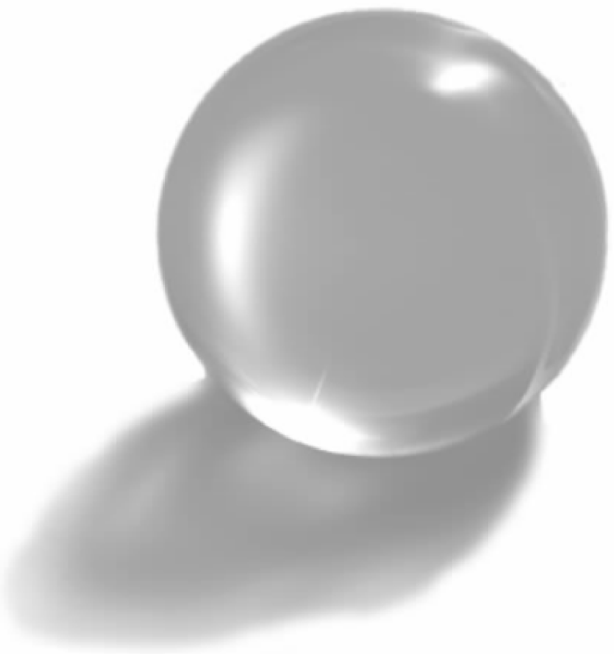
初中数学联赛考前辅导

主　编　熊　斌　冯志刚
参编者　张思汇　柯新立　陈建豪



华东师范大学出版社

前　言

preface

数学竞赛对于激发学生的学习兴趣、开发智力、培养数学探索能力和创新能力、开拓视野有着非常积极的作用.通过开展数学竞赛活动,可以更好地发现和培养优秀学生,让他们得到进一步发展,同时也能提高教师的教学和科研水平,促进教学改革.

“全国初中数学联赛”和“全国初中数学竞赛”于每年4月份举行.本书是为准备参加“全国初中数学联赛”和“全国初中数学竞赛”的同学编写的,辅导数学竞赛的老师也可以作为参考资料.许多同学在参加“全国初中数学联赛”和“全国初中数学竞赛”前夕,都会碰到这样的问题:应该如何复习,选择什么书来看,找一些怎样的题来做,是否还有什么知识和内容没有复习到等等.为此,我们把“全国初中数学联赛”和“全国初中数学竞赛”中的一些重要知识和内容,重要的数学思想方法和解题技巧重新梳理和整合,精选了一些经典赛题和作者自编的题目进行详细的分析和解答,为同学们在考前复习提供一本有效的参考资料,以提高学生的解题能力和应试能力.

书中每一讲包括4个部分:(1)知识梳理:主要着重介绍全国初中数学联赛(竞赛)的考试热点、难点及相关的拓展知识,以及该类问题一般的解题方法和特别的方法.(2)例题精讲:围绕全国初中数学联赛(竞赛)的考点、热点、难点,精选一些经典的赛题和作者自编的题目进行详细的分析和解答,以启发学生的解题思路和解题方法,进而提高学生分析问题和解决问题的能力.(3)实战演练:有针对性地选择一些与该部分内容有关的新题和好题,以利于学生巩固强化.题目分A组、B组,A组题相对容易些,B组题有一定的难度.(4)参考答案:对实战演练题给出参考答案,供同学们参考.

本书最后给出了4套模拟试题供同学们考前模拟测试用,以检验同学们的综合能力.

参加本书编写的都是在数学竞赛命题和辅导第一线的教师,其中有国家队的领队和教练,有培养出多名国际数学奥林匹克金牌选手的教师,还有参与各级各类数学竞赛命题的专家.本书第一版的编写者为熊斌、冯志刚、张思汇、柯新立、徐惟简、黄诚、黄忠裕.第二版的编写者为熊斌、冯志刚、张思汇、柯新立、陈建豪.

熊　斌　冯志刚

2010年12月8日

目　　录

contents

第 1 讲　实数及其绝对值

【知识梳理】

1. 有理数　形如 $\frac{m}{n}$($n \neq 0$,且 m 与 n 是互质的整数)的数叫做有理数,或者称有限小数或循环小数为有理数.

2. 无理数　不能用分数(包括分母为 1 的情形)表示的数叫做无理数.或者称无限不循环小数为无理数.

3. 实数　有理数和无理数统称为实数.全体实数和数轴上的点一一对应.在实数集内进行加、减、乘、除(除数不为零)运算,其结果仍是实数.任一实数都可以开奇次方,其结果仍为实数;当被开方数为非负数时,可以开偶次方,其结果仍是实数.

实数有无穷多个,既没有最大的实数,也没有最小的实数.任意两个实数,可以比较大小.

设 a 为有理数,b 为无理数,则 $a+b$、$a-b$ 是无理数;当 $a \neq 0$ 时,ab、$\frac{a}{b}$、$\frac{b}{a}$ 也是无理数.

设 a、b、c、d 是有理数,x 为无理数,且 $a+cx=b+dx$,则 $a=b$, $c=d$.

4. 绝对值　一个实数 a 的绝对值就是数轴上表示数 a 的点与原点的距离,记作 $|a|$.

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{当 } a \geqslant \text{ 时}, \\ -a, & \text{当 } a<0 \text{ 时}. \end{cases}$$

正数的绝对值是它的本身,负数的绝对值为它的相反数,零的绝对值是零.

5. 绝对值的性质

(1) $|a| \geqslant a$, $|a| \geqslant -a$;

(2) $|ab|=|a| \cdot |b|$;

(3) $|a^n|=|a|^n$(n 为正整数);

(4) $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$($b \neq 0$);

(5) $|a-b|=|b-a|$;

(6) $|a|-|b| \leqslant |a+b| \leqslant |a|+|b|$;

(7) 若 $|a|=|b|$,则 $a=b$(当 a, b 同号时),或 $a=-b$(当 a, b 异号时);

(8) 若 $a>0$,则

$$|x| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a;\ |x| \geqslant a \Leftrightarrow x \leqslant -a \text{ 或 } x \geqslant a.$$

【例题精讲】

【例 1】 若两个不同的实数 a、b 使得 a^2+b 和 $a+b^2$ 都是有理数，则称数对 (a, b) 是"和谐"的.

(1) 试找出一对无理数 a、b，使得 (a, b) 是"和谐"的；

(2) 证明：若 (a, b) 是"和谐"的，且 $a+b$ 是不等于 1 的有理数，则 a，b 都是有理数；

(3) 证明：若 (a, b) 是"和谐"的，且 $\frac{a}{b}$ 是有理数，则 a，b 都是有理数.（2009 年上海市初中数学竞赛）

【解】 (1) 令 $a=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$，$b=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$，则 (a, b) 是"和谐"的.（本小题答案不是唯一的）

(2) 按题设 $(a^2+b)-(b^2+a)=(a-b)(a+b-1)$ 为有理数，记为 q.

因为 $a+b-1 \neq 0$，且为有理数，所以 $a-b=\frac{q}{a+b-1}$ 为有理数.

又 $a+b$ 为有理数，所以 $a=\frac{(a+b)+(a-b)}{2}$ 为有理数，$b=\frac{(a+b)-(a-b)}{2}$ 为有理数.

(3) 记 $\frac{a}{b}=k$，按题设 k 为有理数，且 $k \neq 1$（因为 $a \neq b$）.

若 $k=0$，则 $a=0$，$b=a^2+b$ 都为有理数.

当 $k \neq 0$ 时，$a=kb$，$a^2+b=b(k^2b+1)$，$b^2+a=b(b+k)$ 都是有理数.

若 $b=-k$，则 b 为有理数，$a=kb$ 也为有理数.

若 $b \neq -k$，则 $\frac{k^2b+1}{b+k}=\frac{a^2+b}{b^2+a}$ 为有理数.

令 $\frac{k^2b+1}{b+k}=r$，则 $b(r-k^2)=1-rk$.

若 $r=k^2$，则 $k^3=1$，$k=1$ 导致矛盾.

所以 $r \neq k^2$，$b=\frac{1-rk}{r-k^2}$ 为有理数，进而 $a=kb$ 也为有理数.

【例 2】 设 a、b 及 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 都是整数，证明：$\sqrt{a}$ 及 $\sqrt{b}$ 都是整数.

【分析】 欲证 $\sqrt{a}$ 及 $\sqrt{b}$ 都是整数，只需证明 $\sqrt{a}$ 与 $\sqrt{b}$ 都是有理数即可.

【证明】 先证一个引理：若 n 是正整数，且 $\sqrt{n}$ 是有理数，则 n 是完全平方数.

设 $\sqrt{n}=\dfrac{p}{q}$，p、q 为互质的正整数，则 $nq^2=p^2$.

从而 $q^2\mid p^2$，$q\mid p$，故 $q=1$. 所以 $n=p^2$. 引理得证.

现在回到本题. 由题设知，a、b 为非负整数. 当 $a=0$ 或 $b=0$ 时，易知结论成立.

当 a、b 都是正整数时，由 $\sqrt{b}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})-\sqrt{a}$ 两边平方，得

$$b=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-2\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})+a,$$

所以
$$\sqrt{a}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2+a-b}{2(\sqrt{a}+\sqrt{b})},$$

由题设知，$\sqrt{a}$ 是有理数，结合引理知，a 是完全平方数，故 $\sqrt{a}$ 是整数. 同理 $\sqrt{b}$ 也是整数，于是命题得证.

说明　本题中的引理是一个非常重要的结论，我们在解题中常常要用到它，希望读者能够牢记.

【例 3】 设 a、b 是实数，对所有正整数 $n(\geqslant 2)$，a^n+b^n 都是有理数，证明：$a+b$ 是有理数.

