二○一二年全国高中数学联赛甘肃预赛试卷

(2012 年 6 月 24 日上午 9: 00–11: 30)

题号	一	二				总成绩
		9	10	11	12	
得分						
评卷人						
复核人						

考生注意：1、本试卷共两大题(12 道小题), 全卷满分 120 分.

2、用钢笔、签字笔或圆珠笔作答.

3、解题书写不要超出装订线.

4、不能使用计算器.

一、填空题（ 本题满分 56 分, 每小题 7 分）

得分	评卷人

本题共有 8 小题，请将正确答案直接写在横线上。

1. 空间四点 A， B， C， D 两两间的距离均为1，点 P 与点 Q 分别在线段 AB 与 CD 上运动，则点 P 与点 Q 间的最小距离为___________；

2. 向量 $\overrightarrow{OA}=(1,0)$， $\overrightarrow{OB}=(1,1)$, O 为坐标原点，动点 $P(x,y)$ 满足 $\begin{cases}0\le\overrightarrow{OP}\bullet\overrightarrow{OA}\le1\\0\le\overrightarrow{OP}\bullet\overrightarrow{OB}\le2\end{cases}$ ，则点 $Q(x+y,y)$ 构成的图形的面积为___________；

3. 设有非空集合 $A \subseteq \{1,2,3,4,5,6,7\}$, 且当 $a \in A$, 时，必有 $8-a \in A$, 这样的集合 A 的个数是 ____________；

4. 设 $f(x)=\begin{cases} x-[x], x \le 0 \\ f(x-1), x>0 \end{cases}$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，若 $f(x)=kx+k(k>0)$ 有三个不同的实数根，则实数 k 的取值范围是________________；

5. 11位数的手机号码，前七位数字是1390931，若余下的4个数字只能是1、3、5且都至少出现 1 次，这样的手机号码有__________个；

6. 若 $\tan x_1 \bullet \tan x_2 \bullet \cdots \bullet \tan x_{2012}=1$，则 $\sin x_1 \bullet \sin x_2 \bullet \cdots \bullet \sin x_{2012}$ 的最大值是__________；

7. 设函数 $f:R \to R$，满足 $f(0)=1$ 且对任意 $x, y \in R$ 都有 $f(xy+1)=f(x)f(y)-f(y)-x+2$，则 $f(x)=$________________________；

8. 实数 x、y、z 满足 $x^2+y^2+z^2=1$，则 $xy+yz$ 的最大值为_____________.

二、解答题（ 本题满分 64 分，第 **9**、**10** 题每题 **14** 分，第 **11**、**12** 题每题 **18** 分）

得分	评卷人

9. 已知数列$\{a_n\}$满足$\dfrac{a_{n+1}+a_n-1}{a_{n+1}-a_n+1}=n\left(n\in \mathrm{N}^*\right)$, 且$a_2=6$.

(Ⅰ) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(Ⅱ) 设$b_n=\dfrac{a_n}{n+c}\left(n\in \mathrm{N}^*\right)$， c为非零常数，若数列$\{b_n\}$是等差数列，记$c_n=\dfrac{b_n}{2^n}, S_n=c_1+c_2+\cdots+c_n$，求$S_n$.

得分	评卷人

10. M 是抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的准线上任意点，过 M 点作抛物线的切线 l_1、l_2， 切点分别为 A、B（A 在 x 轴上方）.

（1）证明：直线 AB 过定点；

（2）设 AB 的中点为 P，求 $|MP|$ 的最小值.

得分	评卷人

11. 设 a,b,c 为正实数，且 $a+b+c=1$，求证：

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right)\geq\frac{1}{2}.$$

得分	评卷人

12. 某校数学兴趣小组由 m 位同学组成，学校专门安排 n 位老师作为指导教师．在该小组的一次活动中，每两位同学之间相互为对方提出一个问题，每位同学又向每位指导教师各提出一个问题，并且每位指导教师也向全组提出一个问题，以上所有问题互不相同，这样共提出了 51 个问题. 试求 m ， n 的值.

