数学奥林匹克初中训练题(3)

第 一 试

一、选择题(每小题 7 分,共 42 分)

1. 给出如下 4 个命题:

①若 m、n 为已知数,单项式 $2x^5y^{n-2}$ 与 $(m+5)x^{|m-n+4|}y$ 的和为单项式,则 $m+n$ 的值为 -3 或 7.

②若 M、N 都是只含有一个字母 x 的多项式,M、N 的次数分别为 6 次、3 次,则 $M-N^2$ 是次数不超过 6 的多项式.

③若 m 为自然数,则关于 x 的方程

$(-x)^{m+1}(-x)^{2m-2}(-x)^{3m+1}=x^{x+1}x^{6m-1}$ 的解是 $x=-1,0,1$.

④已知 AM、DN 分别是 $\triangle ABC$、$\triangle DEF$ 的高,$AB=DE$,$AC=DF$,$AM=DN$. 若 $\angle BAC=40°$, $\angle ABC=35°$,则 $\angle DFE=105°$.

其中,错误命题的个数是(　　)个.

(A) 0　　(B) 1 或 2　　(C) 3　　(D) 4

2. 如图 1,$ABCD$ 是边长为 1 的正方形,对角线 AC 所在的直线上有两点 M、N,使 $\angle MBN=135°$. 则 MN 的最小值是(　　).

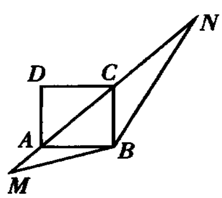

图 1

(A) $1+\sqrt{2}$

(B) $2+\sqrt{2}$

(C) $3+\sqrt{2}$　　(D) $2\sqrt{2}$

3. 已知实数 a、b、c 满足

$$\left(\frac{1}{a}+b\right)\left(\frac{1}{a}+c\right)+\frac{1}{4}(b-c)^2=0.$$

则代数式 $ab+ac$ 的值是(　　).

(A) -2　　(B) -1　　(C) 1　　(D) 2

4. 如图 2,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle BAC=60°$, $BC=18$, D 是 AB 上一点,$AC=BD$,E 是 CD 的中点. 则 AE 的长是(　　).

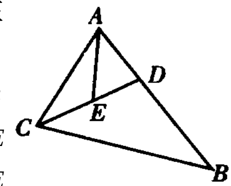

图 2

(A) 12　　(B) 9

(C) $9\sqrt{3}$　　(D) 以上都不对

5. 已知实数 a、b、c、d 满足

$2005a^3=2006b^3=2007c^3=2008d^3$,

$\sqrt[3]{2005a^2+2006b^2+2007c^2+2008d^2}$

$=\sqrt[3]{2005}+\sqrt[3]{2006}+\sqrt[3]{2007}+\sqrt[3]{2008}$.

则 $a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}+d^{-1}$ 的值为(　　).

(A) 1　　(B) 0　　(C) -1　　(D) ±1

6. 已知在平面直角坐标系 xOy 中,直线 $y=2kx+3-4k$ 与 x 轴正半轴、y 轴正半轴分别交于点 A、B,P 是线段 AB 上一点,$PM\perp x$ 轴于点 M,$PN\perp y$ 轴于点 N. 则矩形 $OMPN$ 面积的最大值至少为(　　).

(A) 3　　(B) 4　　(C) 6　　(D) 8

二、填空题(每小题 7 分,共 28 分)

1. 如图 3,AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线,$\angle C=2\angle B$,$AB=a^2-4b+4$,$AC=8c-27-2b^2$,$CD=9+4a-c^2$. 则 $BC=$______.

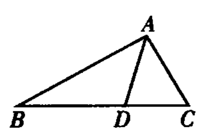

图 3

2. 已知实数 a、b、c 满足

$a-b+c=7$,　　①

$ab+bc+b+c^2+16=0$.　　②

则 $(a^{-1}-b^{-1})^{abc}(a+b+c)^{a+b+c}$ 的值为______.