【分析】 由题意，a^2+b^2，a^3+b^3，a^4+b^4，… 都是有理数. 而 a^n+b^n 有如下“递推关系”：

$$a^{n+2}+b^{n+2}=(a+b)(a^{n+1}+b^{n+1})-ab(a^n+b^n),$$

所以
$$a^4+b^4=(a+b)(a^3+b^3)-ab(a^2+b^2),$$
$$a^5+b^5=(a+b)(a^4+b^4)-ab(a^3+b^3),$$

从中解出 $a+b$ 即可.

【证明】 设 $x=a+b$，$y=ab$，则有

$$a^4+b^4=(a^3+b^3)x-(a^2+b^2)y,$$
$$a^5+b^5=(a^4+b^4)x-(a^3+b^3)y.$$

消去 y，得

$$\begin{aligned}&[(a^2+b^2)(a^4+b^4)-(a^3+b^3)^2]x\\=\ &(a^2+b^2)(a^5+b^5)-(a^3+b^3)(a^4+b^4),\end{aligned}$$

所以，当 $(a^2+b^2)(a^4+b^4)-(a^3+b^3)^2\neq 0$，即 $ab(a-b)\neq 0$ 时，

$$x=\frac{(a^2+b^2)(a^5+b^5)-(a^3+b^3)(a^4+b^4)}{(a^2+b^2)(a^4+b^4)-(a^3+b^3)^2}$$

是有理数.

当 $ab(a-b)=0$ 时，若 a、b 全为 0，则结论成立；若 a、b 中恰有一个为 0，不妨设 $a=0$，则 $b=\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}$ 为有理数，从而 $a+b=b$ 为有理数；若 $a-b=0$，且 a、b 均不为 0，则

$$\begin{aligned} a+b &= \frac{a^3+b^3}{a^2+b^2-ab} = \frac{a^3+b^3}{a^2+b^2+\dfrac{(a-b)^2-(a^2+b^2)}{2}} \\ &= \frac{2(a^3+b^3)}{a^2+b^2} \end{aligned}$$

是有理数.

从而命题得证.

说明　本题分析中给出的递推关系：$a^{n+2}+b^{n+2}=(a+b)(a^{n+1}+b^{n+1})-ab(a^n+b^n)$ 非常重要. 遇到涉及 a^n+b^n 类型的问题时，利用这一递推关系，可以帮助我们解题.

【例 4】 $[x]$表示不超过实数 x 的最大整数，令 $\{x\}=x-[x]$.

(1) 找出一个实数 x，满足 $\{x\}+\left\{\frac{1}{x}\right\}=1$；

(2) 证明：满足上述等式的 x，都不是有理数.（1990 年全国初中数学联赛）

【分析】 设 $[x]=m$，$\{x\}=\alpha$，$\left[\frac{1}{x}\right]=n$，$\left\{\frac{1}{x}\right\}=\beta$，则 m、n 是整数，$0\leqslant\alpha$，$\beta<1$. 由题设 $\alpha+\beta=1$，所以 $x+\frac{1}{x}=m+n+\alpha+\beta=m+n+1$，$x^2-(m+n+1)x+1=0$，$x=\frac{1}{2}(m+n+1\pm\sqrt{(m+n+1)^2-4})$.

令 $m+n+1=3$，则 $x=\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{5})$，再验证它满足$\{x\}+\left\{\frac{1}{x}\right\}=1$.

【解】 (1) 取 $x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$，则$\frac{1}{x}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$，于是$\{x\}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}-2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，$\left\{\frac{1}{x}\right\}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$，所以

$$\{x\}+\left\{\frac{1}{x}\right\}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\frac{3-\sqrt{5}}{2}=1.$$

(2) 设 $x=m+\alpha$，$\frac{1}{x}=n+\beta$，其中 m、n 是整数，$0\leqslant\alpha$，$\beta<1$. 则 $\alpha+\beta=1$，$x+\frac{1}{x}=m+n+1$. 于是

$$x^2-(m+n+1)x+1=0,$$
$$x=\frac{1}{2}(m+n+1\pm\sqrt{(m+n+1)^2-4}).$$

当 $(m+n+1)^2=4$ 时，$x=\pm 1$，均不满足 $\{x\}+\left\{\frac{1}{x}\right\}=1$.

当 $(m+n+1)^2>4$ 时，若

$$(m+n+1)^2-4=k^2,$$

其中 k 为正整数，则

$$(m+n+1-k)(m+n+1+k)=4.$$

由于 $m+n+1-k<m+n+1+k$，且 $m+n+1-k$ 与 $m+n+1+k$ 同奇偶，所以

$$\begin{cases}m+n+1-k=-2,\\ m+n+1+k=-2\end{cases} 或 \begin{cases}m+n+1-k=2,\\ m+n+1+k=2\end{cases}$$

均不可能. 故 $(m+n+1)^2-4$ 不是完全平方数，从而 x 是无理数.

说明　对于整系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$，若 $\Delta=b^2-4ac(>0)$ 不是完全平方数，则它的根是无理根.

下面我们来讨论几个与绝对值有关的问题.

【例 5】 若实数 a、b 满足 $3\sqrt{a}+5|b|=7$，求 $S=2\sqrt{a}-3|b|$ 的取值范围.（1997 年全国初中数学联赛）

【分析】 利用已知条件分别消去 b、a，得 $21+5S=19\sqrt{a}$，$14-3S=19|b|$，再利用 $\sqrt{a}$ 与 $|b|$ 是非负数便可得 S 的取值范围.

【解】 由题设分别消去 b、a，得

$$21+5S=19\sqrt{a},$$
$$14-3S=19|b|.$$

而 $\sqrt{a}\geqslant 0$，$|b|\geqslant 0$，所以

$$\begin{cases}21+5S\geqslant 0,\\ 14-3S\geqslant 0,\end{cases}$$

所以

$$-\frac{21}{5}\leqslant S\leqslant\frac{14}{3}.$$

反之，若 S 满足不等式 $-\frac{21}{5}\leqslant S\leqslant\frac{14}{3}$，则易知存在 a、b 满足题设条件.

所以，所求的 S 的取值范围为 $-\frac{21}{5}\leqslant S\leqslant\frac{14}{3}$.

【例 6】 关于 x 的方程 $|x^2-2|x|+3|=2\sqrt{9-6x+x^2}-1$ 有几个实根？（1998

年全国高中理科班招生考试试题）

【解】 由于 $x^2-2|x|+3=(|x|-1)^2+2>0$，所以原方程可化为

$$x^2-2|x|+3=2|x-3|-1. \quad ①$$

(1) 当 $x<0$ 时，方程 ① 为 $x^2+2x+3=2(3-x)-1$，

即 $$x^2+4x-2=0,$$

解得 $$x=-2\pm\sqrt{6}.$$

结合 $x<0$，得 $x_1=-2-\sqrt{6}$.

(2) 当 $0\leqslant x<3$ 时，方程 ① 为 $x^2-2x+3=2(3-x)-1$，即 $x^2=2$，解得 $x=\pm\sqrt{2}$.

结合 $0\leqslant x<3$，得 $x_2=\sqrt{2}$.

(3) 当 $x\geqslant 3$ 时，方程 ① 为 $x^2-2x+3=2(x-3)-1$，即 $x^2-4x+10=0$，此方程无实根.

综上所述，原方程有两个实根.

说明 在解答与绝对值有关的方程和不等式时，常常需要把绝对值符号先去掉，于是，我们就必须分几种情况来讨论. 这是我们处理含绝对值的方程和不等式的常用方法.

【例 7】 求使方程

$$|x-1|-|x-2|+2|x-3|=c$$

恰好有两个解的所有实数 c.（1997 年全国高中理科班招生考试试题）

【解】 先作出 $y=|x-1|-|x-2|+2|x-3|$ 的图象. 由

$$y=|x-1|-|x-2|+2|x-3|=\begin{cases}-2x+5, & \text{当 } x<1 \text{ 时},\\ 3, & \text{当 } 1\leqslant x<2 \text{ 时},\\ -2x+7, & \text{当 } 2\leqslant x<3 \text{ 时},\\ 2x-5, & \text{当 } x\geqslant 3 \text{ 时},\end{cases}$$

可得图象如图 1 - 1 所示：

从图 1 - 1 中可知，当且仅当 $1<c<3$ 或 $c>3$ 时，$y=c$ 的图象与 $y=|x-1|-|x-2|+2|x-3|$ 有两个不同的交点. 所以，所求的 c 为 $1<c<3$ 或 $c>3$.

说明 本题解答所用的方法是“数形结合法”. 通过函数的图象，可以“直观”地解决问题. 本题也可以通过分类讨论的方法解决. 请读者自己试一试.

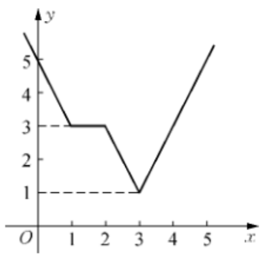


图 **1 - 1**

【例 8】 已知实数 a、b、c 满足不等式

$$|a| \geqslant |b+c|, |b| \geqslant |c+a|, |c| \geqslant |a+b|,$$

求证：$a+b+c=0$.（2000 年上海市高中理科班、数学班招生考试试题）

【证明】 由题设，对三个不等式两边平方，得

$$a^2 \geqslant b^2+2bc+c^2,$$
$$b^2 \geqslant c^2+2ca+a^2,$$
$$c^2 \geqslant a^2+2ab+b^2,$$

把上面三个不等式相加，便得

$$0 \geqslant a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca,$$

即 $$(a+b+c)^2 \leqslant 0,$$

所以 $$a+b+c=0.$$

说明 两边平方，这也是去掉绝对值符号的一个常用方法. 需要注意的是，在两边平方前，先观察一下两边是否都是非负的.

【例 9】 已知实数 a、b、c 满足：$a+b+c=2$，$abc=4$.