二0一二年全国高中数学联赛甘肃预赛试题详解

泾川一中　胡志宏

第1题：连接A、B、C、D四点可得正四面体ABCD，则P、Q分别为异面直线AB、CD上的两动点，P、Q之间的最小距离为异面直线之间的距离，当且仅当P、Q分别为AB、CD中点时，$PQ\perp AB$且$PQ\perp CD$，故PQ的最小值为$\sqrt{(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

第2题：根据定理“两个区域面积之比是仿射不变量”，仿射变换$\begin{cases} s=x+y \\ t=y \end{cases}$对应的行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$的绝对值是1，(注$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$)

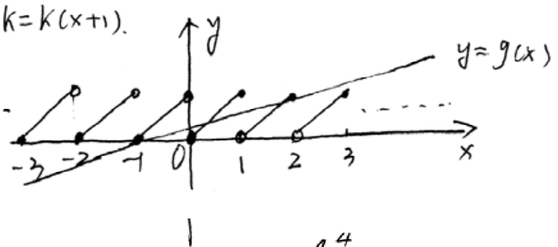
区域A的面积是2，$\frac{\text{区域B的面积}}{\text{区域A的面积}}=1$，故区域B的面积是2

第3题：采用列举法：单元素集：$\{4\}$，二元集：$\{1,7\}$，$\{2,6\}$，$\{3,5\}$，三元集：$\{1,4,7\}$，$\{2,4,6\}$，$\{3,4,5\}$，四元集：$\{1,2,6,7\}$，$\{1,3,5,7\}$，$\{2,3,5,6\}$，五元集$\{1,2,4,6,7\}$，$\{1,3,4,5,7\}$，$\{2,3,4,5,6\}$，六元集：$\{1,2,3,5,6,7\}$，七元集：$\{1,2,3,4,5,6,7\}$。

共有$1+3+3+3+3+1+1=15$个.

第4题：画出$f(x)$的图象如图，令$g(x)=kx+k=k(x+1)$.

故有$\begin{cases} g(2)\le 1 \\ g(3)>1 \end{cases}$，即$\begin{cases} 3k\le 1 \\ 4k>1 \end{cases}$ 故$\frac{1}{4}<k\le\frac{1}{3}$…



第5题：分四类：① 1出现两次共有$\frac{A_4^4}{2}=12$个. ② 3出现两次共有$\frac{A_4^4}{2}=12$，③ 5出现两次共有$\frac{A_4^4}{2}=12$. 故这样的手机号共有$3\times\frac{A_4^4}{2}=36$个

第6题：利用基本不等式和$\sin^2x+\cos^2x=1$求解；

$\because \tan x_1\cdot\tan x_2\cdots\tan x_{2012}=1$，$\therefore \sin x_1\cdot\sin x_2\cdots\sin x_{2012}=\cos x_1\cos x_2\cdots\cos x_{2012}$

$\therefore \sqrt[4024]{(\sin x_1\cdot\sin x_2\cdots\sin x_{2012})^2}=\sqrt[4024]{\sin x_1\cdot\sin x_2\cdots\sin x_{2012}\cdot\cos x_1\cos x_2\cdots\cos x_{2012}}$

$\le\sqrt{\frac{\sin^2x_1+\cdots+\sin^2x_{2012}+\cos^2x_1+\cdots+\cos^2x_{2012}}{4024}}=\sqrt{\frac{1}{2}}$

$\therefore (\sin x_1\cdot\sin x_2\cdots\sin x_{2012})^2\le(\frac{\sqrt{2}}{2})^{4024}$

$\therefore \sin x_1\cdot\sin x_2\cdots\sin x_{2012}\le(\frac{\sqrt{2}}{2})^{2012}=\frac{1}{2^{1006}}$

第7题：采用赋值法：令$x=y=0$得$f(1)=2$　令$y=0$得$f(1)=f(x)-1-x+2$

故$f(x)=x+1$.

