数学奥林匹克初中训练题(7)

第 一 试

一、选择题(每小题7分,共42分)

1. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 表示0～9的数字,且 $n+1$ 位数 $\overline{a_1 a_2 \cdots a_n 2}$ 乘以2后变为 $\overline{2 a_1 a_2 \cdots a_n}$. 则 n 的最小值为(　　).

(A) 15　(B) 16　(C) 17　(D) 18

2. 时钟指在上午9时至10时的某一时刻,这一时刻前2分钟的时针与后2分钟的分针在一条直线上(不考虑重合情形). 则这一时刻为(　　).

(A) 9时 $13\frac{7}{11}$ 分　(B) 9时16分

(C) 9时12分　(D) 9时14分

3. 五边形 $ABCDE$ 中,$\angle A = \angle C = 90°$, $AB = BC = DE = AE + CD = 3$. 则这个五边形的面积为(　　).

(A) 9　(B) 10.5　(C) 12　(D) 13.5

4. 对于每个 x,函数 y 是函数

$$y_1 = 2x, y_2 = x + 3, y_3 = -x + 3$$

中的最大值. 则函数 y 的最小值为(　　).

(A) 2　(B) 3　(C) 5　(D) 6

5. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 开口向下,顶点位于第二象限,且经过点(1,0)及(0,2). 则 a 的取值范围是(　　).

(A) $a < 0$　(B) $a < -1$

(C) $-2 < a < 0$　(D) $-1 < a < 0$

6. 设 G 是 $\triangle ABC$ 的重心,r 是 $\triangle ABC$ 内切圆的半径,点 G 到边 BC、CA、AB 的距离分别为 GD、GE、GF. 令 $s = \frac{1}{GD} + \frac{1}{GE} + \frac{1}{GF}$. 则(　　).

(A) $s > \frac{3}{r}$　(B) $s = \frac{3}{r}$

(C) $s < \frac{3}{r}$　(D) 不能确定

二、填空题(每小题7分,共28分)

1. 将分式 $\frac{6}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$ 写成

$(1 \leq i < j \leq 8)$,由于这8个数均为1至21之间的整数,因此,$1 \leq a_j - a_i \leq 20$ $(1 \leq i < j \leq 8)$,最多只有20个不同的差值. 故由抽屉原理知,其中至少有8对差相等.

(i) 若这8对相等的差中,存在1对其中的4个数互不相同,即

$$a_j - a_i = a_m - a_k \ (1 \leq i < j < k < m \leq 8).$$

此时原题成立.

(ii) 若这8对相等的差中,每一对的4个数中至少有2个数相同,则这4个数中恰有2个数相同(因为 $a_j - a_i = a_m - a_k$ 中至多有 $a_j = a_k$ 或 $a_i = a_m$ 之一成立). 于是,每对这样的差对应一个三元数组 (a_i, a_j, a_k),且满足

$$2a_j = a_i + a_k \ (1 \leq i < j < k \leq 8).$$

不妨设这8对差对应的8个不同的三元数组为

$$(a_{i1}, a_{j1}, a_{k1}), (a_{i2}, a_{j2}, a_{k2}), \cdots, (a_{i8}, a_{j8}, a_{k8}),$$

其中,$2a_{jl} = a_{il} + a_{kl}$ $(l = 1, 2, \cdots, 8)$.

由于 a_1 与 a_8 不能作为三元数组的中间项,故中间项至多有6种不同的取法. 再由抽屉原理,知上述8个不同的三元数组中必有2个三元数组的中间项相等,不妨设为 $a_{j1} = a_{j2}$. 则

$$a_{i1} + a_{k1} = 2a_{j1} = 2a_{j2} = a_{i2} + a_{k2},$$

其中,a_{i1}、a_{k1}、a_{i2}、a_{k2} 两两不同(否则它们为同一个三元数组,矛盾).

综合(i)、(ii)知,$n = 8$ 是好数.

(黄志军　南京外国语学校,210008)

分母分别为 n、$n+1$、$n+2$、$n+3$ 的四个分式的代数和,结果为______.

2. 已知 a、b 为正数,且 $2a+b=2$. 则 $\sqrt{4a^2+1}+\sqrt{b^2+4}$ 的最小值为______.

3. 已知实数 a、b 满足

$a^2=-1-5a$, $5b=-1-b^2$.

则 $b\sqrt{\frac{b}{a}}+a\sqrt{\frac{a}{b}}$ 的值为______.

4. 已知 AD 是 $\triangle ABC$ 的内角平分线,AD 的延长线交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 E. 则 $AB\cdot AC-BD\cdot DC$ 与 AD^2 的关系是______(填"相等"或"不相等").

第二试

一、(20 分) 求不定方程

$$29a+30b+31c=2\,196$$

的正整数解.

