数学奥林匹克初中训练题(5)

第 一 试

一、选择题(每小题 7 分,共 42 分)

1. 若方程 $x^2-3x+1=0$ 的两根也是方程 $x^4-px^2+q=0$ 的根,则 $(p+q)^{2008}$ 的个位数字是(　　).

(A) 2　(B) 4　(C) 6　(D) 8

2. 函数 $y=\frac{1}{x^2+ax+b}$(其中,a、b 为非零常数)取得最大值的条件是(　　).

(A) $a^2-4b\geqslant 0$　(B) $a^2-4b\neq 0$

(C) $a^2-4b<0$

(D) 与 a、b 取值有关,不能确定

3. 设 $\triangle ABC$ 的内切圆半径为 r,$BC=a$,$AC=b$,$AB=c$,且其上的高分别为 h_a、h_b、h_c,满足 $h_a+h_b+h_c=9r$. 则 $\triangle ABC$ 的形状(　　).

(A) 一定是钝角三角形

(B) 一定是等边三角形

(C) 一定不是锐角三角形

(D) 不一定是直角三角形

4. 若三个互不相等的非零实数 x、y、z,满足关系式

$$x(y-z)=\frac{y(z-x)}{q}=\frac{z(y-x)}{q^2},$$

则 q 的取值为(　　).

$=180°-(90°-\angle EAF)$

$=90°+\angle EAF=90°+\angle PEF$,

$\angle K=\frac{1}{2}\angle EPF=\frac{1}{2}(180°-2\angle PEF)$

$=90°-\angle PEF$,

所以,$\angle EQF+\angle K=180°$.

故 K、F、Q、E 四点共圆.

注意到 $PK=PE=PF$,则 P 必是该圆的圆心.

此时,$PQ=PF$.

于是,$\angle PQF=\angle PFQ=\angle PFB$

$=\angle FAB=\angle FAH$.

故 A、H、Q、F 四点共圆.

此时,$\angle PHA=\angle QHA=180°-\angle QFA=90°$,

所以,$PH\perp AB$,即

$PQ\perp AB$.　②

由式①、②知 C、P、Q 三点共线.

故 $CP\perp AB$.

三、(1) 由 $a^2+(y_1+y_2)a+y_1y_2=0$,得

$(a+y_1)(a+y_2)=0$.

解得 $y_1=-a$ 或 $y_2=-a$.

(2) 当 $a>0$ 时,二次函数 $f(x)$ 的图像开口向上,图像上的点 A、B 的纵坐标至少有一个为 $-a<0$,所以,图像与 x 轴有两个交点;

当 $a<0$ 时,二次函数 $f(x)$ 的图像开口向下,图像上的点 A、B 的纵坐标至少有一个为 $-a>0$,所以,图像与 x 轴有两个交点.

故函数 $f(x)$ 的图像与 x 轴有两个不同交点.

(3) 因为 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为

$\{x|x>m$ 或 $x<n\}(n<m<0)$,

所以,$a>0$,$b>0$,$c>0$.

从而,$cx^2+bx+a=0$ 的两个根为 $x_1=\frac{1}{m}$,$x_2=\frac{1}{n}$. 于是,$cx^2-bx+a=0$ 两个根为 $x_1=-\frac{1}{m}$,$x_2=-\frac{1}{n}$.

因为 $n<m<0$,所以,$-\frac{1}{n}<-\frac{1}{m}$.

故不等式 $cx^2-bx+a>0$ 的解集为

$x>-\frac{1}{m}$ 或 $x<-\frac{1}{n}$.

(孙　彦　安徽省安庆市教学研究室,246004
黄全福　安徽省怀宁县江镇中学,246142)

(A) $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$　　(B) $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

(C) $\pm\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$　　(D) $\pm\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

5.若直角三角形的一条直角边长为 12，**另两条边长均为整数，则符合这样条件的直角三角形共有(　　)个.**

(A) 1　(B) 6　(C) 4　(D) 无数多

6.如图 1，**在** $\triangle ABC$ **中**，$\angle A > \angle B > \angle C$，$I$ **是内心. 现给出三条路线**：

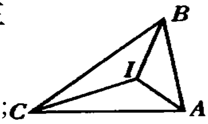

图 1

①$I \to A \to C \to B \to I$；

②$I \to C \to B \to A \to I$；

③$I \to B \to A \to C \to I$.