3. 如图 4，四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O，E、F、G 分别是 AB、OC、OD 的中点，$OA=AD$，$OB=BC$，$CD=\sqrt{3}AB$。则 $\angle FEG$ 的度数是______。

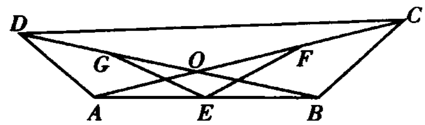

图 4

4. 如图 5 所示的四边形 $ABCD$ 是一片沙漠地的示意图，点 A、B 在 x 轴上，$E(2,6)$，$F(3,4)$。折线 OFE 是流过这片沙漠的水渠，水渠东边的沙漠由甲承包绿化，水渠西边的沙漠由乙承包绿化。现甲乙两人协商：在绿化规划中需将流经沙漠中的水渠取直，并且要保持甲乙两人所承包的沙漠地的面积不变。

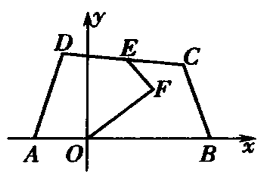

图 5

若准备在 AB 上找一点 P，使得水渠取直为 EP，则点 P 的坐标为______。

第 二 试

一、(20 分) 现有三个圆柱型的容器 M、N、P，其轴截面如图 6(a)、(b)、(c) 所示，内底面积分别为 S_1 cm^2、S_2 cm^2、S_3 cm^2，内高分别为 h_1 cm、h_2 cm、h_3 cm，容积分别为 V_1 cm^3、V_2 cm^3、V_3 cm^3 ($V_1>V_2>V_3$)。这三个圆柱型容器 M、N、P 可以拼成六个不同形状的容器(将三个容器从上至下依次拼接为 PNM、NPM、PMN、MPN、NMP、MNP)，其容积为 M、N、P 的容积之和。

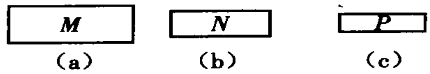

图 6

现向这 6 个容器均匀注水，注水速度相同，直至注满为止。其中有三个容器的水深 h(cm) 与注水时间 t(s) 的变化规律如图 7、8、9 所示。

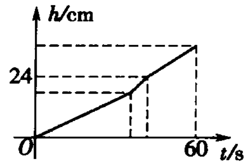

图 7

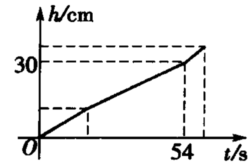

图 8

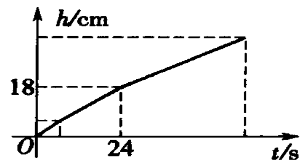

图 9

(1) 图 7、8、9 所反映的规律分别是这 6 个容器中的哪一个？

(2) 求 h_1、h_2、h_3 的值及 $S_1:S_2:S_3$ 的比值；

(3) 若 $V_3=\dfrac{9}{m^2+4m+4.125}$ cm^3，注水速度为 $\dfrac{n^2+6n+45}{n+3}$ cm^3/s，其中 m、n 为常数，求 M、P、N 这三个容器的容积之和。

二、(25 分) 如图 10，两条平行线 l_1、l_2 之间的距离为 6，l_1、l_2 间有一半径为 1 的定圆 $\odot O$ 切直线 l_2 于点 A，P 是直线 l_1 上一动点。过 P 作 $\odot O$ 的两条切线 PB、PC，切点分别为 B、C，分别交直线 l_2 于点 M、N。试问 $AM\cdot AN$ 是一个定值吗？若是，求出该定值；若不是，说明理由。

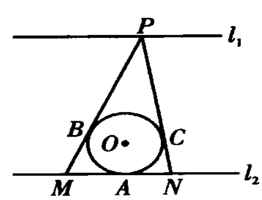

图 10

三、(25 分) 已知 k 为常数，关于 x 的一元二次方程

$$(k^2-2k)x^2+(4-6k)x+8=0$$

的解都是整数。求 k 的值。

参考答案

第一试

一、**1.** D.

(1) 当 $m=-5$, $n>2$ 时, 单项式 $2x^5y^{n-2}$ 与 0 的和 $2x^5y^{n-2}$ 还是单项式. 此时, $m+n$ 可为大于 -3 的所有整数, 故命题①错.

(2) 当 $M=x^6+1$, $N=x^3+1$ 时, $M-N^2=-2x^3$. 而 $-2x^3$ 是三次单项式, 故命题②错.

