \geqslant \frac{1}{2}.$$

这样我们就可以分类讨论化简了.

(1) 当 $x < -\frac{1}{3}$ 时，原式 $=-(3x+1)-(2x-1)=-5x$；

(2) 当 $-\frac{1}{3} \leqslant x < \frac{1}{2}$ 时，原式 $=(3x+1)-(2x-1)=x+2$；

(3) 当 $x \geqslant \frac{1}{2}$ 时，原式 $=(3x+1)+(2x-1)=5x$.

即
$$|3x+1|+|2x-1|=\begin{cases}-5x, & \text{当 } x < -\frac{1}{3} \text{ 时；}\\ x+2, & \text{当 } -\frac{1}{3} \leqslant x < \frac{1}{2} \text{ 时；}\\ 5x, & \text{当 } x \geqslant \frac{1}{2} \text{ 时.}\end{cases}$$

评注 解这类题目，可先求出使各个绝对值等于零的变量字母的值，即先求出各个分界点，然后在数轴上标出这些分界点，这样就将数轴分成几个部分，根据变量字母的这些取值范围分类讨论化简，这种方法又称为“零点分段法”.

1.2.5 ★ 设 $a<0$，且 $x \leqslant \frac{a}{|a|}$，试化简 $|x+1|-|x-2|$.

解析 因为 $a<0$，$|a|=-a$，所以 $\frac{a}{|a|}=\frac{a}{-a}=-1$.

$$x \leqslant \frac{a}{|a|}, \text{即 } x \leqslant -1,$$

所以 $x+1 \leqslant 0,\ x-2<0,$

因此
$$\begin{aligned}|x+1|-|x-2| &= -(x+1)-[-(x-2)]\\ &= -x-1+x-2=-3.\end{aligned}$$

1.2.6 ★★ 化简 $||x-1|-2|+|x+1|$.

解析 先找零点.

由 $x-1=0$ 得 $x=1$.

由 $|x-1|-2=0$ 即 $|x-1|=2$，得 $x-1=\pm 2$，从而 $x=-1$ 或 $x=3$.

由 $x+1=0$ 得　$x=-1$.

所以零点共有 -1，1，3 三个. 因此，我们应将数轴分成 4 个部分，

即　$x<-1$，$-1\leqslant x<1$，$1\leqslant x<3$，$x\geqslant 3$.

当 $x<-1$ 时，

$$\begin{aligned}\text{原式}&=|-(x-1)-2|+[-(x+1)]\\&=|-x-1|-x-1\\&=-x-1-x-1=-2x-2.\end{aligned}$$

当 $-1\leqslant x<1$ 时，

$$\begin{aligned}\text{原式}&=|-(x-1)-2|+x+1\\&=|-x-1|+x+1\\&=x+1+x+1=2x+2.\end{aligned}$$

当 $1\leqslant x<3$ 时，

$$\begin{aligned}\text{原式}&=|x-1-2|+x+1\\&=|x-3|+x+1\\&=3-x+x+1=4.\end{aligned}$$

当 $x\geqslant 3$ 时，

$$\begin{aligned}\text{原式}&=|x-1-2|+x+1\\&=|x-3|+x+1\\&=x-3+x+1=2x-2.\end{aligned}$$

即

$$\text{原式}=\begin{cases}-2x-2, & (x<-1)\\ 2x+2, & (-1\leqslant x<1)\\ 4, & (1\leqslant x<3)\\ 2x-2. & (x\geqslant 3)\end{cases}$$

评注　由于本例中含双重绝对值，采用零点分段法时，不要忘了考虑 $||x-1|-2|$ 的零点.

1.2.7 ★★ 若 $2x+|4-5x|+|1-3x|+4$ 的值恒为常数，求 x 该满足的条件及此常数的值.

解析　要使原式对任何数 x 恒为常数，则去掉绝对值符号，化简合并时，必须使含 x 的项相加为零，即 x 的系数之和为零，故本题只有 $2x-5x+3x=0$ 一种情况. 因此必须有 $|4-5x|=4-5x$ 且 $|1-3x|=3x-1$. 故 x 应满足的条件是

$$\begin{cases}4-5x\geqslant 0,\\ 3x-1\geqslant 0.\end{cases}$$

解得
$$\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{4}{5}.$$

此时，原式 $=2x+(4-5x)-(1-3x)+4=7$.

1.2.8 ★★ 如果 $y=|x+1|-2|x|+|x-2|$，且 $-1\leqslant x\leqslant 2$，求 y 的最大值和最小值.

解析 (1) 当 $-1\leqslant x<0$ 时，有

$$y=|x+1|-2|x|+|x-2|=x+1+2x-(x-2)=2x+3,$$

所以 $1\leqslant y<3$.

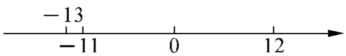
(2) 当 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时，有

$$y=|x+1|-2|x|+|x-2|=x+1-2x-(x-2)=3-2x,$$

所以 $-1\leqslant y\leqslant 3$.

综上所述，y 的最大值是 3，最小值是 -1.

1.2.9 ★★ 求代数式 $|x+11|+|x-12|+|x+13|$ 的最小值.



解析 设 $y=|x+11|+|x-12|+|x+13|$，根据绝对值的几何意义，我们知道 y 表示数轴上对应 x 的点到对应 12、-11、-13 的点的距离之和. 下面分类讨论：

当 $x\geqslant 12$ 时，$y>|x+13|\geqslant 25$；

当 $x\leqslant -13$ 时，$y>|x-12|\geqslant 25$；

当 $-13<x<12$ 时，$y\geqslant|x-12|+|x+13|=25$.

因此，当 $x=-11$ 时，y 取最小值 25.

1.2.10 ★★ 如果 m 为有理数，求代数式 $|m-1|+|m-3|+|m+5|+|m+6|$ 的最小值.

解析 分 $m\leqslant -6$，$-6<m\leqslant -5$，$-5<m\leqslant 1$，$1<m\leqslant 3$，$m>3$ 五个部分进行讨论. 去掉绝对值符号，经过化简得到：

当 $m\leqslant -6$ 时，原式 $=-4m-7$，最小值为 17；

当 $-6<m\leqslant -5$ 时，原式 $=-2m+5$，最小值为 15；

当 $-5<m\leqslant 1$ 时，原式 $=15$. 是一固定值；

当 $1<m\leqslant 3$ 时，原式 $=2m+15$，最小值大于 15；

当 $m>3$ 时，原式 $=4m+7$，最小值大于 15.

综上所述，原代数式的最小值为 15.

此题还可以用绝对值的几何意义求解. 本题就是要在数轴上找一点 x,使它到 -6、-5、1、3 的距离之和最小. 这一点显然应在 -5 与 1 之间(包括这两点)的任意一点,它到 -6、-5、1、3 的距离之和为 15,就是要求的最小值.

1.2.11 ★★ 已知 $|x|\leqslant 1$, $|y|\leqslant 1$,且 $k=|x+y|+|y+1|+|2y-x-4|$,求 k 的最大值和最小值.

解析　由题设条件知:$-1\leqslant x\leqslant 1$, $-1\leqslant y\leqslant 1$. 于是 $y+1\geqslant 0$, $2y-x-4<0$. 所以

(1) 当 $x+y\leqslant 0$ 时,有

$$\begin{aligned}k&=|x+y|+|y+1|+|2y-x-4|\\&=-(x+y)+y+1-(2y-x-4)\\&=-2y+5,\end{aligned}$$

所以 $$3\leqslant k\leqslant 7.$$

(2) 当 $x+y\geqslant 0$ 时,有

$$k=x+y+y+1-(2y-x-4)=2x+5,$$

所以 $$3\leqslant k\leqslant 7.$$

因此,k 的最大值为 7,最小值为 3.

1.2.12 ★★ 已知 $y=|2x+6|+|x-1|-4|x+1|$,求 y 的最大值.

解析　首先使用“零点分段法”将 y 化简,然后在各个取值范围内求出 y 的最大值,再加以比较,从中选出最大者.

有三个分界点:-3, 1, -1.

(1) 当 $x\leqslant -3$ 时,$y=-(2x+6)-(x-1)+4(x+1)=x-1$,由于 $x\leqslant -3$,所以 $y=x-1\leqslant -4$, y 的最大值是 -4.

(2) 当 $-3\leqslant x\leqslant -1$ 时,$y=(2x+6)-(x-1)+4(x+1)=5x+11$,由于 $-3\leqslant x\leqslant -1$,所以 $-4\leqslant 5x+11\leqslant 6$, y 的最大值是 6.

(3) 当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时,$y=(2x+6)-(x-1)-4(x+1)=-3x+3$,由于 $-1\leqslant x\leqslant 1$,所以 $0\leqslant -3x+3\leqslant 6$, y 的最大值是 6.

(4) 当 $x\geqslant 1$ 时,$y=(2x+6)+(x-1)-4(x+1)=-x+1$,由于 $x\geqslant 1$,所以 $1-x\leqslant 0$, y 的最大值是 0.

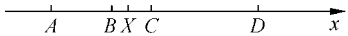
综上可知,当 $x=-1$ 时,y 取得最大值为 6.

1.2.13 ★☆ 设 $a<b<c<d$,求 $|x-a|+|x-b|+|x-c|+|x-d|$ 的最小值.

解析　设 a、b、c、d、x 在数轴上的对应点分别为 A、B、C、D、X,则 $|x-a|$ 表示线段 AX 之长,同理,$|x-b|$, $|x-c|$, $|x-d|$ 分别表示线段 BX, CX, DX 之长,现要求 $|x-a|$, $|x-b|$, $|x-c|$, $|x-d|$ 之和的值最小,就是要在数轴

上找一点 X，使该点到 A、B、C、D 四点距离之和最小.

因为 $a<b<c<d$，所以 A、B、C、D 的排列应如图所示：



所以当 X 在 B、C 之间时，距离和最小，这个最小值为 $AD+BC$，即 $(d-a)+(c-b)$.

1.2.14 ★★ a、b 为有理数，且 $|a+b|=a-b$，试求 ab 的值.

解析　当 $a+b\geqslant 0$ 时，由 $|a+b|=a+b=a-b$ 得 $b=-b$，故此时 $b=0$.

当 $a+b<0$ 时，由 $|a+b|=-(a+b)=-a-b=a-b$，得 $-a=a$，故此时 $a=0$.

所以，不管是 $a+b\geqslant 0$ 还是 $a+b<0$，a、b 中至少有一个为 0，因此，$ab=0$.

1.2.15 ★★ 若 a、b、c 为整数，且 $|a-b|^{19}+|c-a|^{99}=1$，试计算 $|c-a|+|a-b|+|b-c|$ 的值.

解析　因为 a、b、c 均为整数，则 $a-b$，$c-a$ 也应为整数，且 $|a-b|^{19}$，$|c-a|^{99}$ 为两个非负整数，和为 1，所以只能是

$$|a-b|^{19}=0 \text{ 且 } |c-a|^{99}=1, \qquad ①$$

或者

$$|a-b|^{19}=1 \text{ 且 } |c-a|^{99}=0. \qquad ②$$

由 ① 有 $a=b$ 且 $c=a\pm 1$，于是 $|b-c|=|c-a|=1$；由 ② 有 $c=a$ 且 $a=b\pm 1$，于是 $|b-c|=|a-b|=1$. 无论①或②都有

$$|b-c|=1 \text{ 且 } |a-b|+|c-a|=1,$$

所以

$$|c-a|+|a-b|+|b-c|=2.$$

1.2.16 ★★ 将 $1, 2, \cdots, 100$ 这 100 个正整数任意分成 50 组，每组两个数，现将每组的两个数中任一个数记为 a，另一个数记为 b，代入代数式 $\frac{1}{2}(|a-b|+a+b)$ 中进行计算，求出其结果，50 组都代入后可求得 50 个值，求这 50 个值的和的最大值.

解析　代数式 $\frac{1}{2}(|a-b|+a+b)$ 的值就是 a、b 中的较大数，为保证所计算出的 50 个值之和最大，分组时不要把 $51, 52, \cdots, 100$ 这 50 个数中任两个分成一组即可.

对于任意一组中的两个数 a、b，不妨设 $a>b$，则代数式

$$\frac{1}{2}(|a-b|+a+b)=\frac{1}{2}(a-b+a+b)=a.$$

于是这 50 个值之和与大数 a 有关，所以，这 50 个值的和的最大值为

$$51+52+\cdots+100=3\,775.$$

1.2.17 ★★ 设 n 个有理数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足 $|x_i|<1(i=1, 2, \cdots, n)$，且

$$|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|=19+|x_1+x_2+\cdots+x_n|,$$

求 n 的最小值.

解析 先估计 n 的下界. 由 $|x_i|<1$，及 $|x_1+x_2+\cdots+x_n|\geqslant 0$，知

$$n>|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|=19+|x_1+x_2+\cdots+x_n|\geqslant 19,$$

所以，$n\geqslant 20$.

又当 $n=20$ 时，取

$$x_i=\begin{cases}0.95, & i=1, 3, 5, \cdots, 19,\\ -0.95, & i=2, 4, 6, \cdots, 20,\end{cases}$$

满足已知条件，所以，正整数 n 的最小值为 20.

1.3 实数的判定

1.3.1 ★★ 证明循环小数 $2.615\,454\,54\cdots=2.61\dot{5}\dot{4}$ 是有理数.

解析 要说明一个数是有理数，其关键要看它能否写成两个整数比的形式. 设

$$x=2.61\dot{5}\dot{4}, \qquad ①$$

两边同乘以 100 得

$$100x=261.\dot{5}\dot{4}=261.54\dot{5}\dot{4}. \qquad ②$$

②－①得

$$99x=261.54-2.61=258.93,$$

所以

$$x=\frac{25\,893}{9\,900}.$$

既然 x 能写成两个整数比的形式，从而也就证明了 $2.61\dot{5}\dot{4}$ 是有理数.

1.3.2 ★★ 已知 x 是无理数，且 $(x+1)(x+3)$ 是有理数，在上述假定下，分析下面四个结论：

(1) x^2 是有理数；

(2) $(x-1)(x-3)$ 是无理数；

(3) $(x+1)^2$ 是有理数；

(4) $(x-1)^2$ 是无理数.

哪些是正确的？哪些是错误的？

解析 取无理数 $x=\sqrt{3}-2$，这时

$$(x+1)(x+3)=(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)=2$$

是有理数，而 $x^2=(\sqrt{3}-1)^2=4-2\sqrt{3}$ 是无理数，故结论(1)不正确. 仍取 $x=\sqrt{3}-2$，仿上可知结论(3)不正确. 由于

$$\begin{aligned}(x-1)(x-3)&=x^2-4x+3=x^2+4x+3-8x\\&=(x+1)(x+3)-8x,\end{aligned}$$

且 $(x+1)(x+3)$ 是有理数，$8x$ 是无理数，故 $(x-1)(x-3)$ 是无理数，即结论(2)正确. 同样，由

$$(x-1)^2=(x+1)(x+3)-6x-2,$$

知结论(4)正确.

1.3.3 ★★ 求证：$\sqrt{\dfrac{1}{\underbrace{11\cdots1}_{(n-1)个}\underbrace{22\cdots25}_{n个}}}$ 是有理数.

解析 要证明所给的数能表示成 $\dfrac{m}{n}$(m, n 为整数，$n\neq0$)的形式，关键是要证明 $\underbrace{11\cdots1}_{(n-1)个}\underbrace{22\cdots25}_{n个}$ 是完全平方数.

$$\begin{aligned}&\underbrace{11\cdots1}_{(n-1)个}\underbrace{22\cdots25}_{n个}\\&=\underbrace{11\cdots1}_{(n-1)个}\times10^{n+1}+\underbrace{22\cdots2}_{n个}\times10+5\\&=\frac{10^{n-1}-1}{9}\times10^{n+1}+2\times\frac{10^n-1}{9}\times10+5\\&=\frac{1}{9}(10^{2n}-10^{n+1}+2\times10^{n+1}-20+45)\\&=\frac{1}{9}(10^{2n}+10\times10^n+25)=\frac{1}{9}(10^n+5)^2,\end{aligned}$$

所以

$$\sqrt{\frac{1}{\underbrace{11\cdots1}_{(n-1)个}\underbrace{22\cdots25}_{n个}}}=\frac{3}{10^n+5}.$$

因为 10^n+5 与 3 均为整数，所以 $\sqrt{\dfrac{1}{\underbrace{11\cdots1}_{(n-1)个}\underbrace{22\cdots25}_{n个}}}$ 是有理数.

1.3.4 ★★ 证明 $\sqrt{2}$ 是无理数.

解析 要证明一个实数为无限不循环小数是一件极难办到的事. 由于有理数

与无理数共同组成了实数集,且二者是矛盾的两个对立面,所以,判定一个实数是无理数时,常常采用反证法.