若记它们的长度分别为 l_1、l_2、l_3，**则其中最短的是(　　)**.

(A) l_1　(B) l_2　(C) l_3　(D) 不能确定

二、填空题(每小题 7 **分，共** 28 **分)**

1.已知

$$\begin{cases} 2\,006(x-y)+2\,007(y-z)+2\,008(z-x)=0, \\ 2\,006^2(x-y)+2\,007^2(y-z)+2\,008^2(z-x)=2\,008. \end{cases}$$

则 $z-y$ **的值等于**______.

2.如图 2，**在四边形** $ABCD$ **中**，$AB=10$，$BC=17$，$CD=13$，$DA=20$，$AC=21$. **则** $BD=$______.

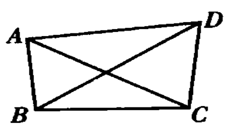

图 2

3.一个三位数 $\overline{xyz}$ **(其中**，x、y、z **互不相等)，将其各个数位的数字重新排列，分别得到的最大数和最小数仍是三位数. 若所得到的最大三位数与最小三位数之差是原来的三位数，则这个三位数是**______.

4.如图 3，**在等腰** Rt$\triangle ABC$ ($\angle C=90°$) **内取一点** P，**且** $AP=AC=a$，$BP=CP=b$ ($a>b$). **则** $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=$______.

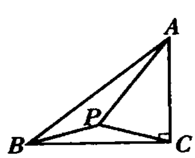

图 3

第二试

一、(20 分)若一直角三角形两直角边的长 a、b ($a\neq b$) **均为整数，且满足**

$$\begin{cases} a+b=m+2, \\ ab=4m. \end{cases}$$

试求这个直角三角形的三边长.

二、(25 分) 如图 4，**已知** $\odot O$ **与** $\triangle ABC$ **的边** AB、AC **分别相切于点** P、Q，**与** $\triangle ABC$ **的外接圆相切于点** T. **设切点弦** PQ **的中点为** I. **求证**：IT **平分** $\angle BTC$.

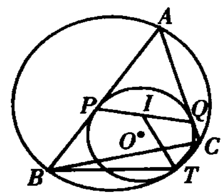

图 4

三、(25 分)已知 $x_1^3+x_2^3+\cdots+x_8^3-x_9^3$ **的个位数字是** 1，**其中**，x_1，x_2，$\cdots$，x_9 **是** 2 001，2 002，$\cdots$，2 009 **中的九个不同的数，且** $8x_9 > x_1+x_2+\cdots+x_8$. **求** x_9 **的值.**

参考答案

第一试

一、1. C.

设方程 $x^2-3x+1=0$ 的两根分别为 α、β，则

$\alpha^4-p\alpha^2+q=0$，$\beta^4-p\beta^2+q=0$.　①

又 $\Delta=(-3)^2-4=5>0$，则 $\alpha\neq\beta$，即 $\alpha^2\neq\beta^2$.

由式①得

$$p=\frac{\alpha^4-\beta^4}{\alpha^2-\beta^2}=\alpha^2+\beta^2,\ q=\frac{\alpha^2\beta^2(\alpha^2-\beta^2)}{\alpha^2-\beta^2}=\alpha^2\beta^2.$$

又 $\alpha+\beta=3$，$\alpha\beta=1$，从而，

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=7$，$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=1$.

所以，$p=7$，$q=1$.

于是，$(p+q)^{2\,008}=8^{2\,008}=(8^4)^{502}=4\,096^{502}$.

2. C.

注意到

$$y=\frac{1}{x^2+ax+b}=\frac{4}{4\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+4b-a^2}.$$

(1) 若 $a^2-4b\geqslant0$，则 $x^2+ax+b=0$ 有实根，此时，y 无最大值；

(2)若 $a^2-4b<0$,则 $0<y\le\frac{4}{4b-a^2}$.

综上,当 $a^2-4b<0$ 时,$y_{最大}=\frac{4}{4b-a^2}$.

3. B.

易知 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$,则有

$$h_a+h_b+h_c=2S_{\triangle ABC}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}r(a+b+c)$,

$$h_a+h_b+h_c=9r,$$

则有 $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=9$,即

$$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2=0,$$

所以,$(a-b)^2=(b-c)^2=(c-a)^2=0$.

故 $a=b=c$.

4. B.

由题设条件知 $q\neq\pm1$.