二、(25 分) 在凸四边形 $ABCD$ 中,E、F 分别是边 AB、AD 上的点,$EF\parallel BD$,过点 E 作 $EM\perp CD$ 于点 M,过点 F 作 $FN\perp BC$ 于点 N,且 EM、FN、AC 相交于同一点 G. 求证:

$AC\perp BD$.

三、(25 分) 在 $\triangle ABC$ 中,已知

$$\frac{b-c}{\cot\frac{A}{2}}+\frac{c-a}{\cot\frac{B}{2}}+\frac{a-b}{\cot\frac{C}{2}}=0.$$

求证:$\frac{b-c}{\cot^2\frac{A}{2}}+\frac{c-a}{\cot^2\frac{B}{2}}+\frac{a-b}{\cot^2\frac{C}{2}}=0$.

参考答案

第一试

一、**1.** C.

利用竖式相乘,如图 1,从后向前推.

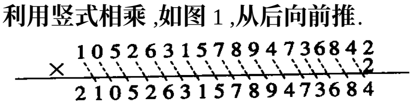

图 1

故 n 的最小值为 17.

2. D.

时钟上有 60 小格,从刻度 12 开始将圆周 60 等分,分针每小时走 60 小格,时针每小时走 5 小格,分针转动的速度是时针的 12 倍.

如图 2,点 A、O、B 在一直线上,设所求的时刻为 9 时 x 分. 9 时 $x-2$ 分,时针从 A 到 C,走了 $\frac{x-2}{12}$ 小格;9 时 $x+2$ 分,分针从 B 到 D,走了 $(x+2)-3\times5$ 小格.

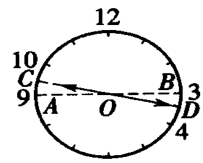

图 2

根据题意得 $AC=BD$.

所以,$\frac{x-2}{12}=(x+2)-3\times5$.

解得 $x=14$.

故这一时刻为 9 时 14 分.

3. A.

如图 3,延长 DC 到点 F,使 $CF=AE$,联结 BE、BD、BF. 则

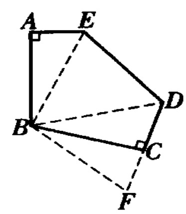

图 3

$DF=DE=3$.

又 $\triangle BCF\cong\triangle BAE$,故

$BE=BF$.

因为 $BD=BD$,所以,

$\triangle BED\cong\triangle BFD$.

从而,$S_{\triangle BED}=S_{\triangle BFD}$.

故 $S_{五边形ABCDE}=S_{四边形BEDF}=2S_{\triangle BFD}$

$=2\times\frac{1}{2}DF\cdot BC=9$.

4. B.

如图 4,函数 y_1 与 y_2 的图像交点为 $(3,6)$,函数 y_2 与 y_3 的图像交点为 $(0,3)$.

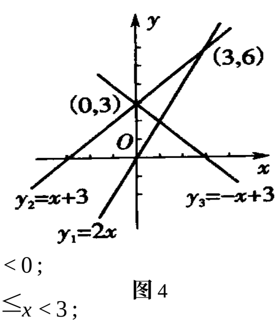

图 4

由题意及图像知

$$y=\begin{cases}-x+3, & x<0;\\ x+3, & 0\leqslant x<3;\\ 2x, & x\geqslant 3.\end{cases}$$

故 y 的最小值为 3.

5. C.

由已知可得

$a<0$, $-\frac{b}{2a}<0$, $\frac{4ac-b^2}{4a}>0$, $a+b+c=0$, $c=2$.

由 $a+b+c=0$ 和 $c=2$，得 $b=-2-a$.

由 $a<0$ 和 $-\frac{b}{2a}<0$，得 $b<0$.

所以，$-2-a<0$，即 $a>-2$.

而 $a<0$，$b<0$，$c=2$ 满足 $\frac{4ac-b^2}{4a}>0$，故 a 的取值范围是 $-2<a<0$.

6. B.

如图 5，AM 是 BC 上的中线，联结 BG、CG. 则

$$S_{\triangle AGB}=S_{\triangle AGC}=S_{\triangle BGC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}.$$

又 $S_{\triangle BGC}=\frac{1}{2}BC\cdot GD$，

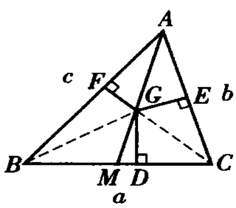

图 5

所以，

$$\frac{1}{GD}=\frac{BC}{2S_{\triangle BGC}}=\frac{3a}{2S_{\triangle ABC}}.$$

同理，$\frac{1}{GE}=\frac{3b}{2S_{\triangle ABC}}$，$\frac{1}{GF}=\frac{3c}{2S_{\triangle ABC}}$.

