

2010年新知杯上海市高中数学竞赛

中图分类号: G424.79 文献标识码: A
智浪教育—普惠英才文库

文章编号: 1005-6416(2011)05-0029-03

【说明】解答本试题不得使用计算器.

一、填空题(前4小题每题7分,后4小题每题8分,共60分)

1. 函数 $y = \arccos\left(\frac{\sqrt{12+4x-x^2}-2}{4}\right)$ 的定义域是_____, 值域是_____.

2. 若 n 个正实数 x_1, x_2, \dots, x_n 使等式 $\sum_{k=1}^n |\lg x_k| + \sum_{k=1}^n \left| \lg \frac{1}{x_k} \right| = \left| \sum_{k=1}^n \lg x_k \right|$ 成立, 则 x_1, x_2, \dots, x_n 的值分别是_____.

3. 平面直角坐标系内有 $\triangle ABC$, 顶点为 $A(3,0), B(0,2), C(0,-1)$, 两平行直线 $x=t, x=\frac{t}{2} (0 < t \leq 3)$ 之间与 $\triangle ABC$ 公共部分的面积记为 $S(t)$. 则当 t 变化时, $S(t)$ 的最大值是_____.

4. 设甲袋中有4只白球、5只红球、6只黑球;乙袋中有7只白球、6只红球、2只黑球. 若从两袋中各取一球, 则两球颜色不同的概率是_____ (用最简分数作答).

5. 已知 F_1, F_2 是双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 的两个焦点, M 是该双曲线右支上的点, O 为坐标原点. 若 $\frac{|MF_1| + |MF_2|}{|MO|} = \sqrt{6}$, 则点 M 的坐标为_____.

6. 满足 $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n (n \geq 2, n \in \mathbf{N})$ 的 $2n-1$ 位十进制正整数 $\overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1}$ 共有_____个 (用数值作答).

7. 设 $f(x)$ 是整系数多项式, $f(0) = 11$, 又存在 n 个不同整数 x_1, x_2, \dots, x_n , 使 $f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_n) = 2010$.

则 n 的最大值是_____.

8. 如图1, 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB = 5, BC = 8, AC = 7$, 动点 P, Q 分别在边 AB, AC 上, 使 $\triangle APQ$ 的外接圆与 BC 相切. 则线段 PQ 长的最小值为_____.

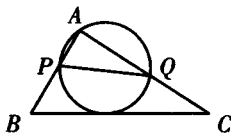


图1

二、解答题(共60分)

9. (14分) 如图2, 走廊宽为3m, 夹角为 120° , 地面是水平的, 走廊两端足够长. 问: 保持水平位置通过走廊的木棒(不计粗细) 的最大长度是多少?

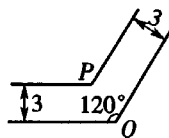


图2

10. (14分) 已知由 $1, 2, \dots, 1000$ 这1000个正整数构成的集合 A , 先从集合 A 中随机取一个数 a , 取出后把 a 放回集合 A ; 然后再从集合 A 中随机取一个数 b . 求 $\frac{a}{b} > \frac{1}{3}$ 的概率.

11. (16分) (1) 设 $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$. 求证: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq \sqrt{2}(x_1 x_2 + x_2 x_3)$, 并说明等号成立的条件;

(2) 若实数 a 使得对于任意实数 x_1, x_2, x_3, x_4 , 不等式 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \geq a(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4)$ 都成立, 求 a 的最大值.

12. (16分) 已知正整数 n 满足如下条件: 对开区间 $(0, 2009)$ 内的每个正整数 m , 总存在正整数 k , 使得

$$\frac{m}{2009} < \frac{k}{n} < \frac{m+1}{2010}$$

求这种 n 的最小值.

参考答案

一、1. $[-2, 6], [\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$.

由 $12 + 4x - x^2 \geq 0$, 得 $-2 \leq x \leq 6$. 此时,

$$0 \leq \sqrt{12 + 4x - x^2} = \sqrt{-(x-2)^2 + 16} \leq 4$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{12 + 4x - x^2} - 2}{4} \leq \frac{1}{2}.$$

故所求的定义域为 $[-2, 6]$, 值域为

$$[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}].$$

2. $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$.