由等比性质得

$$\frac{x(y-z)+y(z-x)}{1+q}=\frac{z(y-x)}{q^2}.$$

又 $x(y-z)+y(z-x)=z(y-x)$,

所以,$1+q=q^2$,即 $q^2-q-1=0$.

解得 $q=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

5. C.

设 $a=12$,c 为斜边,则有

$$c^2-b^2=a^2=144.$$

因为 $144=2^4\times3^2$,所以,

$(c+b)(c-b)=72\times2$;

$(c+b)(c-b)=36\times4$;

$(c+b)(c-b)=18\times8$;

$(c+b)(c-b)=16\times9$;

$(c+b)(c-b)=48\times3$;

$(c+b)(c-b)=24\times6$.

又因为 $c+b$ 与 $c-b$ 同奇偶,故符合题意条件的直角三角形有以下四个:

$$\begin{cases}a=12,\\b=5,\\c=13;\end{cases}\begin{cases}a=12,\\b=9,\\c=15;\end{cases}\begin{cases}a=12,\\b=16,\\c=20;\end{cases}\begin{cases}a=12,\\b=35,\\c=37.\end{cases}$$

6. C.

因 $\angle A>\angle B>\angle C$,则 $a>b>c$.

设 $AI=x$,$BI=y$,$CI=z$(易知 $x<y<z$),于是,

$l_1=x+b+a+y=(b+y)+(a+x)$;

$l_2=z+a+c+x=(a+x)+(c+z)$;

$l_3=y+c+b+z=(b+y)+(c+z)$.

如图 5,延长 CA 至点 D,使得 $CD=a$,联结 ID. 显然,

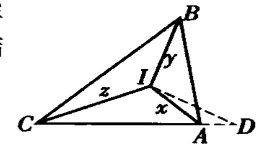

图 5

$\triangle ICD\cong\triangle ICB$.

则 $AD=a-b$,

$ID=y$.

在 $\triangle AID$ 中,有

$AI+AD>ID$,

即 $x+(a-b)>y$.

所以,$b+y<a+x$.

同理,$c+z<b+y$.

因此,$c+z<b+y<a+x$.

由此对 l_1、l_2、l_3 作比较,可知 l_3 的长度最短.

二、**1.** 2 008.

设 $z-y=t$.

从题设第一个方程得 $z-2x+y=0$.

于是,$z-x=\frac{t}{2}$,进而,$x-y=\frac{t}{2}$.

故由题设第二个方程可求得

$t=z-y=2\ 008$.

2. $10\sqrt{5}$.

如图 6,作 $BE\perp AC$ 于点 E,$DF\perp AC$ 于点 F,并作 $BG\parallel AC$ 交 DF 的延长线于点 G,则四边形 $BEFG$ 是矩形,$\triangle BDG$、$\triangle ABE$、$\triangle CDF$ 均为直角三角形.

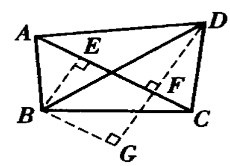

图 6

在 $\triangle ABC$ 中,有

$$p=\frac{1}{2}(AB+BC+CA)=24.$$

故 $BE=\frac{2}{21}\sqrt{24(24-10)(24-17)(24-21)}=8$.

同理,在 $\triangle ADC$ 中,有 $DF=12$.

故 $DG=DF+FG=DF+BE=20$.

又 $AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=6$,

$CF=\sqrt{CD^2-DF^2}=5$,

则 $BG=EF=AC-AE-CF=10$.

所以,$BD=\sqrt{DG^2+BG^2}=10\sqrt{5}$.

3. 495.

设三位数 $\overline{xyz}$ 经过重新排列后所得到的最大三位数为 $\overline{abc}(a>b>c)$,则最小的三位数是 $\overline{cba}$.

由于 $1\le a\le 9,1\le b\le 9,1\le c\le 9$,且

$\overline{abc}-\overline{cba}=(100a+10b+c)-(100c+10b+a)$
$=99(a-c)$

是 99 的倍数,故所求的三位数 $\overline{xyz}$ 也是 99 的倍数.

而是 99 倍数的三位数只有 8 个:198,297,396,495,594,693,792,891.

经验证知,只有 495 符合题意.

4. $\sqrt{3}$.

由题设知,$\angle BPC$ 与 $\angle CAP$ 互补.

