数学奥林匹克初中训练题(6)

第 一 试

一、选择题(每小题 7 分,共 42 分)

1. 已知 $a^2+b^2=1$,$b^2+c^2=2$,$c^2+a^2=2$. 则 $ab+bc+ca$ 的最小值为(　　).

(A) $\sqrt{3}-\frac{1}{2}$　　(B) $-\sqrt{3}+\frac{1}{2}$

(C) $-\sqrt{3}-\frac{1}{2}$　　(D) $\sqrt{3}+\frac{1}{2}$

2. 某次数学测验共有 20 道题. 评分标准规定:每答对一题得 5 分,不答得 0 分,答错得 -2 分. 已知这次测验中小强与小刚的累计得分相等,分数是质数. 则小强与小刚答题的情况是(　　).

(A) 两人答对的题数一样多

(B) 两人答对的题数相差 2

(C) 两人答对的题数相差 4

(D) 以上三种情况都有可能

3. 在 $\triangle ABC$ 中,AD 是边 BC 上的中线,点 M、N 分别在边 AB、AC 上,且满足 $\angle MDN=90°$. 如果 $BM^2+CN^2=DM^2+DN^2$,那么,AD^2 与 AB^2+AC^2 的关系是(　　).

(A) $AD^2>AB^2+AC^2$

(B) $AD^2<AB^2+AC^2$

(C) $AD^2=AB^2+AC^2$

(D) AD^2 与 AB^2+AC^2 大小不确定

4. 有 n 个数,从第二个数开始,每一个数都比它前面相邻的数大 3,即 4,7,…,$3n+1$,且它们相乘的积的末尾恰有 32 个 0. 则 n 的最小值为(　　).

(A) 125　(B) 126　(C) 127　(D) 128

5. 图 1 为某三岔路口交通环岛的简化模型. 在某高峰时段,单位时间进出路口 A、B、C 的机动车辆数如图 1 所示,图中的 x_1、x_2、x_3 分别表示该时段单位时间通过路段 $\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{CA}$ 的机动车辆数(假设单位时间内,在上述路段中,同一路段上驶入与驶出的车辆数相等). 则(　　).

(A) $x_1>x_2>x_3$　　(B) $x_1>x_3>x_2$

(C) $x_2>x_3>x_1$　　(D) $x_3>x_2>x_1$

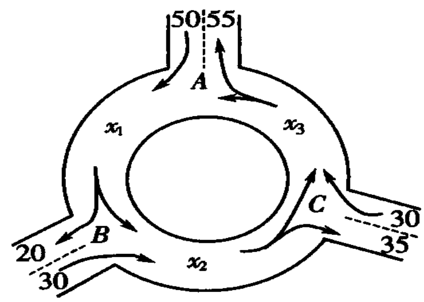

图 1

6. 已知四个互不相等的实数 x_1、x_2、x_3、x_4($x_1<x_2$,$x_3<x_4$). 又 a 为实数,函数 $y_1=x^2-4x+a$ 与 x 轴交于$(x_1,0)$、$(x_2,0)$两点,函数 $y_2=x^2+ax-4$ 与 x 轴交于$(x_3,0)$、$(x_4,0)$两点. 若这四个交点从左到右依次标为 A、B、C、D,且 $AB=BC=CD$,则 a 的值为(　　).

(A) $a=-3$　　(B) a 小于 0

(C) $a=0$　　(D) a 大于 0

二、填空题(每小题 7 分,共 28 分)

1. 如图 2,$AD\parallel BC$,梯形 $ABCD$ 的面积是 180,E 是 AB 的中点,F 是边 BC 上的点,且 AF

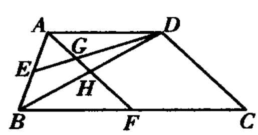

图 2

$\parallel DC$, AF 分别交 ED、BD 于点 G、H. 设 $\frac{BC}{AD}=m(m\in\mathbf{N})$. 若 $\triangle GHD$ 的面积为整数,则 m 的值为______.

2. 将自然数 $1,2,\cdots,k^2$ 列成正方形数表(如表 1),然后从表中任意选定 1 个数,随后删掉该数所在的行和列,再对剩下的 $(k-1)^2$ 个数的正方形数表作同样处理,如此下去,共作 k 次选数程序. 则被选中的 k 个数之和______.