假设$\sqrt{2}$不是无理数,则$\sqrt{2}$必为有理数. 设$\sqrt{2}=\frac{p}{q}$(p、q是互质的正整数),两边平方有

$$p^2=2q^2, \qquad ①$$

所以p一定是偶数. 设$p=2m$(m是正整数),代入①得

$$4m^2=2q^2,\ q^2=2m^2,$$

所以q也是偶数. p、q均为偶数和p与q互质矛盾,所以$\sqrt{2}$不是有理数,于是$\sqrt{2}$是无理数.

评注　只要p是质数,$\sqrt{p}$就一定是无理数,这个结论的证明并不困难,请同学们自己完成.

1.3.5 ★★ 设n是正整数,$\sqrt{n}$是有理数,则n必是完全平方数;反过来,如果n是完全平方数,则$\sqrt{n}$是有理数(而且是正整数).

解析　第二个结论显然成立,下面证明第一个结论. 因$\sqrt{n}$是有理数,故可设$\sqrt{n}=\frac{q}{p}$(p、q为互质的正整数),从而

$$np^2=q^2. \qquad ①$$

我们知道,任何一个平方数的质因数分解式中,每一个质因数的指数都是正偶数(反过来也成立);而非平方(自然)数的质因数分解式中,至少有一个质因数的指数是奇数. 由此可见,如果n不是完全平方数,那么无论n与p^2有无相同的质因数,在np^2的质因数分解式中,至少有一个质因数的指数是奇数,即np^2不是平方数.

这样①式不可能成立. 所以,n是完全平方数.

评注　本题是一个重要的结论,它可作为定理使用,读者应熟悉它. 有了这个结论,可以立即断定$\sqrt{7}$,$\sqrt{10}$,$\sqrt{22}$等都是无理数.

1.3.6 ★★ 设a、b及$\sqrt{a}+\sqrt{b}$都是整数,证明:$\sqrt{a}$及$\sqrt{b}$都是整数.

解析　由于负数不能开平方,故由题设知a,b都是非负整数. 若$a=0$或$b=0$,易知结论成立. 若a,b都是正整数,由$\sqrt{b}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})-\sqrt{a}$,两边平方得

$$b=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-2\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})+a,$$

所以

$$\sqrt{a}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2+a-b}{2(\sqrt{a}+\sqrt{b})}.$$

由所设 a、b 及 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 都是整数,故 $\sqrt{a}$ 是有理数.从而 a 是平方数,故 $\sqrt{a}$ 是整数,从而 $\sqrt{b}$ 是整数.

1.3.7 ★★ 求满足等式

$$\sqrt[3]{25+\sqrt{2}x}=1+\sqrt{2}y$$

的有理数 x、y.

解析 把原式两边立方,得

$$25+\sqrt{2}x=(1+6y^2)+\sqrt{2}(3y+2y^3).$$

因 x, y 是有理数,故

$$\begin{cases}1+6y^2=25,\\ x=3y+2y^3.\end{cases}$$

解得 $x=22$, $y=2$ 或 $x=-22$, $y=-2$,易检验它们都满足原式.

1.3.8 ★★ 求满足条件

$$\sqrt{a-2\sqrt{6}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$$

的正整数 a, x, y.

解析 将原式两边平方得

$$a-2\sqrt{6}=x+y-2\sqrt{xy}. \qquad ①$$

显然,$a-2\sqrt{6}$ 是无理数.假设 $\sqrt{xy}$ 是有理数,则 $x+y-2\sqrt{xy}$ 是有理数,这与①式矛盾,所以 $\sqrt{xy}$ 必为无理数.

由①式变形为

$$x+y-a=2(\sqrt{xy}-\sqrt{6}).$$

假设 $x+y-a\neq 0$,则 $\sqrt{xy}-\sqrt{6}$ 必为非零有理数,设为 $k(k\neq 0)$,即 $\sqrt{xy}-\sqrt{6}=k$, 所以有

$$\sqrt{xy}=\sqrt{6}+k,$$

两边平方得

$$xy=6+2k\sqrt{6}+k^2,$$

所以

$$2k\sqrt{6}=xy-6-k^2.$$

因为 $k\neq 0$,所以 $2k\sqrt{6}$ 是无理数,而 $xy-6-k^2$ 是有理数, 矛盾.所以

$$x+y-a=0 \text{ 且 } \sqrt{xy}-\sqrt{6}=0.$$

所以
$$\begin{cases} x+y=a, \\ xy=6. \end{cases}$$

又因为$\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{a-2\sqrt{6}}>0$,所以$x>y$,所以满足条件的正整数为:$x=6$,$y=1$,$a=7$或$x=3$,$y=2$,$a=5$.

1.3.9 ★★ 若$a_1+b_1\alpha=a_2+b_2\alpha$(其中$a_1$、$a_2$、$b_1$、$b_2$为有理数,$\alpha$为无理数),则$a_1=a_2$,$b_1=b_2$,反之,亦成立.

解析 设法将等式变形,利用有理数不能等于无理数来证明.

将原式变形为$(b_1-b_2)\alpha=a_2-a_1$.若$b_1\neq b_2$,则

$$\alpha=\frac{a_2-a_1}{b_1-b_2}.$$

因为α是无理数,而$\frac{a_2-a_1}{b_1-b_2}$是有理数,矛盾.所以必有$b_1=b_2$,进而有$a_1=a_2$.

反之,显然成立.

评注 本例的结论是一个常用的重要运算性质.

1.3.10 ★★ 设a与b是两个不相等的有理数,试判断实数$\frac{a+\sqrt{3}}{b+\sqrt{3}}$是有理数还是无理数,并说明理由.

解析 假设$\frac{a+\sqrt{3}}{b+\sqrt{3}}$是有理数,设其为$A$,即

$$\frac{a+\sqrt{3}}{b+\sqrt{3}}=A.$$

整理得
$$a+\sqrt{3}=Ab+A\sqrt{3}.$$

由1.3.9知
$$a=Ab,\ 1=A,$$

即$a=b$,这与已知$a\neq b$矛盾.所以原假设$\frac{a+\sqrt{3}}{b+\sqrt{3}}$是有理数错误,故$\frac{a+\sqrt{3}}{b+\sqrt{3}}$是无理数.

评注 本例并未给出确定结论,需要解题者自己发现正确的结论.解这样的问题时,可以先找到一个立足点,如本例以$\frac{a+\sqrt{3}}{b+\sqrt{3}}$为有理数作为立足点,以其作为推理的基础.

1.3.11 ★★ 已知a、b是两个任意有理数，且$a<b$，求证：a与b之间存在着无穷多个有理数(即有理数集具有稠密性).

解析 只要构造出符合条件的有理数，题目即可被证明.

因为 $a<b$，所以 $2a<a+b<2b$，所以

$$a<\frac{a+b}{2}<b.$$

设 $a_1=\frac{a+b}{2}$，a_1 显然是有理数(因为 a、b 为有理数). 因为 $a_1<b$，所以，同理可证 $a_1<\frac{a_1+b}{2}<b$. 设 $a_2=\frac{a_1+b}{2}$，a_2 显然也是有理数. 依此类推，设 $a_{n+1}=\frac{a_n+b}{2}$，n 为任意正整数，则有 $a<a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots<b$，且 a_n 为有理数，所以在 a 和 b 之间存在无穷多个有理数.

1.3.12 ★★ 已知在等式 $\frac{ax+b}{cx+d}=S$ 中，a、b、c、d 都是有理数，x 是无理数. 问：

(1) 当 a、b、c、d 满足什么条件时，S 是有理数；

(2) 当 a、b、c、d 满足什么条件时，S 是无理数.

解析 (1) 当 $a=c=0$，$d\neq 0$ 时，$S=\frac{b}{d}$ 为有理数.

当 $c\neq 0$ 时，有

$$S=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c(cx+d)},$$

所以，只有当 $bc-ad=0$，即 $ad=bc$ 时，S 为有理数.

故当 $a=c=0$，且 $d\neq 0$；或 $c\neq 0$，且 $ad=bc$ 时，S 为有理数.

(2) 当 $c=0$，$d\neq 0$，$a\neq 0$ 时，$S=\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}$ 为无理数.

当 $c\neq 0$ 时，有

$$S=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c(cx+d)},$$

故只有当 $bc-ad\neq 0$，即 $ad\neq bc$ 时，S 为无理数.

所以，当 $c=0$，$a\neq 0$，$d\neq 0$；或 $c\neq 0$，$ad\neq bc$ 时，S 为无理数.

1.3.13 ★★ 已知 a、b 是两个任意有理数，且 $a<b$，问是否存在无理数 α，使得 $a<\alpha<b$ 成立？

解析 因为 $a<b$，$\sqrt{2}-1>0$，所以

$$(\sqrt{2}-1)a<(\sqrt{2}-1)b,$$

即
$$\sqrt{2}a<(\sqrt{2}-1)b+a. \quad ①$$
又因为 $a<b=b+\sqrt{2}b-\sqrt{2}b$, 所以
$$a+\sqrt{2}b-b<\sqrt{2}b,$$
即
$$(\sqrt{2}-1)b+a<\sqrt{2}b. \quad ②$$
由①, ②有
$$\sqrt{2}a<(\sqrt{2}-1)b+a<\sqrt{2}b,$$
所以
$$a<\frac{(\sqrt{2}-1)b+a}{\sqrt{2}}<b.$$
取 $\alpha=\dfrac{(\sqrt{2}-1)b+a}{\sqrt{2}}=\dfrac{2b+\sqrt{2}(a-b)}{2}=b+\dfrac{(a-b)}{2}\cdot\sqrt{2}$.

因为 b、$\dfrac{a-b}{2}$ 是有理数,且$\dfrac{a-b}{2}\neq 0$,所以 $b+\dfrac{a-b}{2}\cdot\sqrt{2}$ 是无理数,即存在无理数 α,使得 $a<\alpha<b$ 成立.

1.3.14 ★★ 已知数 $\sqrt{14}$ 的小数部分是 b,求
$$b^4+12b^3+37b^2+6b-20$$
的值.

解析　因为无理数是无限不循环小数,所以不可能把一个无理数的小数部分一位一位确定下来,这类涉及无理数小数部分的计算题,往往是先估计它的整数部分(这是容易确定的),然后再寻求其小数部分的表示方法.

因为 $9<14<16$,即 $3<\sqrt{14}<4$,所以 $\sqrt{14}$ 的整数部分为 3. 设 $\sqrt{14}=3+b$, 两边平方得
$$14=9+6b+b^2,$$
所以
$$b^2+6b=5.$$
$$\begin{aligned}&b^4+12b^3+37b^2+6b-20\\=&(b^4+2\cdot 6b^3+36b^2)+(b^2+6b)-20\\=&(b^2+6b)^2+(b^2+6b)-20\\=&5^2+5-20=10.\end{aligned}$$

1.3.15 ★★ 已知:p、q 是有理数, $x=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$,且满足 $x^3-px+q=0$,试求 $p-q$ 的值.

解析　将 $x=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 代入方程　$x^3-px+q=0$, 得

$$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^3-p\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2}+q=0,$$

化简,得$(2-p)\sqrt{5}+4-p+2q=0$.

因为 p、q 都是有理数,则

$$\begin{cases}2-p=0,\\4-p+2q=0.\end{cases}$$

解方程组,得 $\begin{cases}p=2,\\q=-1.\end{cases}$ 所以 $p-q=3$.

评注 本题应用到了性质:若 a、b 为有理数,p 为无理数,$a+bp=0\Leftrightarrow a=b=0$.

1.3.16 ★★ 若 n 为正整数,求证:$\sqrt{n^4+2n^3+2n^2+2n+1}$ 必为无理数.

解析 只需证 $n^4+2n^3+2n^2+2n+1$ 为非完全平方数.而这只要证明它位于两个相邻的正整数的平方之间即可.

因为 $n^4+2n^3+2n^2+2n+1=(n^4+2n^3+n^2)+(n^2+2n+1)$

$$>n^4+2n^3+n^2$$
$$=(n^2+n)^2,$$

又因为
$$n^4+2n^3+2n^2+2n+1<n^4+2n^3+3n^2+2n+1$$
$$=n^4+n^2+1+2n^3+2n^2+2n=(n^2+n+1)^2,$$

所以 $(n^2+n)^2<n^4+2n^3+2n^2+2n+1<(n^2+n+1)^2$.

而$(n^2+n)^2$与$(n^2+n+1)^2$是两个相邻的整数的完全平方数,它们之间一定没有完全平方数.因而对任意的正整数 n,数 $n^4+2n^3+2n^2+2n+1$ 不可能是完全平方数,即 $\sqrt{n^4+2n^3+2n^2+2n+1}$ 必为无理数.

1.3.17 ★★ 若 m、n 是正整数,a、d 是实数,问是否存在三个不同的素数 p、q、r,满足$\sqrt[3]{p}=a$,$\sqrt[3]{q}=a+md$,$\sqrt[3]{r}=a+nd$?

解析 假设存在三个不同的素数 p、q、r,满足 $\sqrt[3]{p}=a$,$\sqrt[3]{q}=a+md$,$\sqrt[3]{r}=a+nd$.其中,a、d 为实数,m、n 是正整数.

消去 a、d,得

$$\frac{\sqrt[3]{q}-\sqrt[3]{p}}{\sqrt[3]{r}-\sqrt[3]{p}}=\frac{m}{n},$$

即
$$m\sqrt[3]{r}-n\sqrt[3]{q}=(m-n)\sqrt[3]{p}. \qquad ①$$

①式的两边立方,得

$$m^3r-n^3q-3mn\sqrt[3]{rq}(m\sqrt[3]{r}-n\sqrt[3]{q})=(m-n)^3p. \qquad ②$$

将①式中的$m\sqrt[3]{r}-n\sqrt[3]{q}$代入②式，得

$$3mn(m-n)\sqrt[3]{pqr}=m^3r-n^3q-(m-n)^3p.$$

但是$\sqrt[3]{pqr}$是无理数，故上面等式有矛盾. 因此，不存在三个不同的素数p、q、r，满足$\sqrt[3]{p}=a$，$\sqrt[3]{q}=a+md$，$\sqrt[3]{r}=a+nd$.

1.3.18 ☆☆ 设a_n是$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$的个位数字，$n=1, 2, 3, \cdots$，求证：$0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots$是有理数.

解析 有理数的另一个定义是循环小数，即凡有理数都是循环小数，反之循环小数必为有理数. 所以，要证$0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots$是有理数，只要证它为循环小数. 因此本题我们从寻找它的循环节入手.

计算a_n的前若干个值，寻找规律：1, 5, 4, 0, 5, 1, 0, 4, 5, 5, 6, 0, 9, 5, 0, 6, 5, 9, 0, 0, 1, 5, 4, 0, 5, 1, 0, 4, …. 发现：$a_{20}=0$，$a_{21}=a_1$，$a_{22}=a_2$，$a_{23}=a_3$，…，于是猜想：$a_{k+20}=a_k$，若此式成立，说明$0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$是由20个数字组成循环节的循环小数，即

$$0.a_1a_2\cdots a_n\cdots=0.\dot{1}54\,051\,045\,560\,950\,659\,0\dot{0}.$$

下面证明$a_{k+20}=a_k$.

令$f(n)=1^2+2^2+\cdots+n^2$，当$f(n+20)-f(n)$是10的倍数时，表明$f(n+20)$与$f(n)$有相同的个位数，而

$$\begin{aligned}&f(n+20)-f(n)\\=&(n+1)^2+(n+2)^2+\cdots+(n+20)^2\\=&10(2n^2+42\cdot n)+(1^2+2^2+\cdots+20^2).\end{aligned}$$

由前面计算的若干值可知：$1^2+2^2+\cdots+20^2$是10的倍数，故$a_{k+20}=a_k$成立，所以$0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$是一个有理数.

1.3.19 ★★ 已知$x+y$、$x-y$、xy、$\dfrac{x}{y}$均为有理数，如果它们中有三个数相等，求x、y的值.

解析 依题意，$y\neq 0$，否则$\dfrac{x}{y}$无意义.

若$x+y=x-y$，则$y=0$，矛盾.

所以$x+y\neq x-y$.

若$x=0$，则由$x+y=xy$或$x-y=xy$都得到$y=0$，矛盾.

所以$xy\neq 0$.

因此，三个相等的代数式只能是：

(1)$x+y=xy=\dfrac{x}{y}$或(2)$x-y=xy=\dfrac{x}{y}$.

由$\begin{cases} xy = \dfrac{x}{y}, \\ x \neq 0 \end{cases}$得 $y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$.

当 $y = 1$ 时，由(1)得 $x + 1 = x$，矛盾；

由(2)得 $x - 1 = x$，矛盾.

所以 $y \neq 1$.

当 $y = -1$ 时，由(1)得 $x - 1 = -x$，$2x = 1$，$x = \dfrac{1}{2}$.