(3) 当 $m=0$ 时, $x=0$ 使得 $(-x)^{2m-2}$ 和 x^{6m-1} 无意义, 此时, $x=0$ 不是原方程的解, 故命题③错.

(4) 当 DN 在 $\triangle DEF$ 的内部时(如图 11).

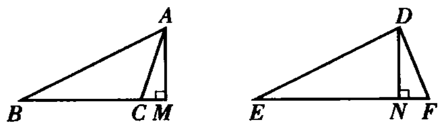

图 11

易证 $\mathrm{Rt}\triangle AMC \cong \mathrm{Rt}\triangle DNF$. 所以,

$\angle DFE=\angle ACM=\angle BAC+\angle ABC=75^\circ$.

故命题④错.

2. B.

设 $AM=x$. 易证 $\triangle ABM \backsim \triangle CNB$.

所以, $\frac{AB}{CN}=\frac{AM}{CB}$, 即 $\frac{1}{CN}=\frac{x}{1}$, 亦即 $CN=\frac{1}{x}$.

故 $MN=AM+AC+CN=x+\sqrt{2}+\frac{1}{x}$

$=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+2+\sqrt{2}\geqslant 2+\sqrt{2}$.

3. A.

题设等式化为

$4(ab+1)(ac+1)+(ab-ac)^2=0$,

即 $(ab+ac)^2+4(ab+ac)+4=0$,

亦即 $[(ab+ac)+2]^2=0$.

故 $ab+ac=-2$.

4. B.

如图 12, 延长 AC 至点 F, 使 $CF=AD$. 联结 BF, 过点 C 作 $CG\parallel AB$ 交 BF 于点 G, 联结 DG、AG.

因为 $AC=DB$,

$CF=AD$,

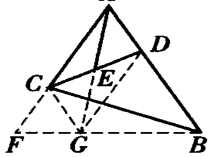

图 12

所以, $AC+CF=DB+AD$, 即 $AF=AB$.

又 $\angle BAC=60^\circ$, 所以, $\triangle ABF$ 为等边三角形.

故 $AF=BF$, $\angle F=60^\circ$.

因为 $CG\parallel AB$, 所以, $\triangle CFG$ 为等边三角形.

故 $CF=FG=CG$.

易知 $\triangle AGF\cong\triangle BCF$, 有 $AG=BC=18$.

又 $CG \mathrel{\underline{\parallel}} AD$, 故四边形 $ACGD$ 是平行四边形.

因此, CD 与 AG 互相平分, 即 E 为 AG 的中点.

故 $AE=\frac{1}{2}AG=\frac{1}{2}\times 18=9$.

5. D.

设 $x=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$,

$2\,005a^3=2\,006b^3=2\,007c^3=2\,008d^3=k^3$.

显然, a、b、c、d、k 同号且不为零, 则

$2\,005a^2=\frac{k^3}{a}$, $2\,006b^2=\frac{k^3}{b}$,

$2\,007c^2=\frac{k^3}{c}$, $2\,008d^2=\frac{k^3}{d}$;

$2\,005=\frac{k^3}{a^3}$, $2\,006=\frac{k^3}{b^3}$,

$2\,007=\frac{k^3}{c^3}$, $2\,008=\frac{k^3}{d^3}$.

由已知的第二个等式得

$\sqrt[3]{\frac{k^3}{a}+\frac{k^3}{b}+\frac{k^3}{c}+\frac{k^3}{d}}$

$=\sqrt[3]{\frac{k^3}{a^3}}+\sqrt[3]{\frac{k^3}{b^3}}+\sqrt[3]{\frac{k^3}{c^3}}+\sqrt[3]{\frac{k^3}{d^3}}$,

即 $\sqrt[3]{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$.

于是, 有 $\sqrt[3]{x}=x$.

所以, $x=0$, $x=-1$, $x=1$.

因 a、b、c、d 同号, 则 $x\neq 0$.

故 $x=a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}+d^{-1}=\pm 1$.

6. C.

设点 P 的坐标为 (x_0, y_0), 矩形 $OMPN$ 的面积为 S. 则 $x_0>0$, $y_0>0$, $S=x_0y_0$.

因为点 $P(x_0, y_0)$ 在 $y=2kx+3-4k$ 上, 所以,

$y_0=2kx_0+3-4k$.