如图 7,延长 BP 交 AC 于点 K,则

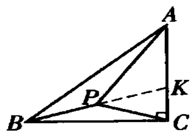

图 7

$PC=PK=b,BK=2b$.

由 $\triangle PCK\backsim\triangle ACP$,知

$CK=\frac{b^2}{a}$.

又 $BK^2=BC^2+CK^2$,即

$(2b)^2=a^2+\left(\frac{b^2}{a}\right)^2$,

所以,$a^4+b^4=4a^2b^2$.

于是,$(a^2+b^2)^2=6a^2b^2$,

$(a^2-b^2)^2=2a^2b^2(a>b)$.

故 $\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)^2=3$,即 $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\sqrt{3}$.

第 二 试

一、因为 a、b 为正整数,所以,m 也为正整数.从而,a、b 是关于 x 的方程 $x^2-(m+2)x+4m=0$ 的两个不等整数解.

所以,$\Delta=(m+2)^2-16m=m^2-12m+4$ 必为完全平方数.

不妨设 $m^2-12m+4=k^2$(k 为正整数),即

$$m^2-12m+4-k^2=0. \qquad ①$$

由此知关于 m 的方程①应有整数解,则

$\Delta'=(-12)^2-4(4-k^2)=4(32+k^2)$

也必为完全平方数.

于是,$32+k^2$ 为完全平方数.

令 $32+k^2=(k+n)^2$(n 为正整数).

则 $32=(k+n)^2-k^2=n(2k+n)$.

显然,$n<2k+n$.

又 $32=1\times32=2\times16=4\times8$,于是,分三种情况讨论:

(1) $n(2k+n)=1\times32=1\times(2k+1)$,知 k 无整数解;

(2) $n(2k+n)=2\times16=2(2k+2)$,知 $k=7,m=15$,直角三角形的三边长分别为 5,12,13;

(3) $n(2k+n)=4\times8=4(2k+4)$,知 $k=2,m=12$,直角三角形的三边长分别为 6,8,10.

综上,直角三角形的三边长分别为 5,12,13 或 6,8,10.

二、如图 8,联结 OA.由题设易知,OA 平分 $\angle BAC$,OA 垂直平分 PQ.所以,O、I、A 三点共线.

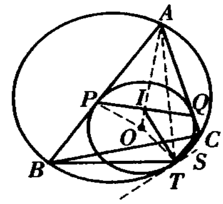

图 8

联结 OP、OT、AT,则

$OP^2=OI\cdot OA=OT^2$.

从而,

$\triangle OTI\backsim\triangle OAT$.

故 $\angle OTI=\angle OAT$.

过点 T 作两圆的公切线 ST,则有

$\angle STC=\angle CAT$.

由 $OT\perp ST$,可知

$\angle OTS=\angle OTI+\angle ITC+\angle CTS=90°$.

故 $\angle CTI=90°-(\angle OTI+\angle CTS)$

$=90°-(\angle OAT+\angle CAT)$

$=90°-\angle CAO=90°-\frac{1}{2}\angle A$.

同理,$\angle BTI=90°-\frac{1}{2}\angle A=\angle CTI$.

因此,IT 平分 $\angle BTC$.

三、因为 $x_1,x_2,\cdots,x_9$ 是 2 001,2 002,…,2 009 中的九个不同的数,又 2 001,2 002,…,2 009 这九个数的个位数字 1,2,3,4,5,6,7,8,9 经 3 次方后所得的个位数字分别为 1,8,7,4,5,6,3,2,9,所以,$x_1^3+x_2^3+\cdots+x_9^3$ 的个位数字必是 5.

又 $x_1^3+x_2^3+\cdots+x_8^2-x_9^3$

$=x_1^3+x_2^3+\cdots+x_8^3+x_9^3-2x_9^3$.

不妨设 x_9^3 的个位数字是 a_9.

故 $x_1^3+x_2^3+\cdots+x_9^3$ 的个位数字有两种情况:

(1) 当 $5-2a_9>0$ 时,为 $5-2a_9$;

(2) 当 $5-2a_9<0$ 时,为 $15-2a_9$.

因此,有 $5-2a_9=1$ 或 $15-2a_9=1$.

于是,$a_9=2$ 或 $a_9=7$,即

$x_9=2\ 008$ 或 $x_9=2\ 003$.

又 $8x_9>x_1+x_2+\cdots+x_8$,所以,$x_9=2\ 008$.

(李耀文　山东省枣庄市第四十中学,277200)