原等式即

$$2 \sum_{k=1}^n |\lg x_k| = |\sum_{k=1}^n \lg x_k|$$

$$\Rightarrow 2 \sum_{k=1}^n |\lg x_k| \leq \sum_{k=1}^n |\lg x_k|$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n |\lg x_k| \leq 0.$$

故 $|\lg x_k| = 0 (1 \leq k \leq n)$, $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$.

反之, 当 $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$ 时, 已知等式显然成立.

3. $\frac{3}{2}$.

注意到

$$l_{AB}: \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1 (0 \leq x \leq 3),$$

$$l_{AC}: \frac{x}{3} - y = 1 (0 \leq x \leq 3).$$

如图 3, 设直线 $x = t$ 与线段 AB 、 AC 的交点分别为 F 、 E ;

直线 $x = \frac{t}{2}$ 与线段 AB 、 AC 的交点分别为 G 、 H . 则

$$y_F = 2 - \frac{2t}{3},$$

$$y_E = \frac{t}{3} - 1, y_G = 2 - \frac{t}{3}, y_H = \frac{t}{6} - 1.$$

注意到

$$S(t) = \frac{1}{2} \times \frac{t}{2} \left[\left(2 - \frac{2t}{3} \right) - \left(\frac{t}{3} - 1 \right) \right] +$$

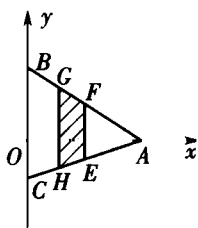


图 3

$$\left[\left(2 - \frac{t}{3} \right) - \left(\frac{t}{6} - 1 \right) \right]$$

$$= -\frac{3}{8}(t^2 - 4t) = -\frac{3}{8}(t-2)^2 + \frac{3}{2}.$$

故当 $t=2$ 时, $S(t)_{\max} = \frac{3}{2}$.

4. $\frac{31}{45}$.

两球颜色相同的概率为

$$P = \frac{4 \times 7 + 5 \times 6 + 6 \times 2}{15 \times 15} = \frac{14}{45},$$

故两球颜色不同的概率为 $1 - \frac{14}{45} = \frac{31}{45}$.

5. 设 $M(x, y) (x \geq 1)$. 易知, 双曲线的焦点为 $F_1(-\sqrt{2}, 0)$ 、 $F_2(\sqrt{2}, 0)$. 则

$$|MF_1| = \sqrt{(x + \sqrt{2})^2 + y^2},$$

$$|MF_2| = \sqrt{(x - \sqrt{2})^2 + y^2},$$

$$|MO| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\text{故 } \left(\frac{|MF_1| + |MF_2|}{|MO|} \right)^2$$

$$= \frac{(x + \sqrt{2})^2 + y^2 + (x - \sqrt{2})^2 + y^2 + 2\sqrt{(x^2 + y^2 + 2)^2 - 8x^2}}{x^2 + y^2}$$

$$= \frac{4x^2 + 2 + 2\sqrt{4x^4 - 4x^2 + 1}}{2x^2 - 1} = \frac{8x^2}{2x^2 - 1}.$$

解方程 $\frac{8x^2}{2x^2 - 1} = 6 (x \geq 1)$, 得 $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

进而, $y^2 = x^2 - 1 = \frac{1}{2}$.

故 $M\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

6. 502.

显然, $n \leq 9$, 且满足条件的数是 $2n - 1$ 位正整数, 有 C_9^n 种取法.

故这类整数的个数是

$$\sum_{n=2}^9 C_9^n = \sum_{n=0}^9 C_9^n - (C_9^0 + C_9^1)$$

$$= 512 - (1 + 9) = 502.$$

7. 3.