由(2)得 $x + 1 = -x$，$2x = -1$，$x = -\dfrac{1}{2}$.

所以 $x = \pm\dfrac{1}{2}$，$y = -1$.

1.3.20 ★★ $[x]$表示不超过实数 x 的最大整数，令$\{x\} = x - [x]$.

(1) 找出一个实数 x，满足$\{x\} + \left\{\dfrac{1}{x}\right\} = 1$；

(2) 证明：满足上述等式的 x，都不是有理数.

解析 设$[x] = m$，$\{x\} = \alpha$，$\left[\dfrac{1}{x}\right] = n$，$\left\{\dfrac{1}{x}\right\} = \beta$，则 m、n 是整数，$0 \leqslant \alpha$，$\beta < 1$. 由题设 $\alpha + \beta = 1$，所以 $x + \dfrac{1}{x} = m + n + \alpha + \beta = m + n + 1$，$x^2 - (m + n + 1)x + 1 = 0$，

$$x = \frac{1}{2}\left(m + n + 1 \pm \sqrt{(m + n + 1)^2 - 4}\right).$$

令 $m + n + 1 = 3$，则 $x = \dfrac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$，再验证它满足$\{x\} + \left\{\dfrac{1}{x}\right\} = 1$.

(1) 取 $x = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$，则$\dfrac{1}{x} = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$，于是$\{x\} = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2} - 2 = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$，$\left\{\dfrac{1}{x}\right\} = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$，所以

$$\{x\} + \left\{\frac{1}{x}\right\} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 1.$$

(2) 设 $x = m + \alpha$，$\dfrac{1}{x} = n + \beta$，其中 m、n 是整数，$0 \leqslant \alpha$，$\beta < 1$. 则 $\alpha + \beta = 1$，$x + \dfrac{1}{x} = m + n + 1$. 于是

$$x^2 - (m + n + 1)x + 1 = 0,$$

$$x=\frac{1}{2}\left(m+n+1\pm\sqrt{(m+n+1)^2-4}\right).$$

当$(m+n+1)^2=4$时,$x=\pm 1$,均不满足$\{x\}+\left\{\frac{1}{x}\right\}=1$.

当$(m+n+1)^2>4$时,若

$$(m+n+1)^2-4=k^2,$$

其中k为正整数,则

$$(m+n+1-k)(m+n+1+k)=4.$$

由于$m+n+1-k<m+n+1+k$,且$m+n+1-k$与$m+n+1+k$同奇偶,所以

$$\begin{cases}m+n+1-k=-2,\\ m+n+1+k=-2\end{cases}\text{或}\begin{cases}m+n+1-k=2,\\ m+n+1+k=2\end{cases}$$

均不可能.故$(m+n+1)^2-4$不是完全平方数,从而x是无理数.

1.3.21 ☆☆ 设a、b是实数,对所有正整数$n(\geqslant 2)$,a^n+b^n都是有理数,证明:$a+b$是有理数.

解析 由题意,a^2+b^2,a^3+b^3,a^4+b^4,…都是有理数.而a^n+b^n有如下"递推关系":

$$a^{n+2}+b^{n+2}=(a+b)(a^{n+1}+b^{n+1})-ab(a^n+b^n),$$

所以

$$a^4+b^4=(a+b)(a^3+b^3)-ab(a^2+b^2),$$
$$a^5+b^5=(a+b)(a^4+b^4)-ab(a^3+b^3),$$

从中解出$a+b$即可.

设$x=a+b$,$y=ab$,则有

$$a^4+b^4=(a^3+b^3)x-(a^2+b^2)y,$$
$$a^5+b^5=(a^4+b^4)x-(a^3+b^3)y,$$

消去y,得

$$\left[(a^2+b^2)(a^4+b^4)-(a^3+b^3)^2\right]x$$
$$=(a^2+b^2)(a^5+b^5)-(a^3+b^3)(a^4+b^4),$$

所以,当$(a^2+b^2)(a^4+b^4)-(a^3+b^3)^2\neq 0$,即$ab(a-b)\neq 0$时,

$$x=\frac{(a^2+b^2)(a^5+b^5)-(a^3+b^3)(a^4+b^4)}{(a^2+b^2)(a^4+b^4)-(a^3+b^3)^2}$$

是有理数.

当 $ab(a-b)=0$ 时，若 a、b 全为 0，则结论成立；若 a、b 中恰有一个为 0，不妨设 $a=0$，则 $b=\dfrac{a^3+b^3}{a^2+b^2}$ 为有理数，从而 $a+b=b$ 为有理数；若 $a-b=0$，且 a、b 均不为 0，则

$$a+b=\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2-ab}=\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2+\dfrac{(a-b)^2-(a^2+b^2)}{2}}=\frac{2(a^3+b^3)}{a^2+b^2}$$

是有理数.

从而命题得证.

评注　本题分析中给出的递推关系：$a^{n+2}+b^{n+2}=(a+b)(a^{n+1}+b^{n+1})-ab(a^n+b^n)$ 非常重要. 遇到涉及 a^n+b^n 类型的问题时，利用这一递推关系，可以帮助我们解题.

1.3.22 ★★ 设 A 是给定的正有理数.

(1) 若 A 是一个三边长都是有理数的直角三角形的面积，证明：一定存在 3 个正有理数 x、y、z，使得

$$x^2-y^2=y^2-z^2=A;$$

(2) 若存在 3 个正有理数 x、y、z，满足

$$x^2-y^2=y^2-z^2=A,$$

证明：存在一个三边长都是有理数的直角三角形，它的面积等于 A.

解析　(1) 设 a、b、c 是某个直角三角形的三边长，a、b、c 都是有理数，且 $a^2+b^2=c^2$，$\dfrac{1}{2}ab=A$.

若 $a=b$，则 $2a^2=c^2$，$\dfrac{c}{a}=\sqrt{2}$. 这与 a、b、c 都是有理数的假定矛盾，故 $a\neq b$.

不妨设 $a<b$，取 $x=\dfrac{a+b}{2}$，$y=\dfrac{c}{2}$，$z=\dfrac{b-a}{2}$，则 x、y、z 都是正有理数，且

$$x^2-y^2=\frac{(a+b)^2-c^2}{4}=\frac{1}{2}ab=A,$$

$$y^2-z^2=\frac{c^2-(b-a)^2}{4}=\frac{1}{2}ab=A.$$

(2) 设三个正有理数 x、y、z 满足 $x^2-y^2=y^2-z^2=A$，则 $x>y>z$. 取 $a=x-z$，$b=x+z$，$c=2y$，则 a、b、c 都是正有理数，

且
$$a^2+b^2=2(x^2+z^2)=4y^2=c^2,$$

$$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}(x^2-z^2)=\frac{1}{2}[(x^2-y^2)+(y^2-z^2)]=A$$

即存在一个三边长 a、b、c 都是正有理数的直角三角形，它的面积等于 A.

第2章　代　数　式

2.1　整式的运算

2.1.1 ★ **化简** $(1+x)[1-x+x^2-x^3+\cdots+(-x)^{n-1}]$，**其中** n **为大于** 1 **的整数.**

解析　原式$=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-x)^{n-1}$
$+x-x^2+x^3+\cdots-(-x)^{n-1}+(-x)^n$
$=1+(-x)^n.$

评注　本例可推广为一个一般的形式：

$$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})=a^n-b^n.$$

2.1.2 ★ **计算**

(1) $(a-b+c-d)(c-a-d-b)$；

(2) $(x+2y)(x-2y)(x^4-8x^2y^2+16y^4)$.

解析　(1) 这两个多项式对应项或者相同或者互为相反数，所以可考虑应用平方差公式，分别把相同项结合，相反项结合.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=[(c-b-d)+a][(c-b-d)-a]=(c-b-d)^2-a^2\\&=c^2+b^2+d^2+2bd-2bc-2cd-a^2.\end{aligned}$$

(2) $(x+2y)(x-2y)$的结果是x^2-4y^2，这个结果与多项式$x^4-8x^2y^2+16y^4$相乘时，不能直接应用公式，但

$$x^4-8x^2y^2+16y^4=(x^2-4y^2)^2$$

与前两个因式相乘的结果 x^2-4y^2 相乘时就可以利用差的立方公式了.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(x^2-4y^2)(x^2-4y^2)^2=(x^2-4y^2)^3\\&=(x^2)^3-3(x^2)^2(4y^2)+3x^2(4y^2)^2-(4y^2)^3\\&=x^6-12x^4y^2+48x^2y^4-64y^6.\end{aligned}$$

2.1.3 ★ **设** $g(x)=3x^2-2x+1$，$f(x)=x^3-3x^2-x-1$，**求用** $g(x)$**去除** $f(x)$**所得的商** $q(x)$**及余式** $r(x)$.

解析 1　用普通的竖式除法

$$
\begin{array}{rr@{}lr}
 & & \frac{1}{3}x-\frac{7}{9} & \cdots\cdots q(x) \\ \cline{3-3}
g(x)\cdots\cdots 3x^2-2x+1 & \big) & x^3-3x^2-x-1 & \cdots\cdots f(x) \\
 & & x^3-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x & \\ \cline{3-3}
 & & -\frac{7}{3}x^2-\frac{4}{3}x-1 & \\
 & & -\frac{7}{3}x^2+\frac{14}{9}x-\frac{7}{9} & \\ \cline{3-3}
 & & -\frac{26}{9}x-\frac{2}{9} & \cdots\cdots r(x)
\end{array}
$$

因此,所求的商 $q(x)=\frac{1}{3}x-\frac{7}{9}$,余式 $r(x)=-\frac{26}{9}x-\frac{2}{9}$.

解析 2 用待定系数法

由于 $f(x)$为 3 次多项式,首项系数为 1,而 $g(x)$为 2 次,首项系数为 3,故商 $q(x)$必为 1 次,首项系数必为$\frac{1}{3}$,而余式次数小于 2,于是可设商式 $q(x)=\frac{1}{3}x+a$,余式 $r(x)=bx+c$.

根据 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$,得

$$
\begin{aligned}
& x^3-3x^2-x-1 \\
=\ & (3x^2-2x+1)\left(\frac{1}{3}x+a\right)+(bx+c) \\
=\ & x^3+\left(3a-\frac{2}{3}\right)x^2+\left(b-2a+\frac{1}{3}\right)x+(a+c).
\end{aligned}
$$

比较两端系数,得

$$
\begin{cases}
3a-\frac{2}{3}=-3, \\
b-2a+\frac{1}{3}=-1, \\
a+c=-1.
\end{cases}
$$

解得 $a=-\frac{7}{9}$, $b=-\frac{26}{9}$, $c=-\frac{2}{9}$,故商式 $q(x)=\frac{1}{3}x-\frac{7}{9}$,余式 $r(x)=-\frac{26}{9}x-\frac{2}{9}$.

2.1.4 ★ 已知当 $x=7$ 时,代数式 ax^5+bx-8 的值为 4,求当 $x=7$ 时,代数式$\frac{a}{2}x^5+\frac{b}{2}x+3$ 的值.

解析 比较两个代数式,发现它们的相同与不同.

当 $x=7$ 时,

$$\frac{a}{2}x^5+\frac{b}{2}x+3=\frac{1}{2}(ax^5+bx-8)+7$$
$$=\frac{1}{2}\times 4+7=9.$$

2.1.5 ★ 若 $x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$,且 $x+y+z=12$,试求 $2x+3y+4z$ 的值.

解析 $y=2x$, $z=3x$. 代入

$$x+y+z=12$$

得 $x=2$,故 $y=4$, $z=6$, 所以 $2x+3y+4z=40$.

2.1.6 ★★ 试确定 a 和 b,使 x^4+ax^2-bx+2 能被 x^2+3x+2 整除.

解析 由于 $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$,因此,若设

$$f(x)=x^4+ax^2-bx+2,$$

假如 $f(x)$能被 x^2+3x+2 整除,则 $x+1$ 和 $x+2$ 必是 $f(x)$ 的因式,因此,当 $x=-1$ 时,$f(-1)=0$,即

$$1+a+b+2=0, \quad ①$$

当 $x=-2$ 时,$f(-2)=0$,即

$$16+4a+2b+2=0, \quad ②$$

由①, ②联立,则有

$$\begin{cases} a=-6, \\ b=3. \end{cases}$$

2.1.7 ★ 若 $(x-1)(x+1)(x+5)=x^3+bx^2+cx+d$,求 $b+d$ 的值.

解析 $(x-1)(x+1)(x+5)=(x^2-1)(x+5)$
$$=x^3+5x^2-x-5,$$

所以 $$b=5,\ d=-5.$$
$$b+d=0.$$

2.1.8 ★ 将 $3x^2+5x-7$ 表示成 $a(x-2)^2+b(x-2)+c$ 的形式.

解析 $3x^2+5x-7=3[(x-2)+2]^2+5[(x-2)+2]-7$
$$=3(x-2)^2+17(x-2)+15.$$

2.1.9 ★ 已知 $a^2+a-1=0$,求 a^3+2a^2+2 的值.

解析 1 由 $a^2+a=1$,有

$$a^3+2a^2+2=(a^3+a^2)+a^2+2=a(a^2+a)+a^2+2$$

$$=(a+a^2)+2=1+2=3.$$

解析 2 由 $a^2=1-a$，有

$$\begin{aligned}a^3+2a^2+2&=a^2(a+2)+2=(1-a)(a+2)+2\\&=2-a-a^2+2=4-a-a^2=4-a-(1-a)\\&=4-a-1+a=3.\end{aligned}$$

注意 解析 1 是应用拆项法;解析 2 是应用降次法. 这两种方法在整式恒等变形中常用.

2.1.10 ★★ 已知 $x+y=m$，$x^3+y^3=n$，$m\neq 0$，求 x^2+y^2 的值.

解析 因为 $x+y=m$，所以

$$m^3=(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)=n+3mxy,$$

所以
$$xy=\frac{m^2}{3}-\frac{n}{3m}.$$

所以

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=m^2-2\left(\frac{m^2}{3}-\frac{n}{3m}\right)=\frac{m^2}{3}+\frac{2n}{3m}.$$

2.1.11 ★★ 若 $x^2+xy+y=14$，$y^2+xy+x=28$，求 $x+y$ 的值.

解析 把两个方程相加，得 $(x+y)^2+(x+y)=42$，于是有

$$(x+y-6)(x+y+7)=0,$$

故 $x+y=6$ 或 $x+y=-7$.

2.1.12 ★★ 已知 $x+y=1$，$x^2+y^2=2$. 求 x^7+y^7 的值.

解析 因为 $x^2+y^2=2$，所以 $1=(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=2+2xy$，从而 $xy=-\frac{1}{2}$. 所以

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=1^3-3\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times 1=\frac{5}{2}.$$

$$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=2^2-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{7}{2}.$$

故 $x^7+y^7=(x^3+y^3)(x^4+y^4)-x^3y^3(x+y)=\frac{5}{2}\times\frac{7}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)^3\times 1=\frac{71}{8}$.

2.1.13 ★★ 已知 $a=1\,999x+2\,000$，$b=1\,999x+2\,001$，$c=1\,999x+2\,002$，求多项式 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ 的值.

解析 由 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$，

又因为 $a-b=-1$，$b-c=-1$，$c-a=2$，故

$$原式=\frac{1}{2}[(-1)^2+(-1)^2+2^2]=3.$$

2.1.14 ★★ 已知实数 a、b、x、y 满足 $a+b=x+y=2$，$ax+by=5$，求 $(a^2+b^2)xy+ab(x^2+y^2)$ 的值.

解析 由 $a+b=x+y=2$，得 $(a+b)(x+y)=ax+by+ay+bx=4$.

因为 $ax+by=5$，所以 $ay+bx=-1$.

因而，$(a^2+b^2)xy+ab(x^2+y^2)=(ay+bx)(ax+by)=-5$.

2.1.15 ★★ 已知 $(3x-1)^7=a_7x^7+a_6x^6+a_5x^5+\cdots+a_1x+a_0$，试求 $a_7+a_6+a_5+\cdots+a_1+a_0$ 的值.

解析 多项式 $f(x)$ 的系数和，就是 $f(1)$.

$$a_7+a_6+a_5+\cdots+a_1+a_0=(3\times1-1)^7=2^7=128.$$

2.1.16 ★★ 求一个关于 x 的二次三项式 $f(x)$，它被 $x-1$ 除余 2；被 $(x-2)$ 除余 8；并且被 $x+1$ 整除.

解析 设这个二次三项式为

$$f(x)=ax^2+bx+c.$$

则

$$\begin{cases}f(1)=a+b+c=2, & ①\\ f(2)=4a+2b+c=8, & ②\\ f(-1)=a-b+c=0, & ③\end{cases}$$

①－③得 $$b=1.$$

代入②、③得

$$\begin{cases}4a+c=6, & ④\\ a+c=1, & ⑤\end{cases}$$

④－⑤得

$$a=\frac{5}{3},$$

代入⑤得 $$c=-\frac{2}{3}.$$

所求二次三项式为 $\frac{5}{3}x^2+x-\frac{2}{3}$.