(1) 求 a、b、c 中的最大者的最小值；

(2) 求 $|a|+|b|+|c|$ 的最小值.（2003 年全国初中数学竞赛）

【解】 (1) 不妨先设 $a=\max\{a, b, c\}$，再求 a 的最小值. 由题设知 $a>0$，且

$$b+c=2-a, bc=\frac{4}{a}.$$

因为 $(b+c)^2 \geqslant 4bc$，所以

$$(2-a)^2 \geqslant 4 \cdot \frac{4}{a},$$
$$a^3-4a^2+4a-16 \geqslant 0,$$
$$(a^2+4)(a-4) \geqslant 0,$$

所以，$a \geqslant 4$.

又当 $a=4$，$b=c=-1$ 时，满足题设条件. 所以 a 的最小值为 4，即 a、b、c 中的最大者的最小值为 4.

(2) 因为 $abc=4>0$，所以 a、b、c 为全大于 0 或一正二负.

若 a、b、c 均大于 0，由(1)知，a、b、c 中的最大者不小于 4，这与 $a+b+c=2$ 矛盾.

若 a、b、c 为一正二负，不妨设 $a>0$，$b<0$，$c<0$. 则

$$|a|+|b|+|c|=a-b-c=a-(2-a)=2a-2,$$

由(1)知，$a \geqslant 4$，所以

$$|a|+|b|+|c| \geqslant 2\times 4-2=6,$$

当 $a=4$，$b=c=-1$ 时等号成立.

故$|a|+|b|+|c|$的最小值为 6.

【实战演练】

A 组

一、选择题

1. 若 $|(3a-b-4)x|+|(4a+b-3)y|=0$，且 $xy\neq 0$，则$|2a|-3|b|$等于(　　). (1999 年全国高中理科班招生考试试题)

(A) -1　　(B) 0　　(C) 1　　(D) 2

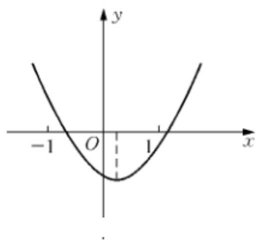
2. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示，并设 $M=|a+b+c|-|a-b+c|+|2a+b|-|2a-b|$，则(　　). (2002 年全国初中数学联赛)

(A) $M>0$

(B) $M=0$

(C) $M<0$

(D) 不能确定 M 为正、为负或为 0



(第 2 题图)

3. 若 a、b、c 均为整数且满足 $(a-b)^{10}+(a-c)^{10}=1$，则 $|a-b|+|b-c|+|c-a|=$(　　).

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

4. 已知 $\dfrac{1}{a}-|a|=1$，那么代数式 $\dfrac{1}{a}+|a|$ 的值为(　　). (1999 年全国初中数学竞赛)

(A) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　(B) $-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　(C) $-\sqrt{5}$　　(D) $\sqrt{5}$

5. 有下列三个命题：

(甲) 若 α、β 是不相等的无理数，则 $\alpha\beta+\alpha-\beta$ 是无理数.

(乙) 若 α、β 是不相等的无理数，则 $\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$ 是无理数；

(丙) 若 α、β 是不相等的无理数，则 $\sqrt{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}$ 是无理数.

其中正确命题的个数是(　　). (1999 年全国初中数学联赛)

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

二、填空题

6. 如果实数 a、b 满足条件 $a^2+b^2=1$，$|1-2a+b|+2a+1=b^2-a^2$，则 $a+b=$

________.

7. 已知关于 x 的方程 $|a|x=|a+1|-x$ 的解为 1，那么，有理数 a 的取值范围是________；若关于 x 的方程 $|a|x=|a+1|-x$ 的解是 0，则 a 的值是________.（1997 年"希望杯"数学邀请赛）

8. 若关于 x 的方程 $|1-x|=mx$ 有解，则实数 m 的取值范围是________.（2000 年上海市初中数学竞赛）

三、解答题

9. a、b 为有理数，且 $|a|>0$，方程 $||x-a|-b|=3$ 有三个不相等的解，求 b 的值.（第七届"华罗庚杯"少年数学邀请赛决赛）

10. 令 $x=\dfrac{a}{|a|}+\dfrac{b}{|b|}+\dfrac{ab}{|ab|}$，求 x 的最大值与最小值的和.（第八届"华罗庚杯"少年数学邀请赛决赛）

11. 已知实数 a、b 满足 $a^2+ab+b^2=1$，且 $t=ab-a^2-b^2$，求 t 的取值范围.

B 组

12. 已知实数 a、b、c、d 互不相等，且 $a+\dfrac{1}{b}=b+\dfrac{1}{c}=c+\dfrac{1}{d}=d+\dfrac{1}{a}=x$，求 x 的值.（2003 年全国初中数学联赛）

13. 有一无限小数 $A=0.a_1a_2a_3a_4\cdots$，其中 $a_i(i=1,2,\cdots)$ 是 $0,1,2,\cdots,9$ 中的一个，并且 a_1 是奇数，a_2 是偶数，a_3 等于 a_1+a_2 的个位数，a_4 等于 a_2+a_3 的个位数，…，a_{n+2} 是 a_n+a_{n+1} 的个位数($n=1,2,\cdots$). 证明：A 是有理数.

14. 如果在小数点后依次写出一切正整数，得到一无限小数：

$$A=0.123\,456\,789\,101\,112\,131\,415\cdots,$$

证明：A 是无理数.

15. 设 x、y、z 是任意实数，证明恒等式

$$||x-y|+x+y-2z|+|x-y|+x+y+2z=4\max\{x,y,z\}.$$

其中 $\max\{x,y,z\}$ 表示 x、y、z 的最大值.

16. 设有理数 x、y 满足等式

$$x^5+y^5=2x^2y^2,$$

证明：$1-xy$ 是有理数的平方.

17. 是否存在这样的实数 a 和 b，使得对每个正整数 $n\geqslant 2$，

(1) $a+b$ 是有理数，而 a^n+b^n 是无理数；

(2) $a+b$ 是无理数，而 a^n+b^n 是有理数.

18. 设 n 个互不相同的有理数，任意两个不同数的乘积均是整数. 证明：任意 $k(2\leqslant k\leqslant n)$ 个不同数的乘积也是整数.

【参考答案】

1. A.

由题设得 $\begin{cases}3a-b-4=0,\\4a+b-3=0,\end{cases}$ 解得 $a=1$，$b=-1$，所以 $|2a|-3|b|=-1$.

2. C.

由图象可知 $a>0$，$0<-\dfrac{b}{2a}<1$，所以得 $b<0$，$2a+b>0$，$2a-b>0$. 又 $x=-1$ 时，$a-b+c>0$；当 $x=1$ 时，$a+b+c<0$，故

$$\begin{aligned}M&=-(a+b+c)-(a-b+c)+(2a+b)-(2a-b)\\&=-2(a-b+c)<0.\end{aligned}$$

3. B.

因为 a、b、c 均为整数，所以 $a-b$ 和 $a-c$ 均为整数，从而由 $(a-b)^{10}+(a-c)^{10}=1$ 可得

$$\begin{cases}|a-b|=1,\\|a-c|=0\end{cases}\text{或}\begin{cases}|a-b|=0,\\|a-c|=1.\end{cases}$$

若 $\begin{cases}|a-b|=1,\\|a-c|=0,\end{cases}$ 则 $a=c$，从而

$|a-b|+|b-c|+|c-a|=|a-b|+|b-a|+|a-a|=2|a-b|=2.$

若 $\begin{cases}|a-b|=0,\\|a-c|=1,\end{cases}$ 则 $a=b$，从而

$|a-b|+|b-c|+|c-a|=|a-a|+|a-c|+|c-a|=2|a-c|=2.$

因此，
$$|a-b|+|b-c|+|c-a|=2.$$

4. D.

由题设知，a、$\dfrac{1}{a}$ 都是正数，所以由 $\left(\dfrac{1}{a}-|a|\right)^2=1$，得 $\dfrac{1}{a^2}+|a|^2=3$，$\left(\dfrac{1}{a}+|a|\right)^2=5$，$\dfrac{1}{a}+|a|=\sqrt{5}$.

5. A.

因为 $\alpha\beta+\alpha-\beta=(\alpha-1)(\beta+1)+1$，令 $\alpha=1+\sqrt{2}$，$\beta=-1+\sqrt{2}$，则 $\alpha\beta+\alpha-\beta=3$ 为有理数，故(甲)不对.

令 $\alpha=2\sqrt{2}$, $\beta=\sqrt{2}$,则$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\frac{1}{3}$ 是有理数,故(乙)不对.

又令 $\alpha=\sqrt[3]{2}$, $\beta=-\sqrt{2}$,则$\sqrt{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}=0$ 为有理数,故(丙)不对.

6. -1.

因为 $a^2+b^2=1$,所以 $-1\leqslant a\leqslant 1$, $-1\leqslant b\leqslant 1$. 由 $|1-2a+b|+2a+1=b^2-a^2$ 可得 $|1-2a+b|=b^2-a^2-2a-1=1-a^2-a^2-2a-1=-2a^2-2a$,从而 $-2a^2-2a\geqslant 0$,解得 $-1\leqslant a\leqslant 0$.

从而 $1-2a+b\geqslant 0$,因此 $1-2a+b=-2a^2-2a$,即 $1+b=-2a^2=-2(1-b^2)$,整理得 $2b^2-b-3=0$,解得 $b=-1$(另一根 $b=\frac{3}{2}$ 舍去).

把 $b=-1$ 代入 $1+b=-2a^2$ 计算可得 $a=0$,所以 $a+b=-1$.

7. $a\geqslant 0$; -1.

8. $m<-1$ 或 $m\geqslant 0$.