以上三式相加得

$$\frac{1}{GD}+\frac{1}{GE}+\frac{1}{GF}=\frac{3(a+b+c)}{2S_{\triangle ABC}}.$$

注意到 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}(a+b+c)r$，则有

$$\frac{1}{GD}+\frac{1}{GE}+\frac{1}{GF}=\frac{3}{r}.$$

二、1. $\frac{1}{n}-\frac{3}{n+1}+\frac{3}{n+2}-\frac{1}{n+3}$.

$$\frac{6}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$=\frac{3}{n(n+3)}-\frac{3}{(n+1)(n+2)}$$

$$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)-\left(\frac{3}{n+1}-\frac{3}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{3}{n+1}+\frac{3}{n+2}-\frac{1}{n+3}.$$

2. $\sqrt{13}$.

如图 6，作线段 $AB=2$，点 C、D 分别在 AB 的异侧，且 $CA\perp AB$，$DB\perp AB$，$CA=1$，$BD=2$，E 是 AB 上的点.

令 $AE=2a$，$BE=b$. 联结 CE、DE、CD.

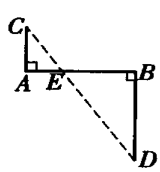

图 6

由勾股定理得

$$CE=\sqrt{4a^2+1}，DE=\sqrt{b^2+4}.$$

由于 $CE+DE\geq CD$，所以，

$$\sqrt{4a^2+1}+\sqrt{b^2+4}\geq CD.$$

当点 C、E、D 在同一条直线上时，$\sqrt{4a^2+1}+\sqrt{b^2+4}$ 的最小值是 CD. 此时，$\triangle ACE\backsim\triangle BDE$.

故 $\frac{AE}{BE}=\frac{AC}{BD}$，即 $\frac{2a}{b}=\frac{1}{2}$.

于是，$b=4a$，将其代入 $2a+b=2$，得 $a=\frac{1}{3}$.

从而，$b=\frac{4}{3}$.

当 $a=\frac{1}{3}$，$b=\frac{4}{3}$ 时，$CD=\sqrt{13}$.

故 $\sqrt{4a^2+1}+\sqrt{b^2+4}$ 的最小值为 $\sqrt{13}$.

3. $-5\pm\sqrt{21}$ 或 -23.

由已知得

$$a^2+5a+1=0，b^2+5b+1=0.$$

当 $a=b$ 时，$a=\frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$，则

$$b\sqrt{\frac{b}{a}}+a\sqrt{\frac{a}{b}}=a+b=2a=-5\pm\sqrt{21}.$$

当 $a\neq b$ 时，a、b 是一元二次方程 $x^2+5x+1=0$ 的两个实根. 此时，$a+b=-5$，$ab=1$，可知 a、b 均为负数. 因此，

$$b\sqrt{\frac{b}{a}}+a\sqrt{\frac{a}{b}}=-\frac{b}{a}\sqrt{ab}-\frac{a}{b}\sqrt{ab}$$

$$=-\frac{(a+b)^2-2ab}{ab}\sqrt{ab}=-23.$$

4. 相等.

如图 7，联结 BE.

由 $\angle BAE=\angle DAC$，$\angle E=\angle C$，

得 $\triangle ABE\backsim\triangle ADC$.

所以，$\frac{AB}{AD}=\frac{AE}{AC}$，即

$$AB\cdot AC=AE\cdot AD.\quad ①$$

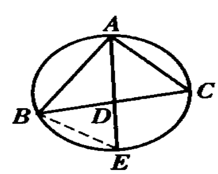

图 7

由相交弦定理得

$$BD\cdot DC=DE\cdot AD.\quad ②$$

① - ② 得

$$AB\cdot AC-BD\cdot DC=(AE-DE)\cdot AD=AD^2.$$

第 二 试

一、将原方程变为

$$\begin{cases}29(a+b+c)+(b+2c)=2\,196, & ①\\ 31(a+b+c)-(2a+b)=2\,196. & ②\end{cases}$$

因为 a、b、c 是正整数,由方程①得

$$29(a+b+c)=2196-(b+2c)$$
$$\leqslant 2196-(1+2\times 1)=2193.$$

所以,$a+b+c\leqslant 75\frac{18}{29}$.　　③

由方程②得

$$31(a+b+c)=2196+(2a+b)$$
$$\geqslant 2196+(2\times 1+1)=2199.$$

所以,$a+b+c\geqslant 70\frac{29}{31}$.　　④

由式③、④得

$a+b+c=71,72,73,74$ 或 75.

当 $a+b+c=71$ 时,与原方程组合,解得

$b=5-2a$, $c=a+66$.

由 $b\geqslant 1$,得 $5-2a\geqslant 1$.解得 $a\leqslant 2$,故 $a=1$ 或 2.