2.1.17 ★ 未知数 x、y 满足

$$(x^2+y^2)m^2-2y(x+n)m+y^2+n^2=0,$$

其中 m,n 表示非零已知数,求 x、y 的值.

解析　两个未知数,一个方程,对方程左边的代数式进行恒等变形,经过配方之后,看是否能化成非负数和为零的形式.

将已知等式变形为

$$m^2x^2+m^2y^2-2mxy-2mny+y^2+n^2=0,$$
$$(m^2x^2-2mxy+y^2)+(m^2y^2-2mny+n^2)=0,$$

即
$$(mx-y)^2+(my-n)^2=0.$$

所以
$$\begin{cases}mx-y=0,\\my-n=0.\end{cases}$$

因为 $m\neq 0$,所以 $y=\frac{n}{m}$, $x=\frac{n}{m^2}$.

2.1.18 ★★ 已知 x、y、z 满足 $x+y+z=xyz$,求证:

$$x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-x^2)(1-z^2)+z(1-x^2)(1-y^2)=4xyz.$$

解析　因为 $x+y+z=xyz$,所以

$$\begin{aligned}\text{左边}&=x(1-z^2-y^2+y^2z^2)+y(1-z^2-x^2+x^2z^2)\\&\quad+z(1-y^2-x^2+x^2y^2)\\&=(x+y+z)-xz^2-xy^2+xy^2z^2-yz^2-yx^2+yx^2z^2\\&\quad-zy^2-zx^2+zx^2y^2\\&=xyz-xy(y+x)-xz(x+z)-yz(y+z)\\&\quad+xyz(xy+yz+zx)\\&=xyz-xy(xyz-z)-xz(xyz-y)-yz(xyz-x)\\&\quad+xyz(xy+yz+zx)\\&=xyz+xyz+xyz+xyz\\&=4xyz=\text{右边}.\end{aligned}$$

2.1.19 ★ 已知 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$,证明 $a=b=c$.

解析　因为 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$,

所以
$$2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)=0,$$

即
$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0,$$

因此
$$a-b=b-c=c-a=0,$$

即
$$a=b=c.$$

2.1.20 ★ 证明:

$$\begin{aligned}&(y+z-2x)^3+(z+x-2y)^3+(x+y-2z)^3\\=&3(y+z-2x)(z+x-2y)(x+y-2z).\end{aligned}$$

解析 此题看起来很复杂，但仔细观察，可以使用换元法. 令

$$y+z-2x=a, \quad ①$$
$$z+x-2y=b, \quad ②$$
$$x+y-2z=c, \quad ③$$

则要证的等式变为 $$a^3+b^3+c^3=3abc.$$

因为

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca),$$

所以将①，②，③相加有

$$a+b+c=y+z-2x+z+x-2y+x+y-2z=0,$$

所以 $$a^3+b^3+c^3-3abc=0,$$

所以

$$\begin{aligned}&(y+z-2x)^3+(z+x-2y)^3+(x+y-2z)^3\\=&3(y+z-2x)(z+x-2y)(x+y-2z).\end{aligned}$$

2.1.21 ★★ 已知 $a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$，且 a、b、c、d 都是正数，求证：$a=b=c=d$.

解析 由已知可得

$$a^4+b^4+c^4+d^4-4abcd=0,$$
$$(a^2-b^2)^2+(c^2-d^2)^2+2a^2b^2+2c^2d^2-4abcd=0,$$

所以

$$(a^2-b^2)^2+(c^2-d^2)^2+2(ab-cd)^2=0.$$

因为 $(a^2-b^2)^2\geqslant 0$，$(c^2-d^2)^2\geqslant 0$，$(ab-cd)^2\geqslant 0$，所以

$$a^2-b^2=c^2-d^2=ab-cd=0,$$

所以 $$(a+b)(a-b)=(c+d)(c-d)=0.$$

又因为 a、b、c、d 都为正数，所以 $a+b\neq 0$，$c+d\neq 0$，所以

$$a=b,\ c=d.$$

所以 $$ab-cd=a^2-c^2=(a+c)(a-c)=0,$$

所以 $a=c$. 故 $a=b=c=d$ 成立.

2.1.22 ★★ **已知** $a+b+c=0$,**求证**

$$2(a^4+b^4+c^4)=(a^2+b^2+c^2)^2.$$

解析 **用作差法,注意利用** $a+b+c=0$ **的条件.**

$$\begin{aligned}\text{左}-\text{右}&=2(a^4+b^4+c^4)-(a^2+b^2+c^2)^2\\&=a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2\\&=(a^2-b^2-c^2)^2-4b^2c^2\\&=(a^2-b^2-c^2+2bc)(a^2-b^2-c^2-2bc)\\&=[a^2-(b-c)^2][a^2-(b+c)^2]\\&=(a-b+c)(a+b-c)(a-b-c)(a+b+c)=0.\end{aligned}$$

所以等式成立.

2.2 因 式 分 解

2.2.1 ★ **分解因式:**

(1) $-2x^{5n-1}y^n+4x^{3n-1}y^{n+2}-2x^{n-1}y^{n+4}$;

(2) $x^3-8y^3-z^3-6xyz$;

(3) $a^2+b^2+c^2-2bc+2ca-2ab$;

(4) $a^7-a^5b^2+a^2b^5-b^7$.

解析 (1) **原式**$\begin{aligned}[t]&=-2x^{n-1}y^n(x^{4n}-2x^{2n}y^2+y^4)\\&=-2x^{n-1}y^n[(x^{2n})^2-2x^{2n}y^2+(y^2)^2]\\&=-2x^{n-1}y^n(x^{2n}-y^2)^2\\&=-2x^{n-1}y^n(x^n-y)^2(x^n+y)^2.\end{aligned}$

(2) **原式**$\begin{aligned}[t]&=x^3+(-2y)^3+(-z)^3-3x(-2y)(-z)\\&=(x-2y-z)(x^2+4y^2+z^2+2xy+xz-2yz).\end{aligned}$

(3) **原式**$\begin{aligned}[t]&=(a^2-2ab+b^2)+(-2bc+2ca)+c^2\\&=(a-b)^2+2c(a-b)+c^2=(a-b+c)^2.\end{aligned}$

本小题可以稍加变形,解法如下:

$$\begin{aligned}\text{原式}&=a^2+(-b)^2+c^2+2(-b)c+2ca+2a(-b)\\&=(a-b+c)^2.\end{aligned}$$

(4) **原式**$\begin{aligned}[t]&=(a^7-a^5b^2)+(a^2b^5-b^7)\\&=a^5(a^2-b^2)+b^5(a^2-b^2)=(a^2-b^2)(a^5+b^5)\\&=(a+b)(a-b)(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)\\&=(a+b)^2(a-b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4).\end{aligned}$

2.2.2 ★ **分解因式:**x^6-y^6.

解析 1 原式$=(x^3)^2-(y^3)^2$

$$=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$$

$$=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2).$$

解析 2 原式$=(x^2)^3-(y^2)^3$

$$=(x^2-y^2)[(x^2)^2+x^2y^2+(y^2)^2]$$

$$=(x+y)(x-y)[(x^2+y^2)^2-x^2y^2]$$

$$=(x+y)(x-y)(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy).$$

评注 解析 2 中，$x^4+x^2y^2+y^4=(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)$ 是因式分解中经常用到的一个结论，记住这个结论是必要的.

2.2.3 ★★ 分解因式：$(x^2+y^2)^3+(z^2-x^2)^3-(y^2+z^2)^3$.

解析 原式中 (x^2+y^2) 与 (z^2-x^2) 的和等于 (y^2+z^2)，所以考虑用立方和公式 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ 变形后，再进行分解.

$$\begin{aligned}原式&=(x^2+y^2+z^2-x^2)^3-3(x^2+y^2)(z^2-x^2)(x^2+y^2+z^2-x^2)\\&\quad-(y^2+z^2)^3\\&=(y^2+z^2)^3-3(x^2+y^2)(z^2-x^2)(y^2+z^2)-(y^2+z^2)^3\\&=-3(x^2+y^2)(z+x)(z-x)(y^2+z^2).\end{aligned}$$

2.2.4 分解因式：$a^3+b^3+c^3-3abc$.

解析 原式$=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$

$$=[(a+b)^3+c^3]-3ab(a+b+c)$$

$$=(a+b+c)[(a+b)^2-c(a+b)+c^2]-3ab(a+b+c)$$

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).$$

评注 $a^3+b^3+c^3-3abc$

$$=\frac{1}{2}(a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$$

$$=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2].$$

显然，当 $a+b+c=0$ 时，则 $a^3+b^3+c^3=3abc$；当 $a+b+c>0$ 时，则 $a^3+b^3+c^3-3abc\geqslant 0$，即 $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$，而且，当且仅当 $a=b=c$ 时，等号成立.

如果令 $x=a^3\geqslant 0$，$y=b^3\geqslant 0$，$z=c^3\geqslant 0$，则有

$$\frac{x+y+z}{3}\geqslant\sqrt[3]{xyz}.$$

等号成立的充要条件是 $x=y=z$. 这也是一个常用的结论.

2.2.5 ★★ 分解因式：$x^{15}+x^{14}+x^{13}+\cdots+x^2+x+1$.

解析 这个多项式的特点是：有 16 项，从最高次项 x^{15} 开始，x 的次数顺次递减至 0，由此想到应用公式 a^n-b^n 来分解. 因为

$$x^{16}-1=(x-1)(x^{15}+x^{14}+x^{13}+\cdots+x^2+x+1),$$

所以

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\frac{(x-1)(x^{15}+x^{14}+\cdots+x^2+x+1)}{x-1}=\frac{x^{16}-1}{x-1}\\&=\frac{(x^8+1)(x^4+1)(x^2+1)(x+1)(x-1)}{x-1}\\&=(x^8+1)(x^4+1)(x^2+1)(x+1).\end{aligned}$$

评注 在本题的分解过程中,用到先乘以 $(x-1)$,再除以 $(x-1)$ 的技巧,这一技巧在等式变形中很常用.

2.2.6 ⋆ **分解因式**:x^3-9x+8.

解析 本题解法很多,这里只介绍运用拆项、添项法分解的几种解法,注意一下拆项、添项的目的与技巧.

方法 1 将常数项 8 拆成 $-1+9$.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=x^3-9x-1+9\\&=(x^3-1)-9x+9\\&=(x-1)(x^2+x+1)-9(x-1)\\&=(x-1)(x^2+x-8).\end{aligned}$$

方法 2 将一次项 $-9x$ 拆成 $-x-8x$.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=x^3-x-8x+8\\&=(x^3-x)+(-8x+8)\\&=x(x+1)(x-1)-8(x-1)\\&=(x-1)(x^2+x-8).\end{aligned}$$

方法 3 将三次项 x^3 拆成 $9x^3-8x^3$.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=9x^3-8x^3-9x+8\\&=(9x^3-9x)+(-8x^3+8)\\&=9x(x+1)(x-1)-8(x-1)(x^2+x+1)\\&=(x-1)(x^2+x-8).\end{aligned}$$

方法 4 添加两项 $-x^2+x^2$.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=x^3-9x+8\\&=x^3-x^2+x^2-9x+8\\&=x^2(x-1)+(x-8)(x-1)\\&=(x-1)(x^2+x-8).\end{aligned}$$

评注 由此题可以看出,用拆项、添项的方法分解因式时,要拆哪些项,添什么项并无一定之规,主要的是要依靠对题目特点的观察,灵活变换,因此拆项、添项法是因式分解诸方法中技巧性最强的一种.

2.2.7 ★★ 分解因式:

(1) $x^9+x^6+x^3-3$;

(2) $(m^2-1)(n^2-1)+4mn$;

(3) $(x+1)^4+(x^2-1)^2+(x-1)^4$;

(4) $a^3b-ab^3+a^2+b^2+1$.

解析 (1) 将 -3 拆成 $-1-1-1$.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=x^9+x^6+x^3-1-1-1\\&=(x^9-1)+(x^6-1)+(x^3-1)\\&=(x^3-1)(x^6+x^3+1)+(x^3-1)(x^3+1)+(x^3-1)\\&=(x^3-1)(x^6+2x^3+3)\\&=(x-1)(x^2+x+1)(x^6+2x^3+3).\end{aligned}$$

(2) 将 $4mn$ 拆成 $2mn+2mn$.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(m^2-1)(n^2-1)+2mn+2mn\\&=m^2n^2-m^2-n^2+1+2mn+2mn\\&=(m^2n^2+2mn+1)-(m^2-2mn+n^2)\\&=(mn+1)^2-(m-n)^2\\&=(mn+m-n+1)(mn-m+n+1).\end{aligned}$$

(3) 将 $(x^2-1)^2$ 拆成 $2(x^2-1)^2-(x^2-1)^2$.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(x+1)^4+2(x^2-1)^2-(x^2-1)^2+(x-1)^4\\&=[(x+1)^4+2(x+1)^2(x-1)^2+(x-1)^4]-(x^2-1)^2\\&=[(x+1)^2+(x-1)^2]^2-(x^2-1)^2\\&=(2x^2+2)^2-(x^2-1)^2=(3x^2+1)(x^2+3).\end{aligned}$$

(4) 添加两项 $+ab-ab$.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=a^3b-ab^3+a^2+b^2+1+ab-ab\\&=(a^3b-ab^3)+(a^2-ab)+(ab+b^2+1)\\&=ab(a+b)(a-b)+a(a-b)+(ab+b^2+1)\\&=a(a-b)[b(a+b)+1]+(ab+b^2+1)\\&=[a(a-b)+1](ab+b^2+1)\\&=(a^2-ab+1)(b^2+ab+1).\end{aligned}$$

评注 (4)是一道较难的题目,由于分解后的因式结构较复杂,所以不易想到

添加 $+ab-ab$，而且添加项后分成的三项组又无公因式，而是先将前两组分解，再与第三组结合，找到公因式. 这道题目使我们体会到拆项、添项法的极强技巧所在.

2.2.8 ★★ 分解因式：$x^4+2x^3+2x^2+2x+1$.

解析 原式$=(x^4+2x^2+1)+(2x^3+2x)$

$$\begin{aligned}&=(x^2+1)^2+2x(x^2+1)\\&=(x^2+1)(x^2+1+2x)\\&=(x^2+1)(x+1)^2.\end{aligned}$$

2.2.9 ★★ 分解因式：$bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b)$.

解析 原式$=bc(b+c)+ca[(b+c)-(a+b)]-ab(a+b)$

$$\begin{aligned}&=bc(b+c)+ca(b+c)-ca(a+b)-ab(a+b)\\&=c(b+c)(a+b)-a(a+b)(c+b)\\&=(a+b)(b+c)(c-a).\end{aligned}$$

2.2.10 ★★ 分解因式：$x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)$.

解析 原式$=(x^3y-y^3x)+(y^3z-x^3z)+(z^3x-z^3y)$

$$\begin{aligned}&=xy(x^2-y^2)-z(x^3-y^3)+z^3(x-y)\\&=(x-y)[xy(x+y)-z(x^2+xy+y^2)+z^3]\\&=(x-y)[x^2(y-z)+xy(y-z)-z(y^2-z^2)]\\&=(x-y)(y-z)(x^2+xy-zy-z^2)\\&=-(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z).\end{aligned}$$

2.2.11 ★★ 分解因式：$(1+x+x^2+x^3)^2-x^3$.

解析 原式$=(1+x+x^2)^2+2x^3(1+x+x^2)+x^6-x^3$

$$\begin{aligned}&=(1+x+x^2)^2+2x^3(1+x+x^2)+x^3(x^3-1)\\&=(1+x+x^2)[(1+x+x^2)+2x^3+x^3(x-1)]\\&=(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3+x^4).\end{aligned}$$

2.2.12 ★★ 分解因式：$(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$.

解析 将原式展开，是关于 x 的四次多项式，分解因式较困难. 我们不妨将 x^2+x 看作一个整体，并用字母 y 来替代，于是原题转化为关于 y 的二次三项式的因式分解问题了.

设 $x^2+x=y$，则

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(y+1)(y+2)-12=y^2+3y-10\\&=(y-2)(y+5)=(x^2+x-2)(x^2+x+5)\\&=(x-1)(x+2)(x^2+x+5).\end{aligned}$$

评注 本题也可将 x^2+x+1 看作一个整体，比如令 $x^2+x+1=u$，可以得到同样的结果，有兴趣的同学不妨试一试.