故 $S=x_0(2kx_0+3-4k)=2kx_0^2+(3-4k)x_0$.

因此, $S_{最大}=\frac{4\times 2k\times 0-(3-4k)^2}{4\times 2k}$, 即

$16k^2-(24-8S_{最大})k+9=0$.

因为 k 为实数, 则有

$\Delta=[-(24-8S_{最大})]^2-4\times 16\times 9\geqslant 0$.

故 $|24-8S_{最大}|\geqslant 24$.

解得 $S_{最大}\geqslant 6$ 或 $S_{最大}\leqslant 0$(舍去).

当 $S_{最大}=6$ 时, $k=-\frac{3}{4}$.

二、1. $\frac{7}{3}$.

延长 AC 至点 E,使 $CE = CD$,联结 DE. 则有

$\angle E = \angle CDE = \frac{1}{2}\angle ACD = \angle B$.

因为 AD 是 $\angle BAC$ 的平分线,则

$\angle BAD = \angle EAD$,$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}$.

所以,$\triangle ABD \cong \triangle AED$.

故 $AB = AE = AC + CE = AC + CD$.

因为 $AB = a^2 - 4b + 4$,$AC = 8c - 27 - 2b^2$,

$CD = 9 + 4a - c^2$,

则 $a^2 - 4b + 4 = (8c - 27 - 2b^2) + (9 + 4a - c^2)$,

即 $(a-2)^2 + 2(b-1)^2 + (c-4)^2 = 0$.

所以,$a = 2$,$b = 1$,$c = 4$.

从而,$AB = 4$,$AC = 3$,$CD = 1$.

易知 $BD = \frac{4}{3}$,因此,

$BC = BD + CD = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}$.

2. -1.

由式①得

$(-b) + (a + c + 1) = 8$. ③

由式②得

$(a + c + 1)(-b) = c^2 + 16$. ④

所以,$a + c + 1$、$-b$ 是方程

$x^2 - 8x + c^2 + 16 = 0$

的两个根.

于是,有 $\Delta = (-8)^2 - 4(c^2 + 16) \geqslant 0$.

从而,$c^2 \leqslant 0$.

易知 $c = 0$. 进而 $x_1 = x_2 = 4$,即 $a + c + 1 = 4$,$-b = 4$,亦即 $a = 3$,$b = -4$.

故 $(a^{-1} - b^{-1})^{abc}(a + b + c)^{a+b+c}$

$= (3^{-1} + 4^{-1})^0[3 + (-4) + 0]^{3-4+0} = -1$.

3. $120°$.

如图 13,联结 AG、BF、FG,过点 E 作 $EP \perp FG$ 于点 P.

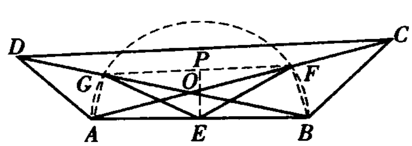

图 13

设 $AB = 2a$,则 $CD = \sqrt{3}AB = 2\sqrt{3}a$.

因为 $OA = AD$,G 是 OD 的中点,于是,

$AG \perp OD$.

所以,$\angle AGB = 90°$.

同理,$\angle AFB = 90°$.

因此,A、B、F、G 四点共圆,其直径为 AB、圆心为 E.

又 F、G 分别是 OC、OD 的中点,所以,

$FG = \frac{1}{2}CD = \sqrt{3}a = 2a\sin\frac{1}{2}\angle FEG$.

故 $\frac{1}{2}\angle FEG = 60°$,$\angle FEG = 120°$.

4. $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$.

如图 14,联结 OE,过点 F 作 $FP \parallel OE$ 交 AB 于点 P,联结 EP 交 OF 于点 G.

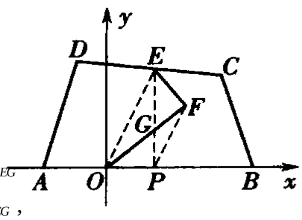

图 14

因 $OE \parallel PF$,则

$S_{\triangle OEF} = S_{\triangle OEP}$.

故 $S_{\triangle OEF} - S_{\triangle OEG}$

$= S_{\triangle OEP} - S_{\triangle OEG}$,

即 $S_{\triangle EFG} = S_{\triangle OGP}$.