第8题：应用柯西不等式：$(xy+yz)^2\le(x^2+z^2)(y^2+y^2)=(1-y^2)(2y^2)$

$=2(1-y^2)(y^2)$

$\le 2\times(\frac{1-y^2+y^2}{2})^2=\frac{2}{4}$

故$xy+yz\le\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2012 全国高中数学联赛甘肃省预赛预赛参考答案

(满分 120 分)

一、 填空题（每小题 7 分，共 56 分）

1、$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　2、2　　3、15　　4、$(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{3}]$

5、36　　6、$\dfrac{1}{2^{1006}}$　　7、$x+1$　　8、$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

二、解答题

说明：以下评分标准仅供参考，其他正确答案请参照以下给分点平行给分

9、（14 分）已知数列$\{a_n\}$满足$\dfrac{a_{n+1}+a_n-1}{a_{n+1}-a_n+1}=n\left(n\in \mathrm{N}^*\right)$, 且$a_2=6$.

(Ⅰ) 求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(Ⅱ) 设$b_n=\dfrac{a_n}{n+c}\left(n\in \mathrm{N}^*\right)$, c 为非零常数, 若数列$\{b_n\}$是等差数列, 记$c_n=\dfrac{b_n}{2^n}, S_n=c_1+c_2+\cdots+c_n$, 求$S_n$.

解:(Ⅰ) 由已知$\dfrac{a_{n+1}+a_n-1}{a_{n+1}-a_n+1}=n\left(n\in \mathrm{N}^*\right)\Rightarrow (n-1)a_{n+1}-(n+1)a_n=-(n+1)$

当$n\ge 2, n\in \mathrm{N}^*$时，$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}-\dfrac{a_n}{n-1}=-\dfrac{1}{n-1}$,

进一步得：$\dfrac{a_{n+1}}{(n+1)n}-\dfrac{a_n}{n(n-1)}=-\dfrac{1}{n(n-1)}=-\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}\right)$

从而有：$\dfrac{a_{n+1}}{(n+1)n}-\dfrac{a_2}{2}=-\left[\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n-2}-\dfrac{1}{n-1}\right)+\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}\right)\right]$

$=\dfrac{1}{n}-1$

又$a_2=6$，当$n\ge 2$时，$a_{n+1}=(n+1)(2n+1)$，即当$n\ge 3$时，$a_n=n(2n-1)$.

$a_2=6$符合上式

由$a_2=6$代入及$(1-1)a_2-(1+1)a_1=-(1+1)\Rightarrow a_1=1$，亦合上式.

故对任意$n\in \mathrm{N}^*$，$a_n=n(2n-1)$ ……………………….8 分

(Ⅱ) 由$b_n=\dfrac{a_n}{n+c}=\dfrac{n(2n-1)}{n+c}$知$b_1=\dfrac{1}{1+c}, b_2=\dfrac{6}{2+c}, b_3=\dfrac{15}{3+c}$， 又由于数列$\{b_n\}$是等差数列，所以

$2b_2=b_1+b_3$，$\dfrac{12}{2+c}=\dfrac{1}{1+c}+\dfrac{15}{3+c}$，得$c=-\dfrac{1}{2}$，从而$b_n=2n$，

进一步得：$c_n=\dfrac{b_n}{2^n}=\dfrac{2n}{2^n}=\dfrac{n}{2^{n-1}}$,

$S_n=1+\dfrac{2}{2^1}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{2^{n-2}}+\dfrac{n}{2^{n-1}}$　①　　$2S_n=2+\dfrac{2}{2^0}+\dfrac{3}{2^1}+\dfrac{4}{2^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{2^{n-3}}+\dfrac{n}{2^{n-2}}$　②

两式相减得：$S_n=3+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-2}}-\dfrac{n}{2^{n-1}}=4-\dfrac{n+2}{2^{n-1}}$ ……………………….14 分

10、（14 分）M 是抛物线$y^2=2px(p>0)$的准线上任意点，过 M 点作抛物线的切线l_1、l_2， 切点分别为 A、B（A 在 x 轴上方）

（1）证明：直线 AB 过定点

（2）设 AB 的中点为 P，求$|MP|$的最小值

解：则由$y=\sqrt{2px}$,知l_1的斜率为$k_1=\dfrac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x_1}}$；由$y=-\sqrt{2px}$知$l_2$的斜率为$k_2=-\dfrac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x_2}}$