2.2.13 ★★ 分解因式：

$$(x^2+3x+2)(4x^2+8x+3)-90.$$

解析 先将两个括号内的多项式分解因式,然后再重新组合.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(x+1)(x+2)(2x+1)(2x+3)-90\\&=[(x+1)(2x+3)][(x+2)(2x+1)]-90\\&=(2x^2+5x+3)(2x^2+5x+2)-90.\end{aligned}$$

令 $y=2x^2+5x+2$,则

$$\begin{aligned}\text{原式}&=y(y+1)-90=y^2+y-90\\&=(y+10)(y-9)\\&=(2x^2+5x+12)(2x^2+5x-7)\\&=(2x^2+5x+12)(2x+7)(x-1).\end{aligned}$$

评注 对多项式适当的恒等变形是我们找到新元(y)的基础.

2.2.14 ★★ 分解因式:$(a+b-2ab)(a+b-2)+(1-ab)^2$.

解析 令 $a+b=x$, $ab=y$,则

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(x-2y)(x-2)+(1-y)^2\\&=x^2-2xy-2x+4y+y^2-2y+1\\&=x^2-2x(y+1)+(y+1)^2\\&=[x-(y+1)]^2\\&=(x-y-1)^2,\end{aligned}$$

所以,原式 $=(a+b-ab-1)^2$.

2.2.15 ★★ 分解因式:$(1-2a-a^2)b+a(a-1)(2b^2-1)$.

解析 令 $a-1=x$,则 $1-2a-a^2=(a-1)^2-2a^2=x^2-2a^2$.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(x^2-2a^2)b+ax(2b^2-1)\\&=x^2b-2a^2b+2ab^2x-ax\\&=(x^2b-ax)+(2ab^2x-2a^2b)\\&=(xb-a)(x+2ab),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{所以,原式}&=[(a-1)b-a][(a-1)+2ab]\\&=(ab-a-b)(a+2ab-1).\end{aligned}$$

2.2.16 ★★ 分解因式:$(x+1)^4+(x+3)^4-272$.

解析 令 $y=x+2$,则

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(y-1)^4+(y+1)^4-272\\&=(y^2-2y+1)^2+(y^2+2y+1)^2-272\\&=(y^4+4y^2+1-4y^3+2y^2-4y)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+(y^4+4y^2+1+4y^3+2y^2+4y)-272\\
&=2y^4+12y^2-270\\
&=2(y^4+6y^2-135)\\
&=2(y^2-9)(y^2+15)\\
&=2(y+3)(y-3)(y^2+15),
\end{aligned}
$$

所以,原式 $=2(x+5)(x-1)(x^2+4x+19)$.

2.2.17 ★★ **分解因式**:$(x^2+4x+8)^2+3x(x^2+4x+8)+2x^2$.

解析 设 $x^2+4x+8=y$,**则**

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=y^2+3xy+2x^2=(y+2x)(y+x)\\
&=(x^2+6x+8)(x^2+5x+8)\\
&=(x+2)(x+4)(x^2+5x+8).
\end{aligned}
$$

评注 **由本题可知,用换元法分解因式时,不必将原式中的元都用新元代换,根据题目需要,引入必要的新元,原式中的变元和新变元可以一起变形,换元法的本质是简化多项式.**

2.2.18 ★★ **分解因式**:$6x^4+7x^3-36x^2-7x+6$.

解析 1

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=6(x^4+1)+7x(x^2-1)-36x^2\\
&=6[(x^4-2x^2+1)+2x^2]+7x(x^2-1)-36x^2\\
&=6[(x^2-1)^2+2x^2]+7x(x^2-1)-36x^2\\
&=6(x^2-1)^2+7x(x^2-1)-24x^2\\
&=[2(x^2-1)-3x][3(x^2-1)+8x]\\
&=(2x^2-3x-2)(3x^2+8x-3)\\
&=(2x+1)(x-2)(3x-1)(x+3).
\end{aligned}
$$

评注 **本解法实际上是将** x^2-1 **看作一个整体,但并没有设立新元来代替它,即熟练使用换元法后,并非每题都要设置新元来代替整体.**

解析 2

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=x^2\left(6x^2+7x-36-\frac{7}{x}+\frac{6}{x^2}\right)\\
&=x^2\left[6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+7\left(x-\frac{1}{x}\right)-36\right].
\end{aligned}
$$

令 $x-\frac{1}{x}=t$,**则** $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2+2$,**于是**

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=x^2[6(t^2+2)+7t-36]\\
&=x^2(6t^2+7t-24)=x^2(2t-3)(3t+8)\\
&=x^2\left[2\left(x-\frac{1}{x}\right)-3\right]\left[3\left(x-\frac{1}{x}\right)+8\right]\\
&=(2x^2-3x-2)(3x^2+8x-3)
\end{aligned}
$$

$$=(2x+1)(x-2)(3x-1)(x+3).$$

2.2.19 ★★ **分解因式**：$(x^2+xy+y^2)^2-4xy(x^2+y^2)$.

解析 本题含有两个字母，且当互换这两个字母的位置时，多项式保持不变，这样的多项式叫作二元对称式. 对于较难分解的二元对称式，经常令 $u=x+y$，$v=xy$，用换元法分解因式.

$$\text{原式}=[(x+y)^2-xy]^2-4xy[(x+y)^2-2xy].$$

令 $x+y=u$，$xy=v$，则

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(u^2-v)^2-4v(u^2-2v)\\&=u^4-6u^2v+9v^2=(u^2-3v)^2\\&=(x^2+2xy+y^2-3xy)^2=(x^2-xy+y^2)^2.\end{aligned}$$

2.2.20 ★ **分解因式**：$x^2-2xy-3y^2+2x+10y-8$.

解析 $\begin{aligned}\text{原式}&=(x-3y)(x+y)+2x+10y-8\\&=(x-3y+4)(x+y-2).\end{aligned}$

其十字相乘图为
$$\begin{array}{ccc}x-3y & & 4\\ & \times & \\ x+y & & -2\end{array}$$

评注 凡是可以化成 $x^2+(a+b)x+ab$ 或 $abx^2+(ac+bd)x+cd$ 形式的二次三项式，都可以直接采用十字相乘法把它分解成 $(x+a)(x+b)$ 或 $(ax+d)(bx+c)$ 的形式.

对于某些二元二次六项式 $(ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f)$，我们也可以用十字相乘法分解因式，通常称为双十字相乘法. 其因式分解的步骤是：首先用十字相乘法分解 $ax^2+bxy+cy^2$，得到一个十字相乘图（有两列）；然后把常数项 f 分解成两个因式填在第三列上，要求第二、第三列构成的十字交叉之积的和等于原式中的 ey，第一、第三列构成的十字交叉之积的和等于原式中的 dx.

2.2.21 ★ **分解因式**：$6x^2-13xy+6y^2+22x-23y+20$.

解析 $\begin{aligned}\text{原式}&=(2x-3y)(3x-2y)+22x-23y+20\\&=(2x-3y+4)(3x-2y+5).\end{aligned}$

其十字相乘图为
$$\begin{array}{ccccc}2x & & -3y & & 4\\ & \times & & \times & \\ 3x & & -2y & & 5\end{array}$$

2.2.22 ★ **分解因式**：$6x^2-7xy-3y^2-xz+7yz-2z^2$.

解析 $\begin{aligned}\text{原式}&=(2x-3y)(3x+y)-xz+7yz-2z^2\\&=(2x-3y+z)(3x+y-2z).\end{aligned}$

其十字相乘图为

$$\begin{array}{ccc} 2x & -3y & z \\ 3x & y & -2z \end{array}$$

2.2.23 ★ 分解因式：$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$.

解析 原式$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-24$

$=(x^2+5x+4)[(x^2+5x+4)+2]-24$

$=(x^2+5x+4)^2+2(x^2+5x+4)-24$

$=[(x^2+5x+4)+6][(x^2+5x+4)-4]$

$=x(x+5)(x^2+5x+10)$.

对于形如 $e(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)+f$(a、b、c、d、e、f 为常数)，当 $a+b=c+d$ 时，则把 $(x+a)(x+b)$ 与 $(x+c)(x+d)$ 分别相乘后，构成有相同部分：$x^2+(a+b)x=x^2+(c+d)x$ 的项，使原式得到简化，再用十字相乘法进行分解.

2.2.24 ★★ 分解因式：$(x+2)(x+3)(x+8)(x+12)-4x^2$.

解析 原式$=(x^2+14x+24)(x^2+11x+24)-4x^2$

$=(x^2+14x+24)[(x^2+14x+24)-3x]-4x^2$

$=(x^2+14x+24)^2-3x(x^2+14x+24)-4x^2$

$=[(x^2+14x+24)-4x][(x^2+14x+24)+x]$

$=(x^2+10x+24)(x^2+15x+24)$

$=(x+4)(x+6)\left(x-\dfrac{-15+\sqrt{129}}{2}\right)\left(x-\dfrac{-15-\sqrt{129}}{2}\right)$.

对于形如 $e(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)+fx^2$($a$、$b$、$c$、$d$、$e$、$f$ 为常数)，当 $a\cdot b=c\cdot d$ 时，则把 $(x+a)(x+b)$ 与 $(x+c)(x+d)$ 分别先作乘法，构成具有相同部分 $x^2+ab=x^2+cd$ 的项，再用十字相乘法进行分解.

2.2.25 ★★ 分解因式：$x^2-3y^2-8z^2+2xy+2xz+14yz$.

解析 由于 $x^2+2xy-3y^2=(x+3y)(x-y)$

若原式可以分解因式，那么它一定是 $(x+3y+mz)(x-y+nz)$ 的形式. 应用待定系数法即可求出 m 和 n，使问题得到解决.

设 $x^2-3y^2-8z^2+2xy+2xz+14yz\equiv(x+3y+mz)(x-y+nz)$

$=x^2+2xy-3y^2+(m+n)xz+(3n-m)yz+mnz^2$.

比较两边对应项的系数，则有

$$\begin{cases} m+n=2, \\ 3n-m=14, \\ mn=-8. \end{cases}$$

解之，得 $m=-2,\ n=4$.

所以 原式$=(x+3y-2z)(x-y+4z)$.

2.2.26 ★★ **分解因式**：$x^4-x^3+4x^2+3x+5$.

解析 这是关于 x 的四次多项式，若它可以因式分解，则必为关于 x 的两个二次式之积. 可用待定系数法求之.

设 $$\begin{aligned}&x^4-x^3+4x^2+3x+5\\=&(x^2+ax+1)(x^2+bx+5)\\=&x^4+(a+b)x^3+(ab+6)x^2+(5a+b)x+5.\end{aligned}$$

比较两边对应项的系数，则有

$$\begin{cases}a+b=-1,\\ab+6=4,\\5a+b=3.\end{cases}$$

解之，得 $$a=1,\ b=-2.$$

所以 原式 $=(x^2+x+1)(x^2-2x+5)$.

如果设原式 $=(x^2+ax-1)(x^2+bx-5)$，那么由待定系数法解题后知关于 a 与 b 的方程组无解，所以设原式 $=(x^2+ax+1)(x^2+bx+5)$.

2.2.27 ★★ k 为何值时，$x^2-y^2+3x-7y+k$ 可以分解成两个一次因式的乘积?

解析 因为 $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$，所以如果 $x^2-y^2+3x-7y+k$ 可以分解成两个一次因式的乘积，那么它的两个一次因式一定是 $(x+y+m)$ 与 $(x-y+n)$ 的形式，其中 m、n 都是待定系数.

设 $$x^2-y^2+3x-7y+k=(x+y+m)(x-y+n)$$

$$\begin{aligned}x^2-y^2+3x-7y+k&=x^2+xy+mx-xy-y^2-my+nx+ny+mn\\&=x^2-y^2+(m+n)x+(n-m)y+mn.\end{aligned}$$

比较两边对应项的系数，得

$$\begin{cases}m+n=3,\\n-m=-7,\\mn=k.\end{cases}$$

解之，得 $$\begin{cases}m=5,\\n=-2,\\k=-10.\end{cases}$$

因此，当 $k=-10$ 时，$x^2-y^2+3x-7y+k$ 可以分解成两个一次因式的乘积 $(x+y+5)(x-y-2)$.

2.2.28 ★★ **分解因式**：$a^4+(a+b)^4+b^4$.

解析 因为 $a^4+b^4=(a+b)^4-4a^3b-6a^2b^2-4ab^3$

$$=(a+b)^4-4ab(a+b)^2+2(ab)^2.$$

所以，原式 $=a^4+b^4+(a+b)^4$

$$\begin{aligned}&=(a+b)^4-4ab(a+b)^2+2(ab)^2+(a+b)^4\\&=2[(a+b)^4-2ab(a+b)^2+(ab)^2]\\&=2[(a+b)^2-ab]^2\\&=2(a^2+b^2+ab)^2.\end{aligned}$$

2.2.29 ★★ **分解因式**：$(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$.

解析 这个式子是关于 x，y，z 的五次齐次对称式，令 $x=-y$，则原式 $=0$. 故原式有因式 $x+y$. 同理，亦有因式 $y+z$，$z+x$. 这样原式还有一个二次齐次对称式

$$k(x^2+y^2+z^2)+l(xy+yz+zx).$$

所以，可设

$$\text{原式}=(x+y)(y+z)(z+x)[k(x^2+y^2+z^2)+l(xy+yz+zx)]$$

当 $x=y=1$，$z=0$ 时，得 $15=2k+l$. ①

当 $x=2$，$y=1$，$z=0$ 时，得 $35=5k+2l$. ②

由①式与②式可解得 $k=5$，$l=5$.

所以，原式 $=5(x+y)(y+z)(z+x)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)$.

2.2.30 ★★ **分解因式**：$ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)$.

解析 当 $a=b$ 时，易知原式 $=0$，所以原式有因式 $a-b$. 同理，$b-c$ 与 $c-a$ 也都是原式的因式.

但四次多项式应有四个一次因式，由对称性余下的一个因式必为 $a+b+c$，故可设

$$ab(a^2-b^2)+b(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)=k(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a).$$

令 $a=0$，$b=1$，$c=2$，得 $2\times(-3)=3k\times(-1)\times(-1)\times 2$. 解得 $k=-1$.

所以，原式 $=-(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$.

2.2.31 ★★ **分解因式**：$a^2(b+c)^2+b^2(c+a)^2+c^2(a+b)^2+abc(a+b+c)+(a^2+b^2+c^2)\cdot(ab+bc+ca)$.

解析 所给的式子是一个四次对称式. 若令 $a=-b$，则

$$\begin{aligned}\text{原式}&=b^2(b+c)^2+b^2(c-b)^2-b^2c^2+(2b^2+c^2)\cdot(-b^2)\\&=b^2[(b+c)^2+(c-b)^2-c^2-c^2-2b^2]\\&=b^2(b^2+c^2+2bc+b^2-2bc+c^2-2c^2-2b^2)=0.\end{aligned}$$

所以，原式含有因式 $a+b$.

同理，原式含有因式 $b+c$，$c+a$.

于是,原式含有因式 $(a+b)(b+c)(c+a)$.

由于原式为四次对称式,故还有因式 $k(a+b+c)$,其中 k 为待定系数.

所以,原式 $=k(a+b)(b+c)(c+a)(a+b+c)$.

比较等式两边 a^3b 的系数,得 $k=1$.

所以,原式 $=(a+b)(b+c)(c+a)(a+b+c)$.

2.3 分 式

2.3.1 ★ **计算:**

(1) $\dfrac{a+9b}{3ab}-\dfrac{a+3b}{3ab}$;

(2) $\dfrac{a-1}{a^2+3a+2}-\dfrac{6}{a^2-a-2}$.

解析 (1) $\dfrac{a+9b}{3ab}-\dfrac{a+3b}{3ab}=\dfrac{6b}{3ab}=\dfrac{2}{a}$.

(2)
$$\begin{aligned}&\frac{a-1}{a^2+3a+2}-\frac{6}{a^2-a-2}\\=&\frac{a-1}{(a+1)(a+2)}-\frac{6}{(a-2)(a+1)}\\=&\frac{(a-1)(a-2)-6(a+2)}{(a+1)(a+2)(a-2)}=\frac{a^2-9a-10}{(a+1)(a+2)(a-2)}\\=&\frac{(a-10)(a+1)}{(a+1)(a-2)(a+2)}=\frac{a-10}{a^2-4}.\end{aligned}$$

2.3.2 ★ **计算:**

(1) $x+1-\dfrac{x^2}{x-1}$;

(2) $\left[\dfrac{2}{3x}-\dfrac{2}{x+y}\left(\dfrac{x+y}{3x}-x-y\right)\right]\div\dfrac{x-y}{x}$.

解析 (1) $x+1-\dfrac{x^2}{x-1}=\dfrac{(x+1)(x-1)-x^2}{x-1}=\dfrac{-1}{x-1}=\dfrac{1}{1-x}$.