当 $x<1$ 时,$1-x=mx$, $(m+1)x=1$, $x=\frac{1}{m+1}$. 所以,$\frac{1}{m+1}<1$, $\frac{m}{m+1}>0$,得 $m>0$ 或 $m<-1$;当 $x\geqslant 1$ 时,$x-1=mx$, $(1-m)x=1$, $x=\frac{1}{1-m}$. 所以,$\frac{1}{1-m}\geqslant 1$, $\frac{m}{m-1}\leqslant 0$, $0\leqslant m<1$. 而当 $m=0$ 时,方程显然有解. 故 m 的取值范围是 $m<-1$ 或 $m\geqslant 0$.

9. $b=3$.

原方程可化为 $|x-a|-b=\pm 3$,即 $|x-a|=b\pm 3$. 若 $b-3$ 与 $b+3$ 均大于 0,则原方程的解为 $a\pm(b+3)$, $a\pm(b-3)$,易知这 4 个解两两不同;若 $b-3$ 与 $b+3$ 中恰有一个为0,则当$b-3=0$时,原方程有3个解,$b+3=0$时,原方程只有一解;若$b-3$与$b+3$中有小于 0 的,则原方程的解少于 3 个. 故 $b=3$.

10. 2.

当 a、b 均大于 0 时,$x=3$;当 a、b 均小于 0 时,$x=-1$;当 $a>0$, $b<0$ 或 $a<0$, $b>0$ 时,$x=-1$. 所以 x 的最小值为-1,最大值为 3.

11. $-3\leqslant t\leqslant -\frac{1}{3}$.

$t=ab-a^2-b^2=ab-(1-ab)$,所以 $ab=\frac{t+1}{2}$. 又$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=1+ab=\frac{t+3}{2}$,所以 $t+3\geqslant 0$, $t\geqslant -3$.

因为 $(a+b)^2\geqslant 4ab$,所以 $\frac{t+3}{2}\geqslant 4\cdot\frac{t+1}{2}$,得 $t\leqslant -\frac{1}{3}$.

所以,t 的取值范围为 $-3\leqslant t\leqslant -\frac{1}{3}$.

12. $\pm\sqrt{2}$.

由题设有

$$a+\frac{1}{b}=x, \quad ①$$

$$b+\frac{1}{c}=x, \quad ②$$

$$c+\frac{1}{d}=x, \quad ③$$

$$d+\frac{1}{a}=x. \quad ④$$

由①得 $b=\dfrac{1}{x-a}$,代入②,得 $c=\dfrac{x-a}{x^2-ax-1}$,再代入③,得

$$dx^3-(ad+1)x^2-(2d-a)x+ad+1=0. \quad ⑤$$

由④得 $ad+1=ax$,代入⑤,得

$$(d-a)(x^3-2x)=0,$$

所以
$$x(x^2-2)=0.$$

若 $x=0$,则 $c=\dfrac{-a}{-1}=a$,与已知条件矛盾.所以 $x^2-2=0$,即 $x=\pm\sqrt{2}$.

13. 由题设条件可知 A 的各位数字有如下规律:

$$A=0.奇偶奇奇偶奇奇偶奇\cdots$$

每一个非负有序整数对(奇,偶,奇)有 $5\times5\times5=125$ 种不同的数对.因此在前 126 个这样的数对中至少有两对相同,所以 A 是一个循环小数,即 A 是有理数.

14. 假设 A 是有理数,则 A 是循环小数,且循环节是从第 m 位后开始,由 n 位数码组成的.考虑数 $100\cdots0$(共 $m+2n$ 个 0),它必在 A 中出现,于是 $00\cdots0$(共 $m+2n$ 个 0)中至少有一个循环节,即循环节的所有数码为 0,不可能.

15. 记恒等式的左端为 A.

(1) 若 $x=\max\{x, y, z\}$,则 $x\geqslant y$, $x\geqslant z$,于是

$$\begin{aligned}A&=|x-y+x+y-2z|+x-y+x+y+2z\\&=2|x-z|+2x+2z=2x-2z+2x+2z\\&=4x.\end{aligned}$$

(2) 若 $y=\max\{x, y, z\}$,则 $y\geqslant x$, $y\geqslant z$,于是

$$\begin{aligned}A&=|y-x+x+y-2z|+y-x+x+y+2z\\&=2(y-z)+2y+2z=4y.\end{aligned}$$

(3) 若 $z=\max\{x, y, z\}$,则 $z\geqslant x$, $z\geqslant y$, 于是

$$\begin{aligned}A&=|2\max\{x, y\}-2z|+2\max\{x, y\}+2z\\&=2z-2\max\{x, y\}+2\max\{x, y\}+2z\\&=4z.\end{aligned}$$

16. 若 $xy=0$,则 $1-xy=1$, 结论成立.

若 $xy\neq 0$,则利用条件,可得 $1-xy=\left(\dfrac{x^5-y^5}{2x^2y^2}\right)^2$, 结论也成立.

17. (1) 存在. 例如,取 $a=2+\sqrt{2}$, $b=-\sqrt{2}$,则 $a+b=2$ 是有理数,而 $a^n+b^n=(2+\sqrt{2})^n+(-\sqrt{2})^n$ 是无理数.

(2) 不存在. 参见例题 3.

18. 设 a_1, a_2, …, a_k 是给定的有理数中的任意 k 个. 若 k 是偶数,则

$$a_1a_2\cdots a_k=(a_1a_2)\cdot\cdots\cdot(a_{k-1}a_k)$$

显然是整数.

若 k 是奇数,因为

$$(a_1a_2\cdots a_k)^2=(a_1a_k)(a_2a_{k-1})\cdots(a_ka_1)$$

是整数,而 $a_1a_2\cdots a_k$ 是有理数,由例题 2 的引理知,$a_1a_2\cdots a_k$ 是整数.

第 2 讲　代数式变形与求值

【知识梳理】

进入中学以来，由于字母代替数字的概念的引入，对数学的认知也经历了一个飞跃. 对应于数的四则运算，代数式的变形与计算也是代数学科中最基础的部分. 熟练而富有技巧地进行代数式变形、化简并保持高正确率是学好数学的必要条件.

代数式变形主要包括对多项式、分式、根式进行的变形，本讲主要向读者介绍一些多项式及分式变形的方法.

【例题精讲】

【例 1】 已知实数 a、b、x、y 满足 $a+b=x+y=2$，$ax+by=5$，求 $(a^2+b^2)xy+ab(x^2+y^2)$ 的值.

【解】 由 $a+b=x+y=2$，得 $(a+b)(x+y)=ax+by+ay+bx=4$.

因为 $ax+by=5$，所以

$$ay+bx=-1.$$

因而，

$$(a^2+b^2)xy+ab(x^2+y^2)=(ay+bx)(ax+by)=-5.$$

【例 2】 已知 $\dfrac{x}{y+z+u}=\dfrac{y}{z+u+x}=\dfrac{z}{u+x+y}=\dfrac{u}{x+y+z}$，求 $\dfrac{x+y}{z+u}+\dfrac{y+z}{u+x}+\dfrac{z+u}{x+y}+\dfrac{u+x}{y+z}$ 的值.

【解】 由题设得 $\dfrac{x+y+z+u}{y+z+u}=\dfrac{x+y+z+u}{z+u+x}=\dfrac{x+y+z+u}{u+x+y}=\dfrac{x+y+z+u}{x+y+z}$.

(1) 若 $x+y+z+u\neq 0$，则由上式可得 $x=y=z=u$，从而

$$\frac{x+y}{z+u}+\frac{y+z}{u+x}+\frac{z+u}{x+y}+\frac{u+x}{y+z}=1+1+1+1=4.$$

(2) 若 $x+y+z+u=0$，则 $x+y=-(z+u)$，$y+z=-(u+x)$，从而

$$\frac{x+y}{z+u}+\frac{y+z}{u+x}+\frac{z+u}{x+y}+\frac{u+x}{y+z}=(-1)+(-1)+(-1)+(-1)=-4.$$

【例 3】 求下式的值：$\dfrac{1^2}{1^2-100+5000}+\dfrac{2^2}{2^2-200+5000}+\cdots+\dfrac{99^2}{99^2-9900+5000}$.

【分析】 求和的式子中每一项都可以表示成$\dfrac{k^2}{k^2-100k+5000}$的形式,着重考虑这个分式的变形.

【解】 $\dfrac{k^2}{k^2-100k+5000}=\dfrac{2k^2}{2k^2-200k+10\,000}=\dfrac{2k^2}{k^2+(100-k)^2}$,

于是:
$$\begin{aligned}&\frac{k^2}{k^2-100k+5000}+\frac{(100-k)^2}{(100-k)^2-100(100-k)+5000}\\&=\frac{2k^2}{k^2+(100-k)^2}+\frac{2(100-k)^2}{(100-k)^2+k^2}\\&=2.\end{aligned}$$

由此可得:原式 $=\left(\dfrac{1^2}{1^2-100+5000}+\dfrac{99^2}{99^2-9900+5000}\right)+\cdots+\left(\dfrac{49^2}{49^2-4900+5000}+\dfrac{51^2}{51^2-5100+5000}\right)+\dfrac{50^2}{50^2-5000+5000}=2\cdot\dfrac{99-1}{2}+1=99$.

说明 对通项的分子分母同乘2,发现可以首尾配对是本题的关键.

【例4】 x、y、z 为正实数,且满足 $xyz=1$,$x+\dfrac{1}{z}=5$,$y+\dfrac{1}{x}=29$,求 $z+\dfrac{1}{y}$ 的值.

【分析】 考虑 $x+\dfrac{1}{z}$、$y+\dfrac{1}{x}$、$z+\dfrac{1}{y}$ 的乘积,化不对称为对称.