设 A,B 的坐标分别为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)

则 $l_1: y-y_1=\frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x_1}}(x-x_1)$；$l_2: y-y_2=\frac{-\sqrt{2p}}{2\sqrt{x_2}}(x-x_2)$， 两式相减得

$$y_1-y_2=-\frac{\sqrt{2p}}{2}\frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1x_2}}x+\frac{\sqrt{2p}}{2}(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})$$

又 $y_1-y_2=\sqrt{2p}(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})$，从而

$1=-\frac{1}{2\sqrt{x_1x_2}}x+\frac{1}{2}$ 即 $\sqrt{x_1x_2}=\frac{p}{2}$

设过 A,B 的直线为 $y=kx+m$ 代入 $y^2=2px$ 得 $k^2x^2+(2km-2p)x+m^2=0$

则 $x_1x_2=\frac{m^2}{k^2}$，从而 $\frac{m^2}{k^2}=\frac{p^2}{4}\Rightarrow\frac{m}{k}=-\frac{p}{2}$，则以图可知直线 AB 过焦点……………………8 分

（2）$k_1k_2=-\frac{2p}{4\sqrt{x_1x_2}}=-1\Rightarrow l_1\perp l_2$

则 $MP=\frac{1}{2}AB,(MP)_{\min}=(\frac{1}{2}AB)_{\min}=p$ ……………………14 分

11、（18 分）设 a,b,c 为正实数，且 $a+b+c=1$，求证： $\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right)\geq\frac{1}{2}$.

证明：由排序不等式，有

$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$

$a^2+b^2+c^2\geq ac+ba+cb$ ……………………6 分

两式相加，有

$2\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq a\left(b+c\right)+b\left(c+a\right)+c\left(a+b\right)$……………………9 分

上式两端同乘 $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$，有

$2\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\geq\left[a\left(b+c\right)+b\left(c+a\right)+c\left(a+b\right)\right]$……………………12 分

$\geq\left(a+b+c\right)^2=1$……………………15 分

从而有 $\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right)\geq\frac{1}{2}$ ……………………18 分

12、（18 分）某校数学兴趣小组由 m 位同学组成，学校专门安排 n 位老师作为指导教师. 在该小组的一次活动中，每两位同学之间相互为对方提出一个问题, 每位同学又向每位指导教师各提出一个问题，并且每位指导教师也向全组提出一个问题，以上所有问题互不相同，这样共提出了 51 个问题. 试求 m,n 的值.

解：则有 $m(m-1)+mn+n=51$． ……………………6 分

化简得 $m^2+(n-1)m+n-51=0$

故 $\Delta=(n-1)^2-4(n-51)=n^2-6n+205=(n-3)^2+196$

$\because$ $m\in N^*$, $\therefore$ Δ 必为完全平方数……………………9 分

设 $(n-3)^2+196=k^2$ (k 为自然数)，则 $(n-3+k)(n-3-k)=-196$……………………12 分

其中 $n-3+k$ 与 $n-3-k$ 具有相同的奇偶性，且 $n-3+k\geqslant n-3-k$

∴ $\begin{cases} n-3+k=2 \\ n-3-k=-98 \end{cases}$ (1) 或 $\begin{cases} n-3+k=98 \\ n-3-k=-2 \end{cases}$ (2) 或 $\begin{cases} n-3+k=14 \\ n-3-k=-14 \end{cases}$ (3) ……………………15 分

由（1）得 $n=-45$,（舍）

由(2)得 $n=51$,此时原方程为 $m^2+50m=0$ 解得 $m_1=-50, m_2=0$（舍）

由（3）得 $n=3$, 此时原方程为 $m^2+2m-48=0$, 解得 $m_1=6, m_2=-8$（舍）

∴ $m=6, n=3$…………………….18 分