(2)
$$\begin{aligned}&\left[\frac{2}{3x}-\frac{2}{x+y}\left(\frac{x+y}{3x}-x-y\right)\right]\div\frac{x-y}{x}\\=&\left\{\frac{2}{3x}-\frac{2}{x+y}\left[\frac{x+y}{3x}-(x+y)\right]\right\}\times\frac{x}{x-y}\\=&\left[\frac{2}{3x}-\left(\frac{2}{3x}-2\right)\right]\times\frac{x}{x-y}=2\times\frac{x}{x-y}=\frac{2x}{x-y}.\end{aligned}$$

2.3.3 ★★ **化简分式:**

$$\frac{2a^2+3a+2}{a+1}-\frac{a^2-a-5}{a+2}-\frac{3a^2-4a-5}{a-2}+\frac{2a^2-8a+5}{a-3}.$$

解析　直接通分计算较繁，先把每个假分式化成整式与真分式之和的形式，再化简将简便得多.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\frac{2a^2+2a+a+1+1}{a+1}-\frac{a^2+2a-3a-6+1}{a+2}\\&\quad-\frac{3a^2-6a+2a-4-1}{a-2}+\frac{2a^2-6a-2a+6-1}{a-3}\\&=\left[(2a+1)+\frac{1}{a+1}\right]-\left[(a-3)+\frac{1}{a+2}\right]\\&\quad-\left[(3a+2)-\frac{1}{a-2}\right]+\left[(2a-2)-\frac{1}{a-3}\right]\\&=[(2a+1)-(a-3)-(3a+2)+(2a-2)]\\&\quad+\left[\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a-2}-\frac{1}{a-3}\right]\\&=\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a-2}-\frac{1}{a-3}\\&=\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\frac{-1}{(a-2)(a-3)}\\&=\frac{(a-2)(a-3)-(a+1)(a+2)}{(a+1)(a+2)(a-2)(a-3)}\\&=\frac{-8a+4}{(a+1)(a+2)(a-2)(a-3)}.\end{aligned}$$

评注　本题的关键是正确地将假分式写成整式与真分式之和的形式.

2.3.4 ★★ 求分式

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1+a}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}+\frac{8}{1+a^8}+\frac{16}{1+a^{16}}$$

当 $a=2$ 时的值.

解析　先化简再求值. 直接通分较复杂，注意到平方差公式：

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b),$$

可将分式分步通分，每一步只通分左边两项.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\frac{(1+a)+(1-a)}{(1-a)(1+a)}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}+\frac{8}{1+a^8}+\frac{16}{1+a^{16}}\\&=\frac{2}{1-a^2}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}+\frac{8}{1+a^8}+\frac{16}{1+a^{16}}\\&=\frac{2(1+a^2)+2(1-a^2)}{(1-a^2)(1+a^2)}+\frac{4}{1+a^4}+\frac{8}{1+a^8}+\frac{16}{1+a^{16}}\\&=\frac{4}{1-a^4}+\frac{4}{1+a^4}+\frac{8}{1+a^8}+\frac{16}{1+a^{16}}\end{aligned}$$

$$=\frac{8}{1-a^8}+\frac{8}{1+a^8}+\frac{16}{1+a^{16}}=\frac{16}{1-a^{16}}+\frac{16}{1+a^{16}}$$
$$=\frac{32}{1-a^{32}}=\frac{32}{1-2^{32}}.$$

2.3.5 ★ 计算：

$$\frac{2a-b-c}{a^2-ab-ac+bc}+\frac{2b-c-a}{b^2-ab-bc+ac}+\frac{2c-a-b}{c^2-ac-bc+ab}$$

解析 本题如果直接通分化为同分母，运算较繁. 而通过分子拆项，分母分解之后，利用 $\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$，比较简洁. 由此可看出，有时需要把分式按分母不变，分子相加减的法则倒过来运用，把一个分式拆成几个分式的和差.

原式$=\frac{(a-b)+(a-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(b-c)+(b-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(c-a)+(c-b)}{(c-a)(c-b)}$

$$=\frac{1}{a-c}+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-b}+\frac{1}{c-a}=0.$$

2.3.6 ★ 已知 $x^2-3x+1=0$. 求 $x^2+\frac{1}{x^2}$ 的值.

解析 由已知 $x^2-3x+1=0$ 得 $x\neq 0$ 且 $x^2+1=3x$ 可得$\frac{x^2+1}{x}=3$，即$x+\frac{1}{x}=3$，所以

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=7.$$

评注 这里利用 x 与$\frac{1}{x}$互为倒数的特点，巧妙地运用乘法公式加以变形，使问题变得较简单. 同样地，$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-1+\frac{1}{x^2}\right)=3\times(7-1)=18$，

$$x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2=47.$$

2.3.7 ★ 已知 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5$. 求$\frac{2x-3xy+2y}{x+2xy+y}$的值.

解析 由 $\frac{x+y}{xy}=5$ 可得 $x+y=5xy$. 故

$$\frac{2x-3xy+2y}{x+2xy+y}=\frac{2(x+y)-3xy}{(x+y)+2xy}=\frac{2\times 5xy-3xy}{5xy+2xy}=\frac{7xy}{7xy}=1.$$

评注 本题同样通过将已知的条件作适当变形，代入所求的分式中. 由此可看

出,在已知条件与所求的式子中寻找桥梁是非常关键的,往往需要作整体的代换,而不一定要一一求出每个字母的数值.

2.3.8 ★ 计算:$\dfrac{(x-y)^2}{(z-x)(z-y)}+\dfrac{(y-z)^2}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{(z-x)^2}{(y-x)(y-z)}$

解析 直接通分比较繁,考虑到这里主要涉及到 $x-y$, $y-z$, $z-x$ 三个式子,不妨用换元法.使所求式子的形式变得简单一些.

设 $x-y=a$, $y-z=b$, $z-x=c$,则 $a+b+c=0$,所以

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\frac{a^2}{-bc}+\frac{b^2}{-ac}+\frac{c^2}{-ab}=\frac{a^3+b^3+c^3}{-abc}=-\frac{[(a+b)^3-3ab(a+b)]+c^3}{abc}\\&=-\frac{-c^3+3abc+c^3}{abc}=-3.\end{aligned}$$

2.3.9 ★★ 已知 $xyz=1$, $x+y+z=2$, $x^2+y^2+z^2=16$.

求 $\dfrac{1}{xy+2z}+\dfrac{1}{yz+2x}+\dfrac{1}{zx+2y}$ 的值.

解析 因为 $x+y+z=2$,两边平方得 $x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=4$.已知 $x^2+y^2+z^2=16$,所以,$xy+yz+zx=-6$.又 $z=2-x-y$,所以

$$\frac{1}{xy+2z}=\frac{1}{xy+4-2x-2y}=\frac{1}{(x-2)(y-2)}.$$

同理,$\dfrac{1}{yz+2x}=\dfrac{1}{(y-2)(z-2)}$, $\dfrac{1}{zx+2y}=\dfrac{1}{(z-2)(x-2)}$.

$$\begin{aligned}\text{故原式}&=\frac{1}{(x-2)(y-2)}+\frac{1}{(y-2)(z-2)}+\frac{1}{(z-2)(x-2)}\\&=\frac{(x-2)+(y-2)+(z-2)}{(x-2)(y-2)(z-2)}\\&=\frac{x+y+z-6}{zyx-2(xy+yz+zx)+4(x+y+z)-8}\\&=\frac{2-6}{1+12+8-8}=-\frac{4}{13}.\end{aligned}$$

2.3.10 ★★ 若 $abc=1$,求

$$\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}$$

的值.

解析 本题可将分式通分后,再进行化简求值,但较复杂.下面介绍几种简单的解法.

方法 1 因为 $abc=1$,所以 a, b, c 都不为零.

$$\text{原式}=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{a}{a}\cdot\frac{b}{bc+b+1}+\frac{ab}{ab}\cdot\frac{c}{ca+c+1}$$

$$=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{abc+ab+a}+\frac{abc}{abca+abc+ab}$$

$$=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{1+ab+a}+\frac{1}{a+1+ab}$$

$$=\frac{a+ab+1}{ab+a+1}=1.$$

方法2 因为 $abc=1$，所以 $a\neq 0$，$b\neq 0$，$c\neq 0$.

$$\text{原式}=\frac{a}{ab+a+abc}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{b}{b}\cdot\frac{c}{ca+c+1}$$

$$=\frac{1}{b+1+bc}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{bc}{bca+bc+b}$$

$$=\frac{1}{b+1+bc}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{bc}{1+bc+b}=1.$$

方法3 由 $abc=1$，得 $a=\frac{1}{bc}$，将之代入原式

$$\text{原式}=\frac{\frac{1}{bc}}{\frac{1}{bc}\cdot b+\frac{1}{bc}+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{c\cdot\frac{1}{bc}+c+1}$$

$$=\frac{1}{b+1+bc}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{bc}{1+bc+b}=1.$$

2.3.11 ★ 化简分式：

$$\frac{1}{x^2+3x+2}+\frac{1}{x^2+5x+6}+\frac{1}{x^2+7x+12}.$$

解析 三个分式一齐通分运算量大，可先将每个分式的分母分解因式，然后再化简.

$$\text{原式}=\frac{1}{(x+2)(x+1)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}$$

$$=\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)+\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}\right)$$

$$=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+4}=\frac{3}{x^2+5x+4}.$$

评注 本题在将每个分式的分母因式分解后，各个分式具有 $\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$ 的一般形式，与分式运算的通分思想方法相反，我们将上式拆成 $\frac{1}{x+n}$ 与 $\frac{1}{x+n+1}$ 两项，这样，前后两个分式中就有可以相互消掉的一对相反数，这种化简的方法叫“拆项相消”法，它是分式化简中常用的技巧.

2.3.12 ★★ 若实数 x, y, z 满足 $x+\frac{1}{y}=4, y+\frac{1}{z}=1, z+\frac{1}{x}=\frac{7}{3}$,求 xyz 的值.

解析 因为 $4=x+\frac{1}{y}=x+\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=x+\frac{z}{z-1}$

$$=x+\frac{\frac{7}{3}-\frac{1}{x}}{\frac{7}{3}-\frac{1}{x}-1}=x+\frac{7x-3}{4x-3},$$

所以

$$4(4x-3)=x(4x-3)+7x-3,$$
$$4x^2-12x+9=0,$$
$$(2x-3)^2=0,$$

故 $x=\frac{3}{2}$.

从而 $z=\frac{5}{3}, y=\frac{2}{5}$. 所以 $xyz=1$.

2.3.13 ★★ 已知:$x+y+z=3a$($a\neq 0$,且 x、y、z 不全相等),求

$$\frac{(x-a)(y-a)+(y-a)(z-a)+(z-a)(x-a)}{(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2}$$

的值.

解析 本题字母多,分式复杂. 若把条件写成 $(x-a)+(y-a)+(z-a)=0$,那么题目只与 $x-a, y-a, z-a$ 有关,为简化计算,可用换元法求解.

令 $x-a=u, y-a=v, z-a=w$,则分式变为 $\frac{uv+vw+wu}{u^2+v^2+w^2}$,且由已知有 $u+v+w=0$. 将 $u+v+w=0$ 两边平方得

$$u^2+v^2+w^2+2(uv+vw+wu)=0.$$

由于 x、y、z 不全相等,所以 u、v、w 不全为零,所以 $u^2+v^2+w^2\neq 0$,从而有

$$\frac{uv+vw+wu}{u^2+v^2+w^2}=-\frac{1}{2},$$

即所求分式的值为 $-\frac{1}{2}$.

评注 从本例中可以看出,换元法可以减少字母个数,使运算过程简化.

2.3.14 ★★ 已知 $\frac{x}{a-b}=\frac{y}{b-c}=\frac{z}{c-a}$,求 $x+y+z$ 的值.

解析 本题的已知条件是以连比形式出现,可引入参数 k,用它表示连比的比值,以便把它们分割成几个等式.

$$设\frac{x}{a-b}=\frac{y}{b-c}=\frac{z}{c-a}=k,于是有$$

$$x=(a-b)k,\ y=(b-c)k,\ z=(c-a)k.$$

所以

$$x+y+z=(a-b)k+(b-c)k+(c-a)k=0.$$

2.3.15 ★★ 已知 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$,求$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ 的值.

解析 令 $\frac{x}{a}=u$, $\frac{y}{b}=v$, $\frac{z}{c}=w$, 于是条件变为

$$u+v+w=1, \tag{①}$$

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=0. \tag{②}$$

由②有

$$\frac{uv+vw+wu}{uvw}=0,$$

所以

$$uv+vw+wu=0.$$

把①两边平方得

$$u^2+v^2+w^2+2(uv+vw+wu)=1,$$

所以

$$u^2+v^2+w^2=1,$$

即

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

2.3.16 ★★ 化简分式:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left[x+\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x-\frac{1}{x}}\right]^2\div\frac{x^2+\frac{1}{x^2}-x-\frac{1}{x}+3}{x^2+\frac{1}{x^2}-2x-\frac{2}{x}+3}.$$

解析 原式中只出现了 $x+\frac{1}{x}$ 和 $x^2+\frac{1}{x^2}$ 的形式,而且 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$, 因此可用换元法.

令 $x+\dfrac{1}{x}=a$，则

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=a^2-2.$$

$$\begin{aligned}\text{原式}&=a^2-\left(a-\frac{1}{1-a}\right)^2\div\frac{a^2-2-a+3}{a^2-2-2a+3}\\&=a^2-\left(\frac{a^2-a+1}{a-1}\right)^2\div\frac{a^2-a+1}{a^2-2a+1}\\&=a^2-\left(\frac{a^2-a+1}{a-1}\right)^2\times\frac{(a-1)^2}{a^2-a+1}\\&=a^2-(a^2-a+1)=a-1\\&=x+\frac{1}{x}-1=\frac{x^2-x+1}{x}.\end{aligned}$$

2.3.17 ★★ 已知 $xyzt=1$，求下面代数式的值：

$$\frac{1}{1+x+xy+xyz}+\frac{1}{1+y+yz+yzt}+\frac{1}{1+z+zt+ztx}+\frac{1}{1+t+tx+txy}.$$

解析　根据分式的基本性质，分子、分母可以同时乘以一个不为零的式子，分式的值不变. 利用已知条件，可将前三个分式的分母变为与第四个相同.

$$\frac{1}{1+x+xy+xyz}=\frac{t}{t+xt+xyt+xyzt}=\frac{t}{t+xt+xyt+1},$$

同理

$$\frac{1}{1+y+yz+yzt}=\frac{tx}{tx+txy+1+t},$$
$$\frac{1}{1+z+zt+ztx}=\frac{txy}{txy+1+t+tx}.$$

所以
$$\text{原式}=\frac{t+tx+txy+1}{1+t+tx+txy}=1.$$

2.3.18 ★★ 若 $x=\sqrt{19-8\sqrt{3}}$，求分式

$$\frac{x^4-6x^3-2x^2+18x+23}{x^2-8x+15}$$

的值.

解析　$x=\sqrt{19-8\sqrt{3}}=\sqrt{16-2\cdot4\cdot\sqrt{3}+3}=4-\sqrt{3}$，

所以 $x-4=-\sqrt{3}$，所以 $(x-4)^2=3$，即 $x^2-8x+13=0$.

$$\text{原式分子}=(x^4-8x^3+13x^2)+(2x^3-16x^2+26x)$$

$$
\begin{aligned}
&+(x^2-8x+13)+10 \\
=&\, x^2(x^2-8x+13)+2x(x^2-8x+13) \\
&+(x^2-8x+13)+10 \\
=&\, 10,
\end{aligned}
$$

$$\text{原式分母}=(x^2-8x+13)+2=2,$$

所以
$$\text{原式}=\frac{10}{2}=5.$$

评注 本例的解法采用的是整体代入的方法，这是代入消元法的一种特殊类型，应用得当会使问题的求解过程大大简化.

2.3.19 ★★ 若 $\dfrac{a+b-c}{c}=\dfrac{a-b+c}{b}=\dfrac{-a+b+c}{a}$，求

$$\frac{(a+b)(a+c)(b+c)}{abc}$$

的值.

解析 1 利用比例的性质解决分式问题.

(1) 若 $a+b+c\neq 0$，由等比定理有

$$
\begin{aligned}
&\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a} \\
&\qquad=\frac{(a+b-c)+(a-b+c)+(-a+b+c)}{a+b+c}=1,
\end{aligned}
$$

所以

$$a+b-c=c,\ a-b+c=b,\ -a+b+c=a,$$

于是有

$$\frac{(a+b)(a+c)(b+c)}{abc}=\frac{2c\cdot 2b\cdot 2a}{abc}=8.$$

(2) 若 $a+b+c=0$，则

$$a+b=-c,\ b+c=-a,\ c+a=-b,$$

于是有

$$\frac{(a+b)(a+c)(b+c)}{abc}=\frac{(-c)(-a)(-b)}{abc}=-1.$$

评注 比例有一系列重要的性质，在解决分式问题时，灵活巧妙地使用，便于问题的求解.