【解】
$$\begin{aligned}5\cdot29\cdot\left(z+\frac{1}{y}\right)&=\left(x+\frac{1}{z}\right)\left(y+\frac{1}{x}\right)\left(z+\frac{1}{y}\right)\\&=xyz+x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{xyz}\\&=1+\left(x+\frac{1}{z}\right)+\left(y+\frac{1}{x}\right)+\left(z+\frac{1}{y}\right)+1\\&=36+\left(z+\frac{1}{y}\right).\end{aligned}$$

由此解得:
$$z+\frac{1}{y}=\frac{1}{4}.$$

说明 本题亦可通过已知三式求出 $x=\dfrac{1}{5}$,$y=24$,$z=\dfrac{5}{24}$,从而求出 $z+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}$,读者不妨一试.

【例5】 已知 a、b 为正实数,且 $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a+b}=0$,求 $\left(\dfrac{b}{a}\right)^3+\left(\dfrac{a}{b}\right)^3$ 的值.

【分析】 由于 $\left(\dfrac{b}{a}\right)^3+\left(\dfrac{a}{b}\right)^3=\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\right)\left[\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\right)^2-3\right]$,所以转化为求 $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}$ 的值.

【解】 由 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b}=0$ 得：

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b},$$

即
$$\frac{a+b}{a}-\frac{a+b}{b}=1,$$

故
$$\frac{b}{a}-\frac{a}{b}=1.$$

由于
$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=\sqrt{\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right)^2+4}=\sqrt{5},$$

所以
$$\begin{aligned}\left(\frac{b}{a}\right)^3+\left(\frac{a}{b}\right)^3&=\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\left[\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)^2-3\right]\\&=2\sqrt{5}.\end{aligned}$$

说明 本题通过分析法得出“只须算出$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$的值”这一结论，又用条件得出$\frac{b}{a}-\frac{a}{b}$的值，从而求出$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$的值. 这种“两头凑”的方法希望读者能熟练运用.

【例 6】 一列数 $a_1, a_2, a_3, \cdots$满足对于任意正整数 n，都有

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=n^3,$$

求 $\frac{1}{a_2-1}+\frac{1}{a_3-1}+\cdots+\frac{1}{a_{100}-1}$ 的值.

【解】 当 $n\geqslant 2$ 时，有

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=n^3,$$
$$a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=(n-1)^3,$$

两式相减，得
$$a_n=3n^2-3n+1,$$

所以
$$\frac{1}{a_n-1}=\frac{1}{3n(n-1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right),\ n=2, 3, \cdots$$

故
$$\begin{aligned}&\frac{1}{a_2-1}+\frac{1}{a_3-1}+\cdots+\frac{1}{a_{100}-1}\\&=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)\\&=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{100}\right)=\frac{33}{100}.\end{aligned}$$

【例 7】 已知 a、b、c 为正数，满足如下两个条件：

$$a+b+c=32, \quad ①$$

$$\frac{b+c-a}{bc}+\frac{c+a-b}{ca}+\frac{a+b-c}{ab}=\frac{1}{4}. \quad ②$$

求证：以$\sqrt{a}$、$\sqrt{b}$、$\sqrt{c}$为三边长可构成一个直角三角形.

证法一　将①②两式相乘，得 $\left(\frac{b+c-a}{bc}+\frac{c+a-b}{ca}+\frac{a+b-c}{ab}\right)(a+b+c)=8$，

即
$$\frac{(b+c)^2-a^2}{bc}+\frac{(c+a)^2-b^2}{ca}+\frac{(a+b)^2-c^2}{ab}=8,$$

即
$$\frac{(b+c)^2-a^2}{bc}-4+\frac{(c+a)^2-b^2}{ca}-4+\frac{(a+b)^2-c^2}{ab}=0,$$

即
$$\frac{(b-c)^2-a^2}{bc}+\frac{(c-a)^2-b^2}{ca}+\frac{(a+b)^2-c^2}{ab}=0,$$

即

$$\frac{(b-c+a)(b-c-a)}{bc}+\frac{(c-a+b)(c-a-b)}{ca}+\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{ab}=0,$$

即
$$\frac{(b-c+a)}{abc}[a(b-c-a)-b(c-a+b)+c(a+b+c)]=0,$$

即
$$\frac{(b-c+a)}{abc}[2ab-a^2-b^2+c^2]=0, \text{即} \frac{(b-c+a)}{abc}[c^2-(a-b)^2]=0,$$

即
$$\frac{(b-c+a)}{abc}(c+a-b)(c-a+b)=0,$$

所以 $b-c+a=0$ 或 $c+a-b=0$ 或 $c-a+b=0$，即 $b+a=c$ 或 $c+a=b$ 或 $c+b=a$.
因此，以$\sqrt{a}$、$\sqrt{b}$、$\sqrt{c}$为三边长可构成一个直角三角形.

证法二　结合①式，由②式可得 $\frac{32-2a}{bc}+\frac{32-2b}{ca}+\frac{32-2c}{ab}=\frac{1}{4}$，变形，得

$$1024-2(a^2+b^2+c^2)=\frac{1}{4}abc, \quad ③$$

又由①式得 $(a+b+c)^2=1024$，即

$$a^2+b^2+c^2=1024-2(ab+bc+ca),$$

代入③式，得
$$1024-2[1024-2(ab+bc+ca)]=\frac{1}{4}abc,$$

即
$$abc=16(ab+bc+ca)-4096.$$

$$\begin{aligned}(a-16)(b-16)(c-16)&=abc-16(ab+bc+ca)+256(a+b+c)-16^3\\&=-4096+256\times 32-16^3=0,\end{aligned}$$

所以 $a=16$ 或 $b=16$ 或 $c=16$.

结合①式可得 $b+a=c$ 或 $c+a=b$ 或 $c+b=a$.

因此,以 $\sqrt{a}$、$\sqrt{b}$、$\sqrt{c}$ 为三边长可构成一个直角三角形.

【实战演练】

A 组

1. 已知 $x^2-x-1=0$,求 x^3-2x+1 的值.

2. α 为方程 $x^2+x-\frac{1}{4}=0$ 的根,求 $\frac{\alpha^3-1}{\alpha^5+\alpha^4-\alpha^3-\alpha^2}$ 的值.

3. 已知 $a-b=2+\sqrt{3}$, $b-c=2-\sqrt{3}$,求 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ 的值.

4. 已知 $x=\sqrt{19-8\sqrt{3}}$,求 $\frac{x^4-6x^3-2x^2+18x+23}{x^2-8x+15}$ 的值.

5. 已知 $x+y=1$, $x^2+y^2=2$,求 x^7+y^7 的值.

6. 设 $a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,求 $\frac{a^5+a^4-2a^3-a^2-a+2}{a^3-a}$ 的值.

7. 已知 a、b 为方程 $x^2-4x+1=0$ 的两个根,c、d 为方程 $x^2-5x+2=0$ 的两个根,$t=\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{a+c+d}+\frac{c}{a+b+d}+\frac{d}{a+b+c}$. 求证:

$$\frac{a^2}{b+c+d}+\frac{b^2}{a+c+d}+\frac{c^2}{a+b+d}+\frac{d^2}{a+b+c}=9t-9.$$

8. 已知 $(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2=(y+z-2x)^2+(x+z-2y)^2+(x+y-2z)^2$. 求证:$x=y=z$.

B 组

9. 已知 x_1、x_2 为方程 $x^2+x-3=0$ 的两根,求 $x_1^3-4x_2^2+19$ 的值.

10. 已知 x、y、z 为正实数,且

$$\frac{x^2+y^2-z^2}{2xy}+\frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}+\frac{z^2+x^2-y^2}{2zx}>1.$$

求证:x、y、z 为某个三角形的三条边.

11. 已知 x、y、z 为正数且 $xyz(x+y+z)=1$,求表达式 $(x+y)(y+z)$ 的最小值.

【参考答案】

1. 2.

注意 $x^3-2x+1=(x^3-x^2-x)+(x^2-x-1)+2$

$$=(x+1)(x^2-x-1)+2$$

$= 2.$

2. 20.

$$\alpha^3 - 1 = (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1),$$
$$\alpha^5 + \alpha^4 - \alpha^3 - \alpha^2 = \alpha^2(\alpha - 1)(\alpha + 1)^2,$$

又由 α 满足 $\alpha^2 + \alpha - \frac{1}{4} = 0$ 知:$\alpha \neq 1$, 所以

$$\frac{\alpha^3 - 1}{\alpha^5 + \alpha^4 - \alpha^3 - \alpha^2} = \frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha^2(\alpha + 1)^2} = \frac{\frac{1}{4} + 1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 20.$$

3. 15.

令 $S = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$, 则

$$\begin{aligned} 2S &= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \\ &= (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \\ &= (2 + \sqrt{3})^2 + (2 - \sqrt{3})^2 + [(2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3})]^2 \\ &= 7 + 4\sqrt{3} + 7 - 4\sqrt{3} + 16 \\ &= 30. \end{aligned}$$

故 $S = 15$.

4. 5.

$$x = \sqrt{19 - 8\sqrt{3}} = \sqrt{(4 - \sqrt{3})^2} = 4 - \sqrt{3},$$

故 x 满足 $(x - 4)^2 = 3$,即 $x^2 - 8x + 13 = 0$, 故 $x^2 - 8x + 15 = 2$.

$$x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 18x + 23 = (x^2 - 8x + 13)(x^2 + 2x + 1) + 10 = 10.$$

所以,原式 $= \frac{10}{2} = 5$.

5. $\frac{71}{8}$.

$$xy = \frac{1}{2}[(x + y)^2 - (x^2 + y^2)] = \frac{1}{2}(1^2 - 2) = -\frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x + y)(x^2 - xy + y^2) \\ &= 1 \cdot \left[2 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] \\ &= \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

$$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2(xy)^2 = \frac{7}{2}.$$

$$
\begin{aligned}
x^7+y^7&=(x^3+y^3)(x^4+y^4)-x^3y^3(x+y)\\
&=\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}+\frac{1}{8}\\
&=\frac{71}{8}.
\end{aligned}
$$

6. -2.