表 1

1	2	…	k
$k+1$	$k+2$	…	$2k$
…	…	…	…
$(k-1)k+1$	$(k-1)k+2$	…	k^2

3. 如图 3,设 AB、CD 是以 O 为圆心、r 为半径的圆的两条互相垂直的弦,且将圆分成的四个部分(每一部分允许退化为一个点)依顺时针顺序记为 X、Y、Z、W. 则 $\frac{S_X+S_Z}{S_Y+S_W}$ 的最大值(其中,S_U 表示 U 的面积)为______.

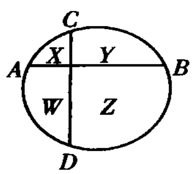

图 3

4. 一个人掷骰子,把每次掷得的数字加起来,如果超过 20 就停止. 那么,当他停下来的时候,他最有可能掷得数字的总和是______.

第 二 试

一、(20 分) 已知二次函数

$y=x^2+2mx-n^2$.

(1) 若此二次函数的图像经过点 $(1,1)$,且记 m, $n+4$ 两数中较大者为 P,试求 P 的最小值;

(2) 若 m、n 变化时,这些函数的图像是不同的抛物线,如果每条抛物线与坐标轴都有三个不同的交点,则过这三个交点作圆,证明:这些圆都经过同一定点,并求出该定点的坐标.

二、(25 分) 如图 4,过圆外一点 P 作圆的两条切线 PA、PB, A、B 为切点,再过点 P 作圆的一条割线分别交圆于点 C、D,过点 B 作 PA 的平行线分别交直线 AC、AD 于点 E、F. 求证: $BE=BF$.

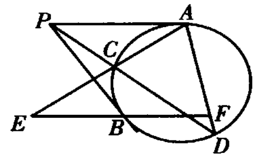

图 4

三、(25 分) 设 $1\leq a_1<a_2<\cdots<a_n\leq 21$ 是 n 个任意的整数. 若其中总有 4 个不同的数 a_i、a_j、a_k、a_m 满足

$$a_i+a_m=a_j+a_k\quad(1\leq i<j<k<m\leq n),$$

则称数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 的阶数 n 为"好数".

(1) $n=7$ 是否为好数?说明理由;

(2) $n=8$ 是否为好数?说明理由.

参 考 答 案

第 一 试

一、**1.** B.

由题意得

$$c=\pm\sqrt{\frac{3}{2}},\ a=\pm\sqrt{\frac{1}{2}},\ b=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

注意到

$$ab+bc+ca=\frac{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)}{2},$$

故只须考虑 $|a+b+c|$ 的最小值即可.

为了让 $|a+b+c|$ 最小,可取

$$a=b=-\sqrt{\frac{1}{2}},\ c=\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

于是, $ab+bc+ca$ 的最小值为 $-\sqrt{3}+\frac{1}{2}$.

2. D.

根据题意,依次枚举答对 20 道题、19 道题、……的各种可能发现:

(1) 小强与小刚可能都答对 17 题、答错 1 题、未答其余 2 题同得 83 分;

(2) 小刚与小强可能同得 53 分,不过一人答对 13 题、答错 6 题、1 题未答,另一人答对 11 题、答错 1 题、其余各题未答;

(3) 小刚与小强也可能同得 23 分,其中一人答对 9 题,其余各题答错,另一人答对 5 题、答错 1 题、其余各题未答.

3. B.

如图 5,过点 B 作 AC 的平行线交 ND 的延长线于点 E. 联结 ME. 由 $BD = DC$,知 $ED = DN$,有 $\triangle BED \cong \triangle CND$. 于是,$BE = CN$. 显然,$MD$ 为 EN 的中垂线,则有

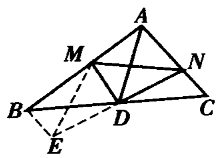

图 5

$$EM = MN.$$

由 $BM^2 + BE^2 = BM^2 + CN^2$

$= DM^2 + DN^2 = MN^2 = EM^2$,

知 $\triangle BEM$ 为直角三角形,$\angle MBE = 90°$.

因此,$\angle ABC + \angle ACB = \angle ABC + \angle EBC = 90°$.

于是,$\angle BAC = 90°$.

所以,$AD^2 = \left(\frac{1}{2}BC\right)^2 = \frac{1}{4}(AB^2 + AC^2)$.