记 $g(x) = f(x) - 2010$. 则 x_1, x_2, \dots, x_n 都是 $g(x) = 0$ 的根.

$$\text{故 } g(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i) \cdot q(x),$$

其中, $q(x)$ 为整系数多项式. 于是,

$$g(0) = 11 - 2010 = -1999$$

$$= \prod_{i=1}^n (-x_i) q(0).$$

因 1999 是质数, -1999 至多是三个不同整数之积, 即 $-1 \times 1 \times 1999$, 故 $n \leq 3$.

当 $n=3$ 时,

$$g(x) = (x+1)(x-1)(x+1999),$$

$$f(x) = (x+1)(x-1)(x+1999) + 2010.$$

8. $\frac{30}{7}$.

因为 $\triangle ABC$ 三边长已知, 所以, $\triangle ABC$ 的三内角为定值.

由 $\frac{PQ}{\sin A} = 2R$ (R 为 $\triangle APQ$ 外接圆半径),

得 $PQ = 2R \sin A$.

欲使 PQ 最小, 当且仅当 R 最小.

又因 $\triangle APQ$ 的外接圆与 BC 相切, 所以, 当边 BC 上的高 AH 为 $\triangle APQ$ 外接圆直径时 R 最小.

注意到

$$\cos A = \frac{5^2 + 7^2 - 8^2}{2 \times 5 \times 7} = \frac{1}{7},$$

$$\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{7}\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{7}.$$

$$\text{而 } AH \times 8 = 5 \times 7 \sin A \Rightarrow AH = \frac{35}{8} \sin A.$$

$$\text{故 } PQ_{\min} = AH \sin A = \frac{35}{8} \sin^2 A = \frac{30}{7}.$$

二、9. 如图 4, 过走廊转角内顶点 P 任作水平直线与走廊外侧交于点 A, B . 则在水平位置通过走廊的木棒长度小于或等于 AB .

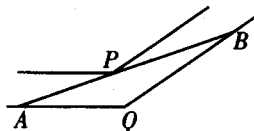


图 4

设 $\angle BAQ = \alpha$. 则

$$\angle ABQ = 60^\circ - \alpha,$$

$$AB = AP + PB = \frac{3}{\sin \alpha} + \frac{3}{\sin(60^\circ - \alpha)}.$$

当 α 变化时, 上式的最小值即是在水平位置通过走廊的木棒的最大长度.

由平均不等式及积化和差得

$$AB \geq 6 \sqrt{\frac{1}{\sin \alpha \cdot \sin(60^\circ - \alpha)}}$$

$$= 6 \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2} [\cos(2\alpha - 60^\circ) - \cos 60^\circ]}}$$

$$\geq 6 \sqrt{\frac{2}{1 - \frac{1}{2}}} = 12,$$

且当 $\alpha = 30^\circ$ 时, $AB = 12$.

故在水平位置能通过走廊的木棒的最大长度是 12 m.

10. 解法 1 注意到

$$P\left(\frac{a}{b} > \frac{1}{3}\right) = 1 - P\left(\frac{a}{b} \leq \frac{1}{3}\right).$$

$$\text{由 } \frac{a}{b} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow a \leq \frac{1}{3}b \Leftrightarrow a \leq \left[\frac{1}{3}b\right].$$

$$\text{则 } P\left(\frac{a}{b} \leq \frac{1}{3}\right) = \frac{\sum_{b=1}^{1000} \left[\frac{1}{3}b\right]}{1000^2}$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{332} 3k + 333 + 333}{1000^2} = \frac{333}{2000}.$$

$$\text{故 } P\left(\frac{a}{b} > \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{333}{2000} = \frac{1667}{2000}.$$

解法 2 当 $a=1$ 时, $b=1$ 或 2, 有 2 种取法; 当 $a=2$ 时, b 的取值增加 3, 4, 5, 有 $2+3$ 种取法;

当 $a=3$ 时, b 的取值增加 6, 7, 8, 有 $2+2 \times 3$ 种取法;

.....