因为 $a^2=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}=1-a$,所以 $a^2+a=1$, 故

$$
\frac{a^5+a^4-2a^3-a^2-a+2}{a^3-a}=\frac{a^3(a^2+a)-2a^3-(a^2+a)+2}{a\cdot a^2-a}
$$

$$
=\frac{a^3-2a^3-1+2}{a\cdot(1-a)-a}=\frac{1-a^3}{-a^2}=-\frac{1-a^3}{1-a}=-(1+a+a^2)=-(1+1)=-2.
$$

7. 按题意:$a+b=4$, $c+d=5$,故 $a+b+c+d=9$. 所以

$$
\frac{a^2}{b+c+d}+\frac{b^2}{a+c+d}+\frac{c^2}{a+b+d}+\frac{d^2}{a+b+c}=\frac{a[9-(b+c+d)]}{b+c+d}+\frac{b[9-(a+c+d)]}{a+c+d}+
$$

$$
\frac{c[9-(a+b+d)]}{a+b+d}+\frac{d[9-(a+b+c)]}{a+b+c}=9t-(a+b+c+d)=9t-9.
$$

8. 由条件得:

$$
(y+z-2x)^2+(z+x-2y)^2+(x+y-2z)^2-(y-z)^2-(z-x)^2-(x-y)^2=0,
$$

即

$$
[(y-x)+(z-x)]^2+[(z-y)+(x-y)]^2+[(x-z)+(y-z)]^2-(y-z)^2-
$$

$$
(z-x)^2-(x-y)^2=0,
$$

所以

$$
(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2+2(y-x)(z-x)+2(z-y)(x-y)+2(x-z)(y-z)=0,
$$

$$
(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2+[(y-x)(z-x)+(z-y)(x-y)]+[(z-y)(x-y)+
$$

$$
(x-z)(y-z)]+[(x-z)(y-z)+(y-x)(z-x)]=0,
$$

即
$$2(x-y)^2+2(y-z)^2+2(z-x)^2=0,$$

故
$$x=y=z.$$

9. 0.

x_1、x_2 为二次方程 $x^2+x-3=0$ 的两个根,故

$$
x_1^2+x_1-3=0,\ x_2^2+x_2-3=0,
$$

由韦达定理知:$x_1+x_2=-1$, 从而有

$$
\begin{aligned}
x_1^3-4x_2^2+19&=x_1(3-x_1)-4(3-x_2)+19\\
&=3x_1-x_1^2-12+4x_2+19\\
&=3x_1+x_1-3+7+4x_2
\end{aligned}
$$

$$= 4(x_1 + x_2) + 4$$
$$= 4 \cdot (-1) + 4$$
$$= 0.$$

10. 原不等式两边同乘以 $2xyz$,得

$$z(x^2 + y^2 - z^2) + x(y^2 + z^2 - x^2) + y(z^2 + x^2 - y^2) - 2xyz > 0. \quad ①$$

因式分解得 $(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z) > 0$(这里可以将 x 看作变量,将 y、z 看作常量,将 $x = y+z$ 代入① 式左边,发现左边为 0,由因式定理得 $(y+z-x)$ 为其一个因子,同理有另两个因子),若 $y+z-x$, $z+x-y$, $x+y-z$ 均大于 0,则原命题成立. 否则,其中有两个负的,不妨设 $y+z-x<0$, $z+x-y<0$,相加得 $2z<0$,与 z 为正数矛盾. 所以这种情况不可能发生,即结论成立.

11. 反用内切圆变换(即令 $a = x+y$, $b = y+z$, $c = z+x$, 利用 x、y、z 构造出三角形三边),设这个三角形为$\triangle ABC$,则由海伦公式得

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \left(p = \frac{a+b+c}{2}\right)$$
$$= \sqrt{(x+y+z)xyz}.$$

由已知条件: $$S_{\triangle ABC} = 1,$$

于是 $$(x+y)(y+z) = ab = \frac{2S_{\triangle ABC}}{\sin C} \geqslant 2.$$

当$\triangle ABC$ 为直角三角形($\angle C = 90^\circ$)时,$(x+y)(y+z)$取最小值为 2.

说明　本题是 1989 年全苏数学奥林匹克试题,也曾改编为 2002 年上海市初中数学竞赛决赛试题.

第3讲 根　式

【知识梳理】

根式问题是初中代数的重要内容之一，也是初中数学竞赛的热点问题. 常见的考查形式有：

1. 根式的恒等变形：包括整式乘除、因式分解、配方、拆分等多种恒等变形技巧的综合运用，其中两个常见处理形式有：

(1) 复合二次根式 $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ 的化简(平方法、配方法、待定系数法)；

(2) 利用有理化因式(又叫共轭因式)化简、估算.

2. 与方程、不等式、简单数论知识的结合.

【例题精讲】

【例 1】 化简 $\dfrac{1}{4+\sqrt{59+30\sqrt{2}}}+\dfrac{1}{3-\sqrt{66-40\sqrt{2}}}$ 的结果是(　　). (2005 年全国初中数学联赛)

(A) 无理数　　(B) 真分数　　(C) 奇数　　(D) 偶数

【分析】 分母含有复合根式，直接分母有理化太繁琐，考虑先将复合根式化简.

【解】 原式 $=\dfrac{1}{4+\sqrt{(5\sqrt{2}+3)^2}}+\dfrac{1}{3-\sqrt{(5\sqrt{2}-4)^2}}$

$$=\frac{1}{7+5\sqrt{2}}+\frac{1}{7-5\sqrt{2}}=-14.$$

故选 D.

【例 2】 设 $r \geqslant 4$, $a=\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{r+1}$, $b=\dfrac{1}{\sqrt{r}}-\dfrac{1}{\sqrt{r+1}}$, $c=\dfrac{1}{r(\sqrt{r}+\sqrt{r+1})}$，则下列选项中，一定成立的是(　　). (2005 年全国初中数学联赛)

(A) $a>b>c$　　(B) $b>c>a$　　(C) $c>a>b$　　(D) $c>b>a$

【分析】 本题虽然可以通过特殊值法，通过较精确的近似计算，估计出来，但是大家还是需要掌握更一般的解法.

【解】 因为 $r \geqslant 4$，所以 $\dfrac{1}{\sqrt{r}}+\dfrac{1}{\sqrt{r+1}}<1$，则

$$a=\left(\frac{1}{\sqrt{r}}+\frac{1}{\sqrt{r+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{r}}-\frac{1}{\sqrt{r+1}}\right)<\frac{1}{\sqrt{r}}-\frac{1}{\sqrt{r+1}}<b,$$

$$\begin{aligned}c&=\frac{r+1-r}{r(\sqrt{r}+\sqrt{r+1})}=\frac{\sqrt{r+1}-\sqrt{r}}{r}\\&>\frac{\sqrt{r+1}-\sqrt{r}}{\sqrt{r}\cdot\sqrt{r+1}}=\frac{1}{\sqrt{r}}-\frac{1}{\sqrt{r+1}}=b.\end{aligned}$$

所以 $c>b>a$. 故选 D.

【例 3】 若 $a=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$, $b=2+\sqrt{6}-\sqrt{10}$,则$\frac{a}{b}$ 的值为(　　).

(A) $\frac{1}{2}$　　(B) $\frac{1}{4}$　　(C) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$　　(D) $\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{10}}$

(2005 年全国初中数学联赛 E 卷)

【分析】 本题利用 $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{a+b}}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{a+b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{a+b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{a+b})}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{a+b}}{2\sqrt{ab}}$,当然有必要的话我们还能继续分母有理化,对这种分母含三个根式,且三者之间有特殊联系的结构,我们可以利用上述方式处理.

【解】 因为
$$\begin{aligned}a&=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}\\&=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\cdot\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\cdot\sqrt{2}}{4}=\frac{b}{4}.\end{aligned}$$

所以 $\frac{a}{b}=\frac{1}{4}$. 故选 B.

【例 4】 $\frac{1}{1\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{1}}+\frac{1}{2\cdot\sqrt{3}+3\cdot\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n\cdot\sqrt{n+1}+(n+1)\cdot\sqrt{n}}$ 的值大于$\frac{19}{20}$,小于$\frac{20}{21}$,那么,正整数 n 的最大值与最小值的差等于________.(2009“我爱数学”初中生夏令营第二试)

【分析】 本题每一项的分母有很强的规律,单个分母有理化不可行,所以考虑整体处理,研究一般项的特征,找到突破口.

【解】 第 k 项
$$\begin{aligned}a_k&=\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}=\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}\\&=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}.\ (k=1,2,\cdots,n)\end{aligned}$$

所以原式 $=\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$,

由已知得 $\frac{19}{20}<1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}<\frac{20}{21}\Rightarrow\frac{1}{20}>\frac{1}{\sqrt{n+1}}>\frac{1}{21}$

$\Rightarrow 20<\sqrt{n+1}<21\Rightarrow 20^2-1<n<21^2-1$.

由 n 为正整数得 $n_{\max}=21^2-2$, $n_{\min}=20^2$.

所以, $21^2-2-20^2=39$ 即为所求.

【例 5】 满足等式 $x\sqrt{y}+\sqrt{x}y-\sqrt{2003x}-\sqrt{2003y}+\sqrt{2003xy}=2003$ 的正整数对 (x, y) 的个数是( ).(2003 年全国初中数学联赛)

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

【分析】 根据题目的特点,可考虑因式分解,因式分解是对根式进行恒等变形的重要手段之一.

【解】 已知等式可化为

$\sqrt{y}(\sqrt{x})^2+\left[(\sqrt{y})^2+\sqrt{2003}\sqrt{y}-\sqrt{2003}\right]\sqrt{x}-\sqrt{2003}(\sqrt{y}+\sqrt{2003})=0$,

故 $(\sqrt{y}\sqrt{x}-\sqrt{2003})(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{2003})=0$. 又由题意, $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{2003}>0$,

则 $\sqrt{y}\sqrt{x}-\sqrt{2003}=0\Rightarrow xy=2003$.