4. D.

因为 $(1 + 3n) \div 5 = 2 + 3(n - 3) \div 5$,所以,这 n 个数中,只有第 3,8,13,18,…个数是 5 的倍数,它们是 $5 \times 2, 5 \times 5, 5 \times 8, 5 \times 11$,…. 它们每 5 个中恰有 1 个是 25 的倍数,每 25 个中恰有 1 个是 125 的倍数,……. 易见

$$(5 \times 2) \times (5 \times 5) \times (5 \times 8) \times \cdots \times (5 \times 77) = 5^{32} \times A,$$

其中,A 不是 5 的倍数.

所以,$5 \times 77 = 3n + 1$. 故 $n = 128$.

5. C.

依题意有 $x_1 = 50 + x_3 - 55 = x_3 - 5$,则 $x_1 < x_3$.

同理,$x_1 < x_2$,$x_3 < x_2$.

6. C.

$x_1 < x_2 < x_3 < x_4$,$x_1 < x_3 < x_2 < x_4$,$x_1 < x_3 < x_4 < x_2$,

$x_3 < x_4 < x_1 < x_2$,$x_3 < x_1 < x_4 < x_2$,$x_3 < x_1 < x_2 < x_4$.

上述 6 种情况中,第 3、6 种情况不可能出现(否则,两个函数的对称轴相同,故 $a = -4$. 从而,$x_1 = x_3$,$x_2 = x_4$,这与题意不符). 在其他 4 种情况中,都有

$$|x_2 - x_1| = |x_4 - x_3|.$$

因此,有 $\sqrt{16 - 4a} = \sqrt{a^2 + 16}$.

解得 $a = 0$ 或 -4(舍去).

经检验 $a = 0$ 满足题意.

二、1. 2 或 5.

如图 6,作 $BK \parallel AF$ 交 ED 于点 K,则 $\triangle KEB \cong \triangle GEA$.

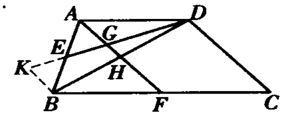

图 6

故 $\frac{GH}{AG} = \frac{GH}{BK}$

$= \frac{HD}{BD} = \frac{FC}{BC}$

$= \frac{AD}{BC} = \frac{1}{m}$.

于是,有 $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{m+1} S_{四边形ABCD} = \frac{180}{m+1}$,

$S_{\triangle AHD} = \frac{1}{m} S_{\triangle ABD} = \frac{180}{m(m+1)}$,

$S_{\triangle GHD} = \frac{1}{m+1} S_{\triangle AHD} = \frac{180}{m(m+1)^2}$.

易知 $\frac{180}{m(m+1)^2}$ 为整数,所以,$(m+1)^2 \mid 180$.

又因 $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$,所以 $m + 1 = 2, 3$ 或 6.

经验证,$m + 1 = 3$ 或 6.

2. $\frac{1}{2}k(k^2 + 1)$.

把表 1 分成下面的两个数表:

表 2

1	2	…	k
1	2	…	k
…	…	…	…
1	2	…	k

表 3

0	0	…	0
k	k	…	k
…	…	…	…
$(k-1)k$	$(k-1)k$	…	$(k-1)k$

容易看出,表 1 中每个数等于分成的表 2 和表 3 中处于同样位置的两数之和. 因而,所选的 k 个数由于既不同行又不同列,其和恰为

$$S = (1 + 2 + \cdots + k) + [0 + k + \cdots + (k-1)k]$$

$$= \frac{1}{2}k(k+1) + \frac{1}{2}k^2(k-1) = \frac{1}{2}k(k^2+1).$$

3. $\frac{\pi + 2}{\pi - 2}$.

不妨设圆心落在如图 7(a) 的 Z 中.

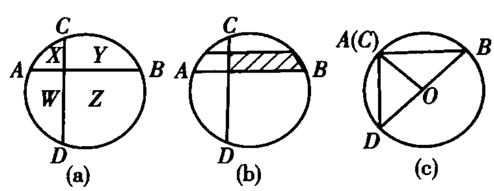

图 7

当弦 AB 向上平移时,图 7(b) 中的阴影部分面

积大于它左边无阴影部分的面积,所以,S_X+S_Z 增加,而 S_Y+S_W 在减少(注意 X、Y、Z、W 的面积之和是定值 πr^2).因而,比值 $\frac{S_X+S_Z}{S_Y+S_W}$ 增加.