解析 2 设参数法. 令

$$\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}=k,$$

则

$$a+b=(k+1)c, \quad ①$$
$$a+c=(k+1)b, \quad ②$$
$$b+c=(k+1)a. \quad ③$$

①+②+③有

$$2(a+b+c)=(k+1)(a+b+c),$$

所以 $$(a+b+c)(k-1)=0,$$

故有 $k=1$ 或 $a+b+c=0$.

当 $k=1$ 时,

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=\frac{2c\cdot 2a\cdot 2b}{abc}=8.$$

当 $a+b+c=0$ 时,

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=\frac{(-c)(-a)(-b)}{abc}=-1.$$

评注　引进一个参数 k 表示以连比形式出现的已知条件,可使已知条件便于使用.

2.3.20 ★★ 一列数 a_1, a_2, a_3, …满足对于任意正整数 n,都有

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=n^3,$$

求 $\frac{1}{a_2-1}+\frac{1}{a_3-1}+\cdots+\frac{1}{a_{100}-1}$ 的值.

解析　当 $n\geqslant 2$ 时,有

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=n^3,$$
$$a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=(n-1)^3,$$

两式相减,得 $$a_n=3n^2-3n+1,$$

所以 $$\frac{1}{a_n-1}=\frac{1}{3n(n-1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right),\ n=2,3,\cdots$$

故 $$\frac{1}{a_2-1}+\frac{1}{a_3-1}+\cdots+\frac{1}{a_{100}-1}$$
$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)=\frac{33}{100}.$$

2.4 根式及其运算

2.4.1 ★ **化简**：

(1) $\sqrt{53\times125+36^2}$；

(2) $(\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7})(\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{7})(-\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})$；

(3) $\sqrt{8\underbrace{99\cdots9}_{(n-1)个}4\underbrace{00\cdots0}_{(n-1)个}1}$.

解析 (1) 直接计算不是好办法. 注意到 $53+36=125-36=89$，于是

$$\begin{aligned}53\times125+36^2&=(89-36)(89+36)+36^2\\&=89^2-36^2+36^2=89^2.\end{aligned}$$

故 $\sqrt{53\times125\times36^2}=\sqrt{89^2}=89$.

(2) 直接逐步展开太麻烦，观察到式中因式都是$\sqrt{5}$、$\sqrt{6}$、$\sqrt{7}$，只不过符号不同而已. 于是，我们将一些项适当组合，利用平方差公式.

$$\begin{aligned}&[(\sqrt{5}+\sqrt{6})+\sqrt{7}][(\sqrt{5}+\sqrt{6})-\sqrt{7}][\sqrt{7}+(\sqrt{5}-\sqrt{6})][\sqrt{7}-(\sqrt{5}-\sqrt{6})]\\=&[(\sqrt{5}+\sqrt{6})^2-7][7-(\sqrt{5}-\sqrt{6})^2]\\=&(4+2\sqrt{30})(-4+2\sqrt{30})\\=&(2\sqrt{30})^2-4^2=104.\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}&8\underbrace{99\cdots9}_{(n-1)个}4\underbrace{00\cdots0}_{(n-1)个}1=9\underbrace{00\cdots0}_{2n个}-6\underbrace{00\cdots0}_{n个}+1\\=&9\times10^{2n}-6\times10^n+1\\=&(3\times10^n-1)^2,\end{aligned}$$

所以，$\sqrt{8\underbrace{9\cdots9}_{(n-1)个}4\underbrace{00\cdots0}_{(n-1)个}1}=3\times10^n-1$.

2.4.2 ★ **化简**：

(1) $\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{4x^2+4x+1}$；

(2) $\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)+1}$（$n$ 是自然数）；

(3) $\sqrt{\dfrac{1\cdot2\cdot3+2\cdot4\cdot6+\cdots+n\cdot2n\cdot3n}{1\cdot5\cdot10+2\cdot10\cdot20+\cdots+n\cdot5n\cdot10n}}$；

(4) $\sqrt{1+2\sin\alpha\cos\alpha}+\sqrt{1-2\sin\alpha\cos\alpha}$，$(0°<\alpha\leqslant90°)$.

解析 (1) 原式$=\sqrt{(x-1)^2}-\sqrt{(2x+1)^2}$
$=|x-1|-|2x+1|$.

因为 $|x-1|$，$|2x+1|$ 的零点分别是 1，$-\dfrac{1}{2}$，我们分情况讨论如下：

① 当 $x \leqslant -\frac{1}{2}$ 时,原式 $=-(x-1)+(2x+1)=x+2$;

② 当 $-\frac{1}{2}<x\leqslant 1$ 时,原式 $=-(x-1)-(2x+1)=-3x$;

③ 当 $x>1$ 时,原式 $=(x-1)-(2x+1)=-x-2$.

(2) 因为 $n(n+1)(n+2)(n+3)+1=[n(n+3)][(n+1)(n+2)]+1$

$$\begin{aligned}&=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1\\&=(n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1\\&=(n^2+3n+1)^2,\end{aligned}$$

所以 $\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)+1}=\sqrt{(n^2+3n+1)^2}=n^2+3n+1$.

(3) 因为 $\frac{1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 4\cdot 6+\cdots+n\cdot 2n\cdot 3n}{1\cdot 5\cdot 10+2\cdot 10\cdot 20+\cdots+n\cdot 5n\cdot 10n}$

$$=\frac{1\cdot 2\cdot 3(1^3+2^3+\cdots+n^3)}{1\cdot 5\cdot 10(1^3+2^3+\cdots+n^3)}$$

$$=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 5\cdot 10},$$

所以 $\sqrt{\frac{1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 4\cdot 6+\cdots+n\cdot 2n\cdot 3n}{1\cdot 5\cdot 10+2\cdot 10\cdot 20+\cdots+n\cdot 5n\cdot 10n}}=\sqrt{\frac{3}{5^2}}=\frac{\sqrt{3}}{5}$.

(4) 因为 $1+2\sin\alpha\cos\alpha=\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha$

$$=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2,$$

同理, $1-2\sin\alpha\cos\alpha=(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$.

故原式 $=\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}+\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}$

$$=|\sin\alpha+\cos\alpha|+|\sin\alpha-\cos\alpha|.$$

由于 $0^\circ<\alpha\leqslant 90^\circ$, $\sin\alpha>0$, $\cos\alpha>0$. 且当 $0^\circ<\alpha<45^\circ$ 时, $\sin\alpha<\cos\alpha$;而 $45^\circ\leqslant\alpha\leqslant 90^\circ$ 时, $\sin\alpha\geqslant\cos\alpha$.

故① 当 $0^\circ<\alpha<45^\circ$ 时,原式 $=(\sin\alpha+\cos\alpha)+(\cos\alpha-\sin\alpha)=2\cos\alpha$;

② 当 $45^\circ\leqslant\alpha<90^\circ$ 时,原式 $=(\sin\alpha+\cos\alpha)+(\sin\alpha-\cos\alpha)=2\sin\alpha$.

2.4.3 ★ 化简: $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$.

解析 1　配方法:

$$9-4\sqrt{5}=5+4-4\sqrt{5}=(\sqrt{5})^2-2\cdot 2\sqrt{5}+2^2=(\sqrt{5}-2)^2,$$

故 $\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}=\sqrt{5}-2$.

解析 2　待定系数法:

设 $9-4\sqrt{5}=(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$, 则

$$9-4\sqrt{5}=(x+y)-2\sqrt{xy}.$$

$$\begin{cases}x+y=9,\\xy=20.\end{cases}$$

解方程组,得 $\begin{cases}x=5,\\y=4.\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=4,\\y=5.\end{cases}$

从而, $$\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}=\sqrt{5}-2.$$

解析 3　公式法:

$$\begin{aligned}\sqrt{9-4\sqrt{5}}&=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{9+\sqrt{9^2-(4\sqrt{5})^2}}-\sqrt{9-\sqrt{9^2-(4\sqrt{5})^2}}\right)\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{10}-2\sqrt{2})=\sqrt{5}-2.\end{aligned}$$

评注　本题解法中,配方法虽然较简单,但对一些数字较大的题目,其解法仍困难. 待定系数法虽然较麻烦,但它仍不失为一种普遍可行的方法.

2.4.4 ★★ 化简:$\sqrt{13+2\sqrt{5}+2\sqrt{7}+2\sqrt{35}}$.

解析　被开方数中含有三个不同的根式,且系数都是 2,可以看成是将 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ 平方得来的,因此用待定系数法来化简. 设

$$\sqrt{13+2\sqrt{5}+2\sqrt{7}+2\sqrt{35}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z},$$

两边平方得

$$\begin{aligned}&13+2\sqrt{5}+2\sqrt{7}+2\sqrt{35}\\=&x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx}.\end{aligned}$$

所以 $$\begin{cases}x+y+z=13, & ①\\xy=5, & ②\\yz=7, & ③\\zx=35. & ④\end{cases}$$

②×③×④得 $$(xyz)^2=5\times7\times35=35^2.$$

因为 x、y、z 均非负,所以 $xyz\geqslant0$,所以

$$xyz=35. \qquad ⑤$$

⑤÷②,有 $z=7$. 同理有 $x=5$, $y=1$. 所求 x、y、z 显然满足 ①,所以

$$原式=1+\sqrt{5}+\sqrt{7}.$$

2.4.5 ★★ 化简:$\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$.

解析 设原式 $=x$,则

$$\begin{aligned} x^2 &= (4-\sqrt{10+2\sqrt{5}})+(4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}) \\ &\quad +2\sqrt{(4-\sqrt{10+2\sqrt{5}})(4+\sqrt{10+2\sqrt{5}})} \\ &= 8+2\sqrt{6-2\sqrt{5}} = 8+2(\sqrt{5}-1) \\ &= 6+2\sqrt{5} = (\sqrt{5}+1)^2, \end{aligned}$$

显然有 $x>0$,所以原式 $=x=\sqrt{5}+1$.

2.4.6 ★★ 化简:$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.

解析 1 利用 $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$ 来解.

设 $x=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$,两边立方得

$$x^3=40+3\cdot\sqrt[3]{8}\cdot x,$$

即

$$x^3-6x-40=0.$$

将方程左端因式分解有

$$(x-4)(x^2+4x+10)=0.$$

因为

$$x^2+4x+10=(x+2)^2+6>0,$$

所以 $x-4=0$, $x=4$. 所以原式 $=4$.

解析 2

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}=\sqrt[3]{8+12\sqrt{2}+12+2\sqrt{2}}=\sqrt[3]{(2+\sqrt{2})^3}=2+\sqrt{2}.$$

同理 $\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=2-\sqrt{2}$. 所以

$$原式=(2+\sqrt{2})+(2-\sqrt{2})=4.$$

评注 解析 2 看似简单,但对于三次根号下的拼凑是很难的,因此本题解析 1 是一般常用的解法.

2.4.7 ★★ 化简:$\sqrt{9+\sqrt{53+8\sqrt{6}}}+\sqrt{9-\sqrt{53+8\sqrt{6}}}$.

解析 由于 $53^2-8^2\times 6=2\,425$,不为完全平方数,故对上式中每一项独立化简很困难. 注意到 $\sqrt{9+\sqrt{53+8\sqrt{6}}}$ 与 $\sqrt{9-\sqrt{53+8\sqrt{6}}}$ 互为共轭根式. 因此,我们可采取“以退为进”的方法,即先平方,再开方.

设 $m=\sqrt{9+\sqrt{53+8\sqrt{6}}}+\sqrt{9-\sqrt{53+8\sqrt{6}}}$,

则 $m^2=9+\sqrt{53+8\sqrt{6}}+9-\sqrt{53+8\sqrt{6}}+2\sqrt{9^2-(53+8\sqrt{6})}$,

$$
\begin{aligned}
m^2 &= 18+2\sqrt{28-8\sqrt{6}} \\
&= 18+2\sqrt{(2\sqrt{6})^2+2^2-2\cdot 2\sqrt{6}\cdot 2} \\
&= 18+2\sqrt{(2\sqrt{6}-2)^2} \\
&= 18+2(2\sqrt{6}-2)=14+4\sqrt{6} \\
&= (2\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2+2\cdot 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2} \\
&= (2\sqrt{3}+\sqrt{2})^2,
\end{aligned}
$$

即
$$m=2\sqrt{3}+\sqrt{2}.$$

所以
$$\sqrt{9+\sqrt{53+8\sqrt{6}}}+\sqrt{9-\sqrt{53+8\sqrt{3}}}=2\sqrt{3}+\sqrt{2}.$$

2.4.8 ★★ **化简**：$\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}$.

解析 设 $m=\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}$,

则
$$
\begin{aligned}
m^3 = {} & 1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}+1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}+3\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2\left(1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)} \\
& +3\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)\left(1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2}.
\end{aligned}
$$

而 $\left(1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)\left(1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)=-\frac{1}{27}$，所以

$$m^3=2-\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}-\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}.$$

即
$$m^3=2-m.\ m^3+m-2=0.$$
$$(m-1)(m^2+m+2)=0.$$

由于 $m^2+m+2=0$ 无实数根，所以 $m=1$.

所以
$$\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}=1.$$

2.4.9 ★★ **设有正数** $a_1=1$，$k\geqslant 2$ **时**，$a_k=a_{k-1}+2$，**求** $\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_{60}}+\sqrt{a_{61}}}$ **的值**.

解析 因为 $\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}=\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{a_{k+1}-a_k}=\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{2}$. 所以

原式$=\frac{1}{2}(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1})+\frac{1}{2}(\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2})+\cdots+\frac{1}{2}(\sqrt{a_{61}}-\sqrt{a_{60}})$

$=\frac{1}{2}(\sqrt{a_{61}}-\sqrt{a_1}).$

而 $a_1=1$，$a_{61}=121$.

原式 $=\frac{1}{2}(\sqrt{121}-\sqrt{1})=5.$

2.4.10 ★★ **计算**：$\frac{1}{3\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}+\frac{1}{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}}+\cdots$

$+\frac{1}{(2k+3)\sqrt{2k+1}+(2k+1)\sqrt{2k+3}}+\cdots$

$+\frac{1}{(2n+3)\sqrt{2n+1}+(2n+1)\sqrt{2n+3}}.$

解析　**先将通项的分母有理化，并裂项，得**

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(2k+3)\sqrt{2k+1}+(2k+1)\sqrt{2k+3}}\\=&\frac{(2k+3)\sqrt{2k+1}-(2k+1)\sqrt{2k+3}}{(2k+1)(2k+3)^2-(2k+1)^2(2k+3)}\\=&\frac{(2k+3)\sqrt{2k+1}-(2k+1)\sqrt{2k+3}}{2(2k+1)(2k+3)}\\=&\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+1}-\frac{\sqrt{2k+3}}{2k+3}\right)\\=&\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2k+1}}-\frac{1}{\sqrt{2k+3}}\right),\end{aligned}$$

所以，原式$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}-\frac{1}{\sqrt{2n+3}}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2n+3}}\right)=\frac{2n+3-\sqrt{2n+3}}{2(2n+3)}.$

2.4.11 ★★ **求**

$$\sqrt[256]{(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)\cdots(2^{256}+1)+1}$$

的值.

解析　**设根号内的式子为** A，**注意到** $1=(2-1)$，**及平方差公式**$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$，**所以**

$$\begin{aligned}A&=(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\cdots(2^{256}+1)+1\\&=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)\cdots(2^{256}+1)+1\end{aligned}$$

$$=(2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)\cdots(2^{256}+1)+1$$
$$=\cdots=(2^{256}-1)(2^{256}+1)+1$$
$$=2^{2\times256}-1+1=2^{2\times256},$$

所以 $\qquad$ 原式 $=\sqrt[256]{2^{2\times256}}=2^2=4.$

2.4.12 ★★ **计算** $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$.

解析 原式 $=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2^2-\left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^2}$

$$=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$
$$=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}$$
$$=\sqrt{4-3}=1.$$

2.4.13 ★★ **计算**：$S=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{2\,007^2}+\frac{1}{2\,008^2}}$.

解析 考察 S 中一般项，有

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}&=\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-\frac{2}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}}\\&=\sqrt{\left(\frac{n+1}{n}\right)^2-2\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}+\left(\frac{1}{n+1}\right)^2}\\&=\sqrt{\left(\frac{n+1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)^2}\\&=\frac{n+1}{n}-\frac{1}{n+1}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}S=&\left(1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\\&+\left(1+\frac{1}{2\,007}-\frac{1}{2\,008}\right)=2\,007+1-\frac{1}{2\,008}=2\,007\frac{2\,007}{2\,008}\end{aligned}$$

2.4.14 ★★ (1) **求证**：

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}+\frac{a^2}{(ab+1)^2}}=\left|a+\frac{1}{b}-\frac{a}{ab+1}\right|;$$

(2) 计算：$\sqrt{1+2\,007^2+\dfrac{2\,007^2}{2\,008^2}}-\dfrac{1}{2\,008}$.