当 $a=333$ 时, b 有 $2+332 \times 3$ 种取法;

当 $334 \leq a \leq 1000$ 时, b 都有 1000 种取法.

$$\text{故 } P\left(\frac{a}{b} > \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{2 + (2+3) + (2+2 \times 3) + \dots + (2+332 \times 3) + 667 \times 1000}{1000^2}$$

$$= \frac{333(2 + 166 \times 3) + 667 \times 1000}{1000^2}$$

$$= \frac{1667}{2000}.$$

11. (1) 注意到

2010 年全国高中数学联赛甘肃省预赛

中图分类号: G424.79 文献标识码: A 文章编号: 1005-6416(2011)05-0032-03

一、填空题(每小题7分,共56分)

1. 设 $k_1 < k_2 < \dots < k_n$ 是非负整数, 满足 $2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_n} = 227$.

则 $k_1 + k_2 + \dots + k_n =$ _____.

2. 已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = |x + 2a|$ 和 $g(x) = |x - a|$ 的图像交于点 C , 且它们分别与 y 轴交于点 A, B . 若 $\triangle ABC$ 的面积是 1, 则 $a =$ _____.

3. 已知 S_n 是公差为正数 q 的等差数列的前 n 项之和. 若 $\frac{S_n + 210}{n}$ 在 $n = 6$ 时取到最小值, 则 q 的取值范围是 _____.

4. 已知函数 $y = x^3$ 在 $x = a_k$ 的切线与 x 轴交于点 a_{k+1} . 若 $a_1 = 1, S_n = \sum_{i=1}^n a_i$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n =$ _____.

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= \left(x_1^2 + \frac{x_2^2}{2}\right) + \left(\frac{x_2^2}{2} + x_3^2\right) \\ &\geq \frac{2}{\sqrt{2}}x_1x_2 + \frac{2}{\sqrt{2}}x_2x_3 = \sqrt{2}(x_1x_2 + x_2x_3). \end{aligned}$$

当且仅当 $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 = x_3$ 时, 等号成立.

(2) 设 $k(0 < k < 1)$ 为待定常数. 则

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 &= (x_1^2 + kx_2^2) + (1-k)(x_2^2 + x_3^2) + (kx_3^2 + x_4^2) \\ &\geq 2\sqrt{k}x_1x_2 + 2(1-k)x_2x_3 + 2\sqrt{k}x_3x_4. \end{aligned}$$

令 $\sqrt{k} = 1 - k$. 解得 $k = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

从而, $\sqrt{k} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

故 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \geq (\sqrt{5} - 1)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4)$.

对任意实数 x_1, x_2, x_3, x_4 都成立.

另一方面, 取

$$x_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = x_4, x_2 = x_3 = 1.$$

由已知不等式得

$$5 - \sqrt{5} \geq \sqrt{5}a \Rightarrow a \leq \sqrt{5} - 1.$$

综上, $a_{\max} = \sqrt{5} - 1$.

12. 注意到

$$\frac{m}{2009} < \frac{k}{n} < \frac{m+1}{2010}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} mn < 2009k, \\ mn + n > 2010k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} mn + 1 \leq 2009k, \\ mn + n - 1 \geq 2010k \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2009(mn + n - 1) \geq 2009 \times 2010k \geq 2010(mn + 1)$$

$$\Rightarrow 2009mn + 2009n - 2009 \geq 2010mn + 2010$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{4019}{2009 - m}.$$

因为上式对区间 $(0, 2009)$ 中的每个正整数 m 都成立, 所以,

$$n \geq \frac{4019}{2009 - 2008} = 4019.$$

另一方面, 根据不等式 " $a, b, c, d \in \mathbf{R}_+$,

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$
, 知

$$\frac{m}{2009} < \frac{m+(m+1)}{2009+2010} < \frac{m+1}{2010},$$

$$\text{即 } \frac{m}{2009} < \frac{2m+1}{4019} < \frac{m+1}{2010}$$

对区间 $(0, 2009)$ 中的每个正整数 m 都成立.

故 n 的最小值为 4019.

(李大元 熊斌 顾鸿达 刘鸿坤 叶声扬 命题)