于是,当点 A 与点 C 重合时,它才有可能取到最大值.

在图7(c)中,Rt△ABD 的斜边 BD 是直径,则△ABD 在 OA 为高时面积最大,此时,S_Z 最大,S_X+S_Z 也最大,其值为 $\frac{1}{2}\pi r^2+r^2$.而 S_Y+S_W 最小,其值为 $\frac{1}{2}\pi r^2-r^2$.

所以,$\frac{S_X+S_Z}{S_Y+S_W}$ 的最大值是

$$\frac{\frac{1}{2}\pi r^2+r^2}{\frac{1}{2}\pi r^2-r^2}=\frac{\pi+2}{\pi-2}.$$

4.21.

考虑超过20那一次的前一次掷骰子结束后,得到的数值是 x.

若 $x=15$,则只能掷6得到21;

若 $x=16$,则只能掷5或6得到21或22,每个数字出现的可能都是 $\frac{1}{2}$;

若 $x=17$,则只能掷4、5或6得到21,22或23,每个数字出现的可能都是 $\frac{1}{3}$;

若 $x=18$,则只能掷3,4,5或6得到21,22,23或24,每个数字出现的可能都是 $\frac{1}{4}$;

若 $x=19$,则只能掷2,3,4,5或6得到21,22,23,24或25,每个数字出现的可能都是 $\frac{1}{5}$;

若 $x=20$,则掷1,2,3,4,5或6得到21,22,23,24,25或26,每个数字出现的可能都是 $\frac{1}{6}$.

所以,出现21的可能性大于出现其他数字的可能性.故21是最有可能掷得数字的总和.

第二试

一、(1)由二次函数过点(1,1)得 $m=\frac{n^2}{2}$.

注意到

$$m-(n+4)=\frac{n^2}{2}-(n+4)$$

$$=\frac{1}{2}(n^2-2n-8)=\frac{1}{2}(n-4)(n+2),$$

所以,$P=\begin{cases}\frac{n^2}{2}, & n\leqslant -2 \text{ 或 } n\geqslant 4;\\ n+4, & -2<n<4.\end{cases}$

再利用函数图像可知,当 $n=-2$ 时,$P_{\min}=2$.

(2)图像与坐标轴有三个不同的交点,可设交点坐标为 $A(x_1,0)$、$B(x_2,0)$、$C(0,-n^2)$.

又 $x_1x_2=-n^2$,若 $n=0$,则与三个交点不符,故 $x_1x_2=-n^2<0$.所以,x_1、x_2 分在原点左右两侧.

又 $|x_1x_2|=n^2\times 1$,所以,存在点 $P_0(0,1)$ 使得 $|OA|\cdot|OB|=|OP_0|\cdot|OC|$.

故 A、B、C、P_0 四点共圆,即这些圆必过定点 $P_0(0,1)$.

二、如图8,联结 BC、BA、BD.所以,

$\angle ABC=\angle PAC=\angle E$.

则△ABC∽△AEB.

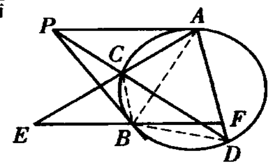

图8

从而,$\frac{BE}{BC}=\frac{AB}{AC}$,即

$$BE=\frac{AB\cdot BC}{AC}. \qquad ①$$

又 $\angle ABF=\angle PAB=\angle ADB$,所以,△$ABF$∽△$ADB$.

从而,$\frac{BF}{BD}=\frac{AB}{AD}$,即

$$BF=\frac{AB\cdot BD}{AD}. \qquad ②$$

另一方面,又因△PBC∽△PDB,△PCA∽△PAD,所以,

$$\frac{BC}{BD}=\frac{PC}{PB},\frac{AC}{AD}=\frac{PC}{PA}.$$

而 $PA=PB$,所以,

$$\frac{BC}{BD}=\frac{AC}{AD}.$$

于是,

$$\frac{BC}{AC}=\frac{BD}{AD}. \qquad ③$$

由式①、②、③即知 $BE=BF$.

三、(1) $n=7$ 时,{1,2,3,5,8,13,21}不满足要求,故 $n=7$ 不是好数.