解析 (1) 因为

$$\begin{aligned}&\left(a+\frac{1}{b}-\frac{a}{ab+1}\right)^2\\&=a^2+\frac{1}{b^2}+\frac{a^2}{(ab+1)^2}+2\left[\frac{a}{b}-\frac{a^2}{ab+1}-\frac{a}{(ab+1)b}\right]\\&=a^2+\frac{1}{b^2}+\frac{a^2}{(ab+1)^2}+2\left[\frac{a(ab+1)-a^2b-a}{(ab+1)b}\right]\\&=a^2+\frac{1}{b^2}+\frac{a^2}{(ab+1)^2},\end{aligned}$$

上式两边开平方，得

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}+\frac{a^2}{(ab+1)^2}}=\left|a+\frac{1}{b}-\frac{a}{ab+1}\right|.$$

(2) 在(1)中令 $a=2\,007,\ b=1$，则

$$\sqrt{1+2\,007^2+\frac{2\,007^2}{2\,008^2}}=\left|2\,007+1-\frac{2\,007}{2\,008}\right|=2\,007\,\frac{1}{2\,008},$$

所以，$\sqrt{1+2\,007^2+\dfrac{2\,007^2}{2\,008^2}}-\dfrac{1}{2\,008}=2\,007$.

2.4.15 ★ 已知 $a=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{1}$，求 $\dfrac{3}{a}+\dfrac{3}{a^2}+\dfrac{1}{a^3}$ 的值.

解析 因为 $(\sqrt[3]{2}-1)a=2-1$，即 $\dfrac{1}{a}=\sqrt[3]{2}-1$.

所以 $\dfrac{3}{a}+\dfrac{3}{a^2}+\dfrac{1}{a^3}=\dfrac{1}{a}\left[3+\dfrac{3}{a}+\dfrac{1}{a^2}\right]=(\sqrt[3]{2}-1)[3+3(\sqrt[3]{2}-1)+(\sqrt[3]{2}-1)^2]$

$$=(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1)=2-1=1.$$

2.4.16 ★ 已知 $x=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}},\ y=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$，求 $\dfrac{y}{x^2}+\dfrac{x}{y^2}$ 的值.

解析 因为 $xy=1,\ x+y=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2=10$，
所以

$$\begin{aligned}\frac{y}{x^2}+\frac{x}{y^2}&=\frac{x^3+y^3}{x^2y^2}=\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{(xy)^2}\\&=\frac{(x+y)[(x+y)^2-3xy]}{(xy)^2}=10(10^2-3)=970.\end{aligned}$$

2.4.17 ★★ 若 $x>0,\ y>0$，且 $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}=8$，求 $x^{\frac{2}{3}}+$

$y^{\frac{2}{3}}$ 的值.

解析 设 $x^{\frac{2}{3}}=p$, $y^{\frac{2}{3}}=q$,那么

$$\sqrt[3]{x^4y^2}=x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}=p^2q,\ \sqrt[3]{x^2y^4}=x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}}=pq^2.$$

所以
$$x^2=p^3,\ y^2=q^3,$$

于是,原式即
$$\sqrt{p^3+p^2q}+\sqrt{q^3+pq^2}=8,$$
$$p\sqrt{p+q}+q\sqrt{p+q}=8,$$
$$(p+q)\sqrt{p+q}=8.$$
$$(p+q)^{\frac{3}{2}}=8,\ p+q=8^{\frac{2}{3}}=4.$$

即
$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=4.$$

2.4.18 ★★ 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+2x+1}+\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[3]{x^2-2x+1}}$,求 $f(1)+f(3)+f(5)+\cdots+f(2k-1)+\cdots+f(999)$ 的值.

解析 因为
$$f(x)=\frac{1}{(\sqrt[3]{x+1})^2+\sqrt[3]{(x+1)(x-1)}+(\sqrt[3]{x-1})^2}$$
$$=\frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}}{(\sqrt[3]{x+1})^3-(\sqrt[3]{x-1})^3}$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}),$$

所以,$f(1)+f(3)+f(5)+\cdots+f(999)=\dfrac{1}{2}[(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{0})+(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2})+(\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{4})+\cdots+(\sqrt[3]{1\,000}-\sqrt[3]{998})]=\dfrac{1}{2}(\sqrt[3]{1\,000}-\sqrt[3]{0})=5.$

2.4.19 ★★ 设 $1\,995x^3=1\,996y^3=1\,997z^3$,$xyz>0$,且

$$\sqrt[3]{1\,995x^2+1\,996y^2+1\,997z^2}=\sqrt[3]{1\,995}+\sqrt[3]{1\,996}+\sqrt[3]{1\,997},$$

求 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$ 的值.

解析 因 $xyz>0$,可设 $1\,995x^3=1\,996y^3=1\,997z^3=k>0$,则 $1\,995=\dfrac{k}{x^3}$,$1\,996=\dfrac{k}{y^3}$,$1\,997=\dfrac{k}{z^3}$.代入已知式得

$$\sqrt[3]{\frac{k}{x}+\frac{k}{y}+\frac{k}{z}}=\sqrt[3]{\frac{k}{x^3}}+\sqrt[3]{\frac{k}{y^3}}+\sqrt[3]{\frac{k}{z^3}},$$

两边立方,化简,得

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^{3}.$$

因为 $x>0$，$y>0$，$z>0$，所以 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$.

2.4.20 ★★ 已知 $a>0$，$b>0$，当 $x=\frac{2ab}{b^2+1}$ 时，求

$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$$

的值.

解析　当 $x=\frac{2ab}{b^2+1}$ 时，

$$\sqrt{a+x}=\sqrt{a+\frac{2ab}{b^2+1}}=\sqrt{\frac{a(b+1)^2}{b^2+1}}=\frac{(b+1)\sqrt{a}}{\sqrt{b^2+1}}. \qquad ①$$

同样(但请注意算术根!)

$$\sqrt{a-x}=\frac{|b-1|\sqrt{a}}{\sqrt{b^2+1}}. \qquad ②$$

将①，②代入原式有

$$\text{原式}=\frac{\frac{(b+1)\sqrt{a}}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{|b-1|\sqrt{a}}{\sqrt{b^2+1}}}{\frac{(b+1)\sqrt{a}}{\sqrt{b^2+1}}-\frac{|b-1|\sqrt{a}}{\sqrt{b^2+1}}}=\frac{(b+1)+|b-1|}{(b+1)-|b-1|}$$

$$=\begin{cases}b, & \text{当 } b\geqslant 1 \text{ 时;}\\ \frac{1}{b}, & \text{当 } b<1 \text{ 时.}\end{cases}$$

2.4.21 ★★ 化简 $\sqrt[3]{\frac{(\sqrt{a-1}-\sqrt{a})^5}{\sqrt{a-1}+\sqrt{a}}}+\sqrt[3]{\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{a-1})^5}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}}$.

解析　原式$=-\sqrt[3]{\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{a-1})^5}{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}}+\sqrt[3]{\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{a-1})^5}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}}$

$$=-\sqrt[3]{(\sqrt{a}-\sqrt{a-1})^6}+\sqrt[3]{(\sqrt{a}+\sqrt{a-1})^6}$$

$$=-(\sqrt{a}-\sqrt{a-1})^2+(\sqrt{a}+\sqrt{a-1})^2$$

$$=4\sqrt{a(a-1)}.$$

2.4.22 ★★ **化简** $y=\dfrac{x}{a}\cdot\dfrac{\sqrt{x^4-a^4}}{x^2-a^2}\cdot\sqrt{\dfrac{1-\dfrac{a^2}{x^2}}{1+\dfrac{x^2}{a^2}}}$.

解析 $$y=\frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{(x^2-a^2)(x^2+a^2)}}{x^2-a^2}\cdot\sqrt{\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}}\cdot\frac{|a|}{|x|}$$
$$=\frac{x}{a}\cdot\frac{|a|}{|x|}\cdot\frac{\sqrt{x^2-a^2}\cdot\sqrt{x^2+a^2}\cdot\sqrt{x^2-a^2}}{(x^2-a^2)\sqrt{x^2+a^2}}$$
$$=\frac{x}{a}\cdot\frac{|a|}{|x|}.$$

若 $a>0$,则 $y=\dfrac{x}{|x|}=\begin{cases}1, & \text{当 } x>a \text{ 时},\\ -1, & \text{当 } x<-a \text{ 时}.\end{cases}$

若 $a<0$,则 $y=-\dfrac{x}{|x|}=\begin{cases}-1, & \text{当 } x>-a \text{ 时},\\ 1, & \text{当 } x<a \text{ 时}.\end{cases}$

2.4.23 ★★ **化简** $S=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}\ (x>1)$.

解析 因为 $$x\pm2\sqrt{x-1}=(\sqrt{x-1})^2\pm2\sqrt{x-1}+1$$
$$=(\sqrt{x-1}\pm1)^2,$$

$$S=(\sqrt{x-1}+1)+|\sqrt{x-1}-1|$$
$$=\begin{cases}2\sqrt{x-1}, & (\text{若 } x\geqslant2)\\ 2 & (1<x<2)\end{cases}$$

2.4.24 ★★ **已知** $x=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$, $(a>0,\ b>0)$. **计算** $Q=\dfrac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$.

解析 由 $x=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$,得 $x=\dfrac{\sqrt{ab}(a+b)}{2ab}$.

所以 $$\sqrt{x^2-1}=\sqrt{\frac{ab(a+b)^2}{4a^2b^2}-1}=\sqrt{\frac{(a-b)^2}{4ab}}$$
$$=\frac{|a-b|}{2\sqrt{ab}}.$$

代入原式,得 $Q=\dfrac{2b\cdot\dfrac{|a-b|}{2\sqrt{ab}}}{\dfrac{\sqrt{ab}(a+b)}{2ab}-\dfrac{|a-b|}{2\sqrt{ab}}}=\dfrac{2b|a-b|}{(a+b)-|a-b|}$

$$=\begin{cases}a-b, & (a\geqslant b)\\ \dfrac{b}{a}(b-a). & (0<a<b)\end{cases}$$

评注 当 $a<0$，$b<0$ 时，其结果如下：

$$Q=\begin{cases}-\dfrac{b}{a}(a-b), & (a\geqslant b)\\ a-b. & (a<b<0)\end{cases}$$

2.4.25 ★★ 已知 $a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}=1$，求 a^2+b^2 的值.

解析 移项，两边平方，得

$$a^2(1-b^2)=1-2b\sqrt{1-a^2}+b^2(1-a^2),$$

化简，得

$$2b\sqrt{1-a^2}=(b^2-a^2)+1.$$

两边再平方，得

$$4b^2(1-a^2)=(b^2-a^2)^2+2(b^2-a^2)+1,$$

整理得
$$(a^2+b^2)^2-2(a^2+b^2)+1=0,$$

即
$$(a^2+b^2-1)^2=0,$$

所以
$$a^2+b^2=1.$$

2.4.26 ★★ 化简：

(1) $\sqrt{1+a^2+\sqrt{1+a^2+a^4}}$； (2) $\sqrt{y+2+3\sqrt{2y-5}}$.

解析

(1) 原式 $=\sqrt{\dfrac{2+2a^2+2\sqrt{1+a^2+a^4}}{2}}$

$$=\sqrt{\frac{(a^2+a+1)+2\sqrt{(a^2+a+1)(a^2-a+1)}+(a^2-a+1)}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{(\sqrt{a^2+a+1}+\sqrt{a^2-a+1})^2}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{a^2+a+1}+\sqrt{a^2-a+1}).$$

(2) 原式 $=\sqrt{\dfrac{2y+4+6\sqrt{2y-5}}{2}}$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2y+4+2\sqrt{18y-45}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{(2y-5)+2\sqrt{18y-45}+9}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2y-5}+3).$$

评注 (2)也可用换元法来化简：

令 $\sqrt{2y-5}=x\left(y\geqslant\frac{5}{2}\right)$，则 $y=\frac{x^2+5}{2}$.

$$\text{原式}=\sqrt{\frac{x^2+5}{2}+2+3x}=\sqrt{\frac{x^2+6x+9}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+3)(\text{因为 } x\geqslant 0)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2y-5}+3).$$

2.4.27 ★★ 化简：$\sqrt[3]{a+\frac{a+8}{3}\sqrt{\frac{a-1}{3}}}+\sqrt[3]{a-\frac{a+8}{3}\sqrt{\frac{a-1}{3}}}$.

解析 用换元法.

设 $x=\sqrt{\frac{a-1}{3}}$，则 $a=3x^2+1$，$\frac{a+8}{3}=x^2+3$. 所以

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\sqrt[3]{3x^2+1+(x^2+3)x}+\sqrt[3]{3x^2+1-(x^2+3)x}\\&=\sqrt[3]{1+3x+3x^2+x^3}+\sqrt[3]{1-3x+3x^2-x^3}\\&=\sqrt[3]{(1+x)^3}+\sqrt[3]{(1-x)^3}\\&=(1+x)+(1-x)=2.\end{aligned}$$

2.4.28 ★★ 若 $a=\sqrt{2}+1$，计算

$$\text{共有 2 000 层}\left\{\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\cdots\frac{1}{2+\frac{1}{a}}}}}\right.$$

的值.

解析 先计算几层，看一看有无规律可循.

因为 $a=\sqrt{2}+1$，所以

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1,$$

所以 $$2+\frac{1}{a}=\sqrt{2}-1+2=\sqrt{2}+1=a,$$

所以 $$\frac{1}{2+\frac{1}{a}}=\frac{1}{a}=\sqrt{2}-1.$$

所以,不论多少层,原式 $=\frac{1}{a}=\sqrt{2}-1$.

2.4.29 ★★ 求根式 $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{\cdots}}}}}$ 的值.

解析　用构造方程的方法来解. 设原式为 x,利用根号的层数是无限的特点,有

$$\sqrt{2-\sqrt{2+x}}=x,$$

两边平方得

$$2-\sqrt{2+x}=x^2,$$

即 $$2-x^2=\sqrt{2+x}.$$

两边再平方得

$$x^4-4x^2+4=2+x,$$

所以 $$x^4-4x^2-x+2=0.$$

观察发现,当 $x=-1,\ 2$ 时,方程成立. 因此,方程左端必有因式 $(x+1)(x-2)$,将方程左端因式分解,有

$$(x+1)(x-2)(x^2+x-1)=0.$$

所以 $$x=-1,\ x=2,\ x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

又因为 $0<x<2$,所以 $x=-1,\ x=2,\ x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ 应舍去,所以 $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 即

$$\text{原式}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

2.4.30 ★★ 设 $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$ 的整数部分为 x,小数部分为 y,试求 $x^2+\frac{1}{2}xy+y^2$ 的值.

解析　因为

$$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}=\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}=2+\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

而 $0<\frac{\sqrt{5}-1}{2}<1$,所以 $x=2$，$y=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,所以

$$\begin{aligned} x^2+\frac{1}{2}xy+y^2 &= 4+\frac{1}{2}\times 2\times\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 \\ &= 4+\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)+\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})=5. \end{aligned}$$

学奥数

这里总有一本适合你

华东师范大学出版社

学奥数，这里总有一本适合你

2000 年华东师范大学出版社出版了《奥数教程》丛书，首次在书名中使用“奥数”一词。《奥数教程》由国家集训队教练组执笔联合编写，获得第十届全国教育图书展优秀畅销图书奖，深受读者喜爱，被奉为经典奥数蓝皮书。

自《奥数教程》出版以来，华东师范大学出版社聚集国内最顶尖的作者团队，陆续为不同层次、不同需求的读者打造了近 200 种奥数图书, 形成多品种、多层次、全系列的格局，“奥数”图书累计销量超 1000 万册，由此奠定了奥数品牌出版社的地位。

“奥数”入门篇——《从课本到奥数》（1-9 年级） A 、B 版

“奥数”智优篇——《优等生数学》（1-9 年级）

“奥数”辅导篇——《奥数教程》、《学习手册》、《能力测试》（一至高三年级）

“奥数”小学顶级篇——《高思学校竞赛数学课本》、《高思学校竞赛数学导引》

“奥数”专题篇——《数学奥林匹克小丛书》（小学、初中、高中共 30 种）

“奥数”题库篇——《多功能题典 数学竞赛》（小学、初中、高中共 3 种）

“奥数”高中预赛篇——《高中数学联赛备考手册（预赛试题集锦)》

“奥数”联赛冲刺篇——《高（初）中数学联赛考前辅导》

“奥数”IMO 终极篇——《走向 IMO：数学奥林匹克试题集锦》

“奥数”域外篇——《日本小学数学奥林匹克》、《全俄中学生数学奥林匹克》