而 2003 为质数,且 x、y 为正整数,故 $(x, y)=(2003, 1)$, $(1, 2003)$, 选 B.

说明 本题中原式项数较多,有的同学可能一下子观察不出如何因式分解,若注意到相同根式出现多次,可以通过换元简化根式.

令 $\sqrt{x}=a$, $\sqrt{y}=b$, $\sqrt{2003}=c$,则原式化为: $a^2b+ab^2-ac-bc+abc=c^2$ 容易得到: $(ab-c)(a+b+c)=0$, 后面部分同上面解法.

【例 6】 若 $\alpha=3+2\sqrt{2}$, $\beta=3-2\sqrt{2}$, 已知 $\alpha^{10}+\beta^{10}$ 是一个正整数,则它的末尾数字是( ).(2005 年全国初中数学联赛 E 卷)

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

【分析】 本题可以通过 $\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=1$ 来求得 $\alpha^{10}+\beta^{10}$ 的值及尾数,也可通过构造一元二次方程,建立递推关系,进而解决问题,这两种方法都能较快解决这类问题.

解法一 由题意 $\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=1$, 所以

$$\alpha^2+\beta^2=34,\ \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)-\alpha\beta(\alpha+\beta)=34\times 6-6=198,$$

$$\alpha^5+\beta^5=(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^3+\beta^3)-\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)=34\times 198-6=6726,$$

$\alpha^{10}+\beta^{10}=(\alpha^5+\beta^5)^2-2\alpha^5\beta^5=6726^2-2$, 所以末尾数字是 4. 选 B.

解法二　由题意 $\alpha+\beta=6$，$\alpha\beta=1$，所以 α、β 是方程 $x^2-6x+1=0$ 的两个根，故有：$\begin{cases}\alpha^2-6\alpha+1=0,\\ \beta^2-6\beta+1=0,\end{cases}$ 因此 $\begin{cases}\alpha^n=6\alpha^{n-1}-\alpha^{n-2},\\ \beta^n=6\beta^{n-1}-\beta^{n-2}.\end{cases}$

记 $S_k=\alpha^k+\beta^k$，则有 $S_n=6S_{n-1}-S_{n-2}$. 显然：$S_0=\alpha^0+\beta^0=2$，$S_1=\alpha+\beta=6$，用 $\overline{S_k}$ 表示 S_k 的末位数字，则 $\overline{S_n}=\overline{6\,\overline{S_{n-1}}-\overline{S_{n-2}}}$，所以 $\overline{S_0}=2$，$\overline{S_1}=6$，$\overline{S_2}=4$，$\overline{S_3}=8$，$\overline{S_4}=4$，$\overline{S_5}=6$，$\overline{S_6}=2$，$\overline{S_7}=6$，$\overline{S_8}=4$，$\overline{S_9}=8$，$\overline{S_{10}}=4$. 故选 B.

【例 7】 已知 a 为整数，关于 x 的方程 $\dfrac{x^2}{x^2+1}-\dfrac{4|x|}{\sqrt{x^2+1}}+2-a=0$ 有实数根，那么 a 的可能值是________.（2008“我爱数学”初中生夏令营第二试）

【分析】 首先我们注意到可通过换元，将方程形式简化，而对于方程存在实根问题常转化为求函数的值域问题.

【解】 任取该方程一实根 x_0. 则 $\dfrac{x_0^2}{x_0^2+1}-\dfrac{4|x_0|}{\sqrt{x_0^2+1}}+2=a$.

注意到：
$$\frac{x_0^2}{x_0^2+1}=\left(\frac{|x_0|}{\sqrt{x_0^2+1}}\right)^2.$$

设 $\dfrac{|x_0|}{\sqrt{x_0^2+1}}=t$，由

$$\sqrt{x_0^2+1}>\sqrt{x_0^2}=|x_0|\Rightarrow\frac{|x_0|}{\sqrt{x_0^2+1}}<1\Rightarrow 0\leqslant t<1$$
$$\Rightarrow a=t^2-4t+2=(t-2)^2-2.$$

又
$$0\leqslant t<1$$
$$\Rightarrow -1<(t-2)^2-2\leqslant 2\Rightarrow -1<a\leqslant 2$$
$$\Rightarrow a\text{ 的可能值是 }0,1,2.$$

【例 8】 化简 $\sqrt[3]{10+7\sqrt{2}}+\sqrt[3]{10-7\sqrt{2}}$ 所得的最简结果是________.（2009“我爱数学”初中生夏令营第二试）

【分析】 注意到两个根式非常相近，只是一个符号不同，如设两项分别为 a、b 的话，得到：$\begin{cases}a^3+b^3=20,\\ ab=\sqrt[3]{2},\end{cases}$ 又由 $(a+b)^3-3ab(a+b)=a^3+b^3$，如设 $a+b=x$，则可得到关于 x 的方程.

【解】 令原式 $=x>0$，则 $x^3=20+3\sqrt[3]{100-49\times 2}\cdot x\Rightarrow x^3-3\sqrt[3]{2}\cdot x-20=0$.

令 $\sqrt[3]{2}\cdot x=y>0$，则 $\dfrac{y^3}{2}-3y-20=0\Rightarrow y^3-6y-40=0\Rightarrow(y-4)(y^2+4y+10)=0$，

解得 $y=4$. 故原式 $=2\sqrt[3]{4}$.

说明　这种设元的方法我们也是应用较多的，尤其在处理两个复合根式的和或差这一类型的根式时.

【例 9】 能使 $\left|\sqrt{\frac{n}{n+2009}}-1\right|>\frac{1}{1005}$ 成立的正整数 n 的个数等于________.（2009“我爱数学”初中生夏令营第二试）

【分析】 首先要去掉绝对值符号，之后的处理可以按常规作，但是数据比较复杂，这里可采用字母代替数的方法，简化形式.

【解】 由 n 为正整数知 $0<\frac{n}{n+2009}<1\Rightarrow 0<\sqrt{\frac{n}{n+2009}}<1$

$\Rightarrow\left|\sqrt{\frac{n}{n+2009}}-1\right|=1-\sqrt{\frac{n}{n+2009}}>\frac{1}{1005}\Rightarrow\sqrt{\frac{n}{n+2009}}<\frac{1004}{1005}$.

记 $1004=a$. 则 $\frac{n}{n+2a+1}<\frac{a^2}{(a+1)^2}\Rightarrow[(a+1)^2-a^2]n<a^2(2a+1)$

$\Rightarrow(2a+1)n<a^2(2a+1)\Rightarrow n<a^2\Rightarrow n<1004^2$.

已知 n 为正整数，因此，$n\leqslant 1004^2-1$. 于是，符合条件的正整数 n 的个数等于 1004^2-1，即 1 008 015.

【例 10】 设 a、b 是正整数，且满足 $2\left(\sqrt{\frac{15}{a}}+\sqrt{\frac{15}{b}}\right)$ 是整数. 则这样的有序数对 (a,b) 共有________对.（2009 年全国初中数学联赛）

【分析】 本题的解法的关键是先猜后证，首先猜测 $\sqrt{\frac{15}{a}}$、$\sqrt{\frac{15}{b}}$ 均为有理数，再尝试证明. 有些同学在做这类问题时，往往会忽略这一过程. 依靠直觉的猜想和严谨的证明才能体现对数学的感性认识与理性认识的统一.

【解】 设 $\sqrt{\frac{15}{a}}+\sqrt{\frac{15}{b}}=\frac{k}{2}$（$k$ 是正整数）则 $\frac{15}{b}=\frac{k^2}{4}+\frac{15}{a}-k\sqrt{\frac{15}{a}}\Rightarrow\sqrt{\frac{15}{a}}$ 为有理数.

设 $\sqrt{\frac{15}{a}}=\frac{q}{p}$（$p$、$q$ 是正整数，且 p 和 q 互质）. 则 $\frac{15}{a}=\frac{q^2}{p^2}\Rightarrow aq^2=15p^2\Rightarrow q^2\mid 15p^2$.

由 p 和 q 互质知 p^2 和 q^2 互质. 故 $q^2\mid 15\Rightarrow q^2=1\Rightarrow q=1\Rightarrow\sqrt{\frac{15}{a}}=\frac{1}{p}$.

同理，$\sqrt{\frac{15}{b}}=\frac{1}{m}$（$m$ 是正整数）.

由前面分析可设 $\sqrt{\frac{15}{a}}=\frac{1}{x}$，$\sqrt{\frac{15}{b}}=\frac{1}{y}$（$x$，$y$ 是正整数）. 则 $a=15x^2$，$b=15y^2$.

依题意可设 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{k}{2}$（$k$ 是正整数）. 由 $x\geqslant 1$，$y\geqslant 1$，得 $\frac{k}{2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\leqslant 1+1=2\Rightarrow k\leqslant 4$.

因此，k 只可能是 1、2、3、4.

(1) 当 $k=1$ 时，$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\Rightarrow(x-2)(y-2)=4\Rightarrow(x,y)=(4,4)$ 或 $(3,6)$ 或 $(6,3)$；

(2) 当 $k=2$ 时，$(x,y)=(2,2)$；

(3) 当 $k=3$ 时，$(x,y)=(2,1)$ 或 $(1,2)$；

(4) 当 $k=4$ 时，$(x,y)=(1,1)$.

因此，这样的有序数对 (a,b) 共 7 对：

$(240,240)$，$(135,540)$，$(540,135)$，$(60,60)$，$(60,15)$，$(15,60)$，$(15,15)$.