此时,原方程有 2 组正整数解.

同理,当 $a+b+c=72,73,74,75$ 时,分别可得出原方程有 17、33、24、10 组正整数解.

因此,原方程的正整数解共有

$2+17+33+24+10=86$(组).

二、如图 8.显然,$\angle ACD\neq 90°$ 且 $\angle ACB\neq 90°$,否则 $EM\parallel AC$ 或 $FN\parallel AC$.

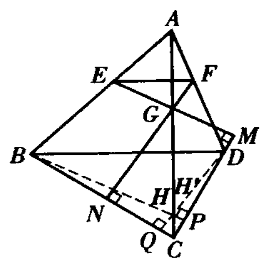

图 8

过点 D 作 $DQ\perp BC$ 于点 Q,过点 B 作 $BP\perp CD$ 于点 P.设直线 BP 交 AC 于点 H,直线 DQ 交 AC 于点 H'.

由 $EM\perp CD$, $BP\perp CD$,得 $EM\parallel BP$,即 $EG\parallel BH$.　　①

在 $\triangle ABH$ 中,由式①得

$$\frac{AE}{EB}=\frac{AG}{GH}.\quad ②$$

在 $\triangle ADH'$ 中,同理可得

$$\frac{AF}{FD}=\frac{AG}{GH'},\quad ③$$

在 $\triangle ABD$ 中,由 $EF\parallel BD$,得

$$\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FD}.\quad ④$$

由式②、③、④得 $\frac{AG}{GH}=\frac{AG}{GH'}$,即 $GH=GH'$.

所以,点 H' 与点 H 重合,H 为 $\triangle BCD$ 的垂心.

因此,$HC\perp BD$,即 $AC\perp BD$.

三、如图 9,设 $\triangle ABC$ 的内切圆圆心为 I、半径为 r,与边 BC、CA、AB 分别相切于点 D、E、F;设 $\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 的长分别为 a、b、c.联结 AI、IF,则

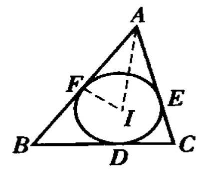

图 9

$\angle FAI=\frac{1}{2}\angle A$, $IF\perp AB$,

$IF=r$, $AF=\frac{1}{2}(b+c-a)$.

在 Rt$\triangle AFI$ 中,$\cot\angle FAI=\frac{AF}{IF}$,即

$$\cot\frac{A}{2}=\frac{b+c-a}{2r}.$$

同理,$\cot\frac{B}{2}=\frac{a+c-b}{2r}$, $\cot\frac{C}{2}=\frac{a+b-c}{2r}$.

故 $(b-c)\cot\frac{A}{2}+(c-a)\cot\frac{B}{2}+(a-b)\cot\frac{C}{2}$

$$=\frac{(b-c)(b+c-a)}{2r}+\frac{(c-a)(a+c-b)}{2r}+\frac{(a-b)(a+b-c)}{2r}$$

$=0$.

由已知得

$$\frac{b-c}{\cot\frac{A}{2}}=-\frac{(c-a)\cot\frac{C}{2}+(a-b)\cot\frac{B}{2}}{\cot\frac{B}{2}\cdot\cot\frac{C}{2}}.$$

上式两边同乘以 $\frac{1}{\cot\frac{A}{2}}$ 得

$$\frac{b-c}{\cot^2\frac{A}{2}}=\frac{(a-c)\cot\frac{C}{2}+(b-a)\cot\frac{B}{2}}{\cot\frac{A}{2}\cdot\cot\frac{B}{2}\cdot\cot\frac{C}{2}}.\quad ①$$

同理可得

$$\frac{c-a}{\cot^2\frac{B}{2}}=\frac{(b-a)\cot\frac{A}{2}+(c-b)\cot\frac{C}{2}}{\cot\frac{A}{2}\cdot\cot\frac{B}{2}\cdot\cot\frac{C}{2}},\quad ②$$

$$\frac{a-b}{\cot^2\frac{C}{2}}=\frac{(c-b)\cot\frac{B}{2}+(a-c)\cot\frac{A}{2}}{\cot\frac{A}{2}\cdot\cot\frac{B}{2}\cdot\cot\frac{C}{2}}.\quad ③$$

①+②+③得

$$\frac{b-c}{\cot^2\frac{A}{2}}+\frac{c-a}{\cot^2\frac{B}{2}}+\frac{a-b}{\cot^2\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{(b-c)\cot\frac{A}{2}+(c-a)\cot\frac{B}{2}+(a-b)\cot\frac{C}{2}}{\cot\frac{A}{2}\cdot\cot\frac{B}{2}\cdot\cot\frac{C}{2}}=0.$$

(李　明　安徽省五河县第三中学,233300)