(2)只须证明:对任意的8个整数

$$1\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_8\leqslant 21,$$

其中总有4个不同的数 $a_i<a_j<a_k<a_m$ 满足 $a_i+a_m=a_j+a_k$,即

$$a_j-a_i=a_m-a_k\ (1\leqslant i<j<k<m\leqslant 8).$$

首先,8个正整数可产生 $\frac{8\times 7}{2}=28$ 个差 a_j-a_i

数学奥林匹克初中训练题(7)

第 一 试

一、选择题(每小题 7 分,共 42 分)

1. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 表示 0～9 的数字,且 $n+1$ 位数 $\overline{a_1 a_2 \cdots a_n 2}$ 乘以 2 后变为 $\overline{2 a_1 a_2 \cdots a_n}$. 则 n 的最小值为( ).

(A) 15 (B) 16 (C) 17 (D) 18

2. 时钟指在上午 9 时至 10 时的某一时刻,这一时刻前 2 分钟的时针与后 2 分钟的分针在一条直线上(不考虑重合情形). 则这一时刻为( ).

(A) 9 时 $13\frac{7}{11}$ 分 (B) 9 时 16 分

(C) 9 时 12 分 (D) 9 时 14 分

3. 五边形 $ABCDE$ 中,$\angle A = \angle C = 90°$, $AB = BC = DE = AE + CD = 3$. 则这个五边形的面积为( ).

(A) 9 (B) 10.5 (C) 12 (D) 13.5

4. 对于每个 x,函数 y 是函数

$$y_1 = 2x, y_2 = x+3, y_3 = -x+3$$

中的最大值. 则函数 y 的最小值为( ).

(A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 6

5. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 开口向下,顶点位于第二象限,且经过点 $(1,0)$ 及 $(0,2)$. 则 a 的取值范围是( ).

(A) $a<0$ (B) $a<-1$

(C) $-2<a<0$ (D) $-1<a<0$

6. 设 G 是 $\triangle ABC$ 的重心,r 是 $\triangle ABC$ 内切圆的半径,点 G 到边 BC、CA、AB 的距离分别为 GD、GE、GF. 令 $s = \frac{1}{GD} + \frac{1}{GE} + \frac{1}{GF}$. 则( ).

(A) $s > \frac{3}{r}$ (B) $s = \frac{3}{r}$

(C) $s < \frac{3}{r}$ (D) 不能确定

二、填空题(每小题 7 分,共 28 分)

1. 将分式 $\frac{6}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$ 写成

$(1 \leq i < j \leq 8)$,由于这 8 个数均为 1 至 21 之间的整数,因此,$1 \leq a_j - a_i \leq 20\ (1 \leq i < j \leq 8)$,最多只有 20 个不同的差值. 故由抽屉原理知,其中至少有 8 对差相等.

(i) 若这 8 对相等的差中,存在 1 对其中的 4 个数互不相同,即

$$a_j - a_i = a_m - a_k\ (1 \leq i < j < k < m \leq 8).$$

此时原题成立.

(ii) 若这 8 对相等的差中,每一对的 4 个数中至少有 2 个数相同,则这 4 个数中恰有 2 个数相同(因为 $a_j - a_i = a_m - a_k$ 中至多有 $a_j = a_k$ 或 $a_i = a_m$ 之一成立). 于是,每对这样的差对应一个三元数组 (a_i, a_j, a_k),且满足

$$2a_j = a_i + a_k\ (1 \leq i < j < k \leq 8).$$

不妨设这 8 对差对应的 8 个不同的三元数组为

$$(a_{i1}, a_{j1}, a_{k1}), (a_{i2}, a_{j2}, a_{k2}), \cdots, (a_{i8}, a_{j8}, a_{k8}),$$

其中,$2a_{jl} = a_{il} + a_{kl}\ (l = 1, 2, \cdots, 8)$.

由于 a_1 与 a_8 不能作为三元数组的中间项,故中间项至多有 6 种不同的取法. 再由抽屉原理,知上述 8 个不同的三元数组中必有 2 个三元数组的中间项相等,不妨设为 $a_{j1} = a_{j2}$. 则

$$a_{i1} + a_{k1} = 2a_{j1} = 2a_{j2} = a_{i2} + a_{k2},$$

其中,a_{i1}、a_{k1}、a_{i2}、a_{k2} 两两不同(否则它们为同一个三元数组,矛盾).

综合(i)、(ii)知,$n = 8$ 是好数.

(黄志军 南京外国语学校,210008)