【实战演练】

A 组

1. $2\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{17-12\sqrt{2}}=$（　　）.（2003 年全国初中数学联赛）

(A) $5-4\sqrt{2}$　　(B) $4\sqrt{2}-1$　　(C) 5　　(D) 1

2. $\sqrt{5-\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$ 与 $\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}$ 的（　　）.（2005 年全国初中数学联赛）

(A) 和为 1　　(B) 差为 1　　(C) 积为 1　　(D) 商为 1

3. 计算 $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2003}+\sqrt{2004}}=$ ________.（2004 年全国初中数学联赛）

4. 已知 $m=1+\sqrt{2}$，$n=1-\sqrt{2}$，且 $(7m^2-14m+a)(3n^2-6n-7)=8$，则 a 的值等于（　　）.（2006 年全国初中数学竞赛）

(A) -5　　(B) 5　　(C) -9　　(D) 9

5. 已知非零实数 a、b 满足 $|2a-4|+|b+2|+\sqrt{(a-3)b^2}+4=2a$，则 $a+b$ 等于（　　）.（2009 年全国初中数学竞赛）

(A) -1　　(B) 0　　(C) 1　　(D) 2

6. 计算：$\frac{1}{2\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$.（新加坡数学竞赛）

7. 解方程 $\sqrt[3]{35+x}+\sqrt[3]{26-x}=1$.

8. 不超过 $(\sqrt{13}+\sqrt{11})^6$ 的值的最大整数是多少？

B 组

9. 已知整数 x、y 满足 $\sqrt{x}+2\sqrt{y}=\sqrt{50}$，那么整数对$(x, y)$的个数是(　　).(第19届江苏省初中数学竞赛)

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

10. 已知 a、b、c 为正整数，且$\dfrac{\sqrt{3}a+b}{\sqrt{3}b+c}$为有理数. 证明：$\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$ 为整数.(2010年全国初中数学联赛江西省初赛)

【参考答案】

1. D.

原式 $=2(\sqrt{2}-1)+(3-2\sqrt{2})=1$.

2. D.

由于 $\sqrt{29-12\sqrt{5}}=\sqrt{(3-2\sqrt{5})^2}=2\sqrt{5}-3$，则

$$\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}=\sqrt{3-(2\sqrt{5}-3)}=\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}=\sqrt{5}-1;$$

而 $\sqrt{5-\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}=\sqrt{5-\sqrt{5}-(\sqrt{5}-1)}=\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{5}-1$.

故两者的商为1.

3. $2\sqrt{501}-1$.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{2004}-\sqrt{2003})\\&=\sqrt{2004}-1=2\sqrt{501}-1.\end{aligned}$$

4. C.

由已知可得 $m^2-2m=1$，$n^2-2n=1$. 又$(7m^2-14m+a)(3n^2-6n-7)=8$，所以$(7+a)(3-7)=8$ 解得 $a=-9$.

5. C.

由题设知 $a\geqslant 3$，所以，题设的等式为 $|b+2|+\sqrt{(a-3)b^2}=0$，于是 $a=3$，$b=-2$，从而 $a+b=1$.

6. $\dfrac{9}{10}$.

$$a_k=\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}=\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}(k=1, 2, \cdots, 99).$$

所以原式$=\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{98}}-\frac{1}{\sqrt{99}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{99}}-\frac{1}{\sqrt{100}}\right)=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$.

7. $x_1=90$, $x_2=-99$.

设 $a=\sqrt[3]{35+x}$, $b=\sqrt[3]{26-x}$ 则可得:$\begin{cases}a+b=1,\\a^3+b^3=61.\end{cases}\Rightarrow ab=-20,\Rightarrow\begin{cases}a=5,\\b=-4\end{cases}$或$\begin{cases}a=-4,\\b=5.\end{cases}$ $\sqrt[3]{35+x}=5$ 或 $-4\Rightarrow x_1=90$, $x_2=-99$.

8. 110 015.

设 $\sqrt{13}+\sqrt{11}=a$, $\sqrt{13}-\sqrt{11}=b\Rightarrow a+b=2\sqrt{13}$, $ab=2\Rightarrow a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=104\sqrt{13}-12\sqrt{13}=92\sqrt{13}\Rightarrow a^6+b^6=(a^3+b^3)^2-2(ab)^3=(92\sqrt{13})^2-16=110\,016$.

因为 $0<b<1$,所以 $0<b^6<1$,故 a^6 的整数部分是 110 015.

9. D.

$2\sqrt{y}=\sqrt{50}-\sqrt{x}$,则 $4y=50+x-2\sqrt{50x}$,即 $10\sqrt{2x}=50+x-4y$,由 x、y 为整数,可得 $x=2p^2(p=0, 1, 2, \cdots)$,同理 $y=2q^2(q=0, 1, 2, \cdots)$,所以 $\sqrt{2}p+2\sqrt{2}q=5\sqrt{2}$,即 $p+2q=5$ (p、q 是非负整数).

(1) 当 $p=1$ 时,$q=2\Rightarrow(x, y)=(2, 8)$;

(2) 当 $p=3$ 时,$q=1\Rightarrow(x, y)=(18, 2)$;

(3) 当 $p=5$ 时,$q=0\Rightarrow(x, y)=(50, 0)$.

因此,这样的有序数对(x, y)共 3 对.

10. 依题意设 $\frac{\sqrt{3}a+b}{\sqrt{3}b+c}=q$($q$ 为有理数). 则$\sqrt{3}a+b=\sqrt{3}bq+cq$. 即 $\sqrt{3}(a-bq)=cq-b$.

若 $a-bq\neq0$,则$\sqrt{3}=\frac{cq-b}{a-bq}$,矛盾.

故 $a-bq=0\Rightarrow cq-b=0$

$\Rightarrow b=cq$, $a=cq^2$

$$\Rightarrow\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}=\frac{c^2q^4+c^2q^2+c^2}{cq^2+cq+c}=\frac{c^2(q^4+q^2+1)}{c(q^2+q+1)}$$

$=c(q^2-q+1)=cq^2-cq+c=a-b+c$(整数).

前　言

preface

数学竞赛对于激发学生的学习兴趣、开发智力、培养数学探索能力和创新能力、开拓视野有着非常积极的作用.通过开展数学竞赛活动,可以更好地发现和培养优秀学生,让他们得到进一步发展,同时也能提高教师的教学和科研水平,促进教学改革.

“全国初中数学联赛”和“全国初中数学竞赛”于每年4月份举行.本书是为准备参加“全国初中数学联赛”和“全国初中数学竞赛”的同学编写的,辅导数学竞赛的老师也可以作为参考资料.许多同学在参加“全国初中数学联赛”和“全国初中数学竞赛”前夕,都会碰到这样的问题:应该如何复习,选择什么书来看,找一些怎样的题来做,是否还有什么知识和内容没有复习到等等.为此,我们把“全国初中数学联赛”和“全国初中数学竞赛”中的一些重要知识和内容,重要的数学思想方法和解题技巧重新梳理和整合,精选了一些经典赛题和作者自编的题目进行详细的分析和解答,为同学们在考前复习提供一本有效的参考资料,以提高学生的解题能力和应试能力.

书中每一讲包括4个部分:(1)知识梳理:主要着重介绍全国初中数学联赛(竞赛)的考试热点、难点及相关的拓展知识,以及该类问题一般的解题方法和特别的方法.(2)例题精讲:围绕全国初中数学联赛(竞赛)的考点、热点、难点,精选一些经典的赛题和作者自编的题目进行详细的分析和解答,以启发学生的解题思路和解题方法,进而提高学生分析问题和解决问题的能力.(3)实战演练:有针对性地选择一些与该部分内容有关的新题和好题,以利于学生巩固强化.题目分A组、B组,A组题相对容易些,B组题有一定的难度.(4)参考答案:对实战演练题给出参考答案,供同学们参考.

本书最后给出了4套模拟试题供同学们考前模拟测试用,以检验同学们的综合能力.

参加本书编写的都是在数学竞赛命题和辅导第一线的教师,其中有国家队的领队和教练,有培养出多名国际数学奥林匹克金牌选手的教师,还有参与各级各类数学竞赛命题的专家.本书第一版的编写者为熊斌、冯志刚、张思汇、柯新立、徐惟简、黄诚、黄忠裕.第二版的编写者为熊斌、冯志刚、张思汇、柯新立、陈建豪.

熊　斌　冯志刚

2010年12月8日

学奥数，这里总有一本适合你

2000 年华东师范大学出版社出版了《奥数教程》丛书，首次在书名中使用“奥数”一词。《奥数教程》由国家集训队教练组执笔联合编写，获得第十届全国教育图书展优秀畅销图书奖，深受读者喜爱，被奉为经典奥数蓝皮书。

自《奥数教程》出版以来，华东师范大学出版社聚集国内最顶尖的作者团队，陆续为不同层次、不同需求的读者打造了近 200 种奥数图书, 形成多品种、多层次、全系列的格局，“奥数”图书累计销量超 1000 万册，由此奠定了奥数品牌出版社的地位。

“奥数”入门篇——《从课本到奥数》（1-9 年级） A 、B 版

“奥数”智优篇——《优等生数学》（1-9 年级）

“奥数”辅导篇——《奥数教程》、《学习手册》、《能力测试》（一至高三年级）

“奥数”小学顶级篇——《高思学校竞赛数学课本》、《高思学校竞赛数学导引》

“奥数”专题篇——《数学奥林匹克小丛书》（小学、初中、高中共 30 种）

“奥数”题库篇——《多功能题典 数学竞赛》（小学、初中、高中共 3 种）

“奥数”高中预赛篇——《高中数学联赛备考手册（预赛试题集锦）》

“奥数”联赛冲刺篇——《高（初）中数学联赛考前辅导》

“奥数”IMO 终极篇——《走向 IMO：数学奥林匹克试题集锦》

“奥数”域外篇——《日本小学数学奥林匹克》、《全俄中学生数学奥林匹克》