所以,EP 为水渠取直路线,点 P 即为所求.

易求直线 OE 的解析式为 $y = 3x$.

因为 $OE \parallel PF$,于是,直线 PF 的解析式可设为 $y = 3x + b$.

又 $F(3, 4)$,则有 $4 = 3 \times 3 + b$,即 $b = -5$.

所以,直线 PF 的解析式为 $y = 3x - 5$.

当 $y = 0$ 时,$3x - 5 = 0$,$x = \frac{5}{3}$.

因此,点 P 的坐标为 $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$.

第 二 试

一、(1) 从图 7 知注满 M、N、P 三个容器共需 60 s,从图 8 知注满 M、N、P 三个容器中的两个容器需要 54 s,于是,注满图 8 所示的容器的最上面一个容器需要 60 - 54 = 6(s).

同理,注满图 9 所示的容器的最上面一个容器需要 60 - 24 = 36(s). 由此可知,注满第三个容器需要 60 - 6 - 36 = 18(s).

因为注水速度一定,且 $V_1 > V_2 > V_3$,所以,注满 M、N、P 三个容器分别需要 36 s、18 s、6 s.

因此,图 7、8、9 所反映的规律分别是 NPM、PMN、MNP 三种形式的容器.

(2) 设注水速度为 V cm^3/s. 由图 7、8、9 及第(1)问的结果知

$$\begin{cases}h_1+h_3=24,\\ h_2+h_1=30,\\ h_2+h_3=18;\end{cases}\quad\begin{cases}V_1+V_2+V_3=60V,\\ V_2+V_1=54V,\\ V_3+V_2=24V.\end{cases}$$

解得 $h_1=18,h_2=12,h_3=6;V_1=36V,V_2=18V,V_3=6V$.

所以，$S_1=\frac{V_1}{h_1}=\frac{36V}{18}=2V$，

$$S_2=\frac{V_2}{h_2}=\frac{18V}{12}=\frac{3}{2}V,$$

$$S_3=\frac{V_3}{h_3}=\frac{6V}{6}=V.$$

故 $S_1:S_2:S_3=2V:\frac{3}{2}V:V=4:3:2$.

(3)因为 $m^2+4m+4.125=(m+2)^2+0.125$，所以，当 $m=-2$ 时，$m^2+4m+4.125$ 的最小值为 0.125. 因此，$V_3\leqslant72$.

因注水速度 $V=\frac{n^2+6n+45}{n+3}$，即

$n^2+(6-V)n+(45-3V)=0$，

故 $\Delta=(6-V)^2-4\times1\times(45-3V)\geqslant0$.

从而，$V\geqslant12$ 或 $V\leqslant-12$(舍去).

当 $n=3$ 时，V 的最小值为 12.

由(2)知，$V_3=6V$.

又 $V_3\leqslant72$，$6V\geqslant72$，则 $V_3=6V=72$.

此时，$m=-2,n=3$. 于是，$V=12$.

故 $V_1+V_2+V_3=60V=60\times12=720(\mathrm{cm}^3)$.

因此，所求的容积之和为 720 cm^3.

二、如图 15，过点 P 作 $PD\perp l_2$ 于点 D，联结 OA、OB、OC、OM、ON、OP. 则

$PD=6$，

$OA=OB=OC=1$.

设 $AM=m,AN=n,PC=p,DN=x$，则

$DM=m+n-x$.

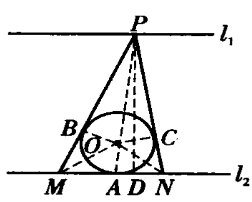

图 15

由题意知，$\odot O$ 是 $\triangle PMN$ 的内切圆，所以，

$BM=AM=m,CN=AN=n,PB=PC=p$；

$OA\perp MN,OB\perp PM,OC\perp PN$.

又 $S_{\triangle PMN}=S_{\triangle OMN}+S_{\triangle ONP}+S_{\triangle OPM}$

$=\frac{1}{2}MN\cdot OA+\frac{1}{2}PN\cdot OC+\frac{1}{2}PM\cdot OB$

$=\frac{1}{2}(MN+PN+PM)=m+n+p$，

$S_{\triangle PMN}=\frac{1}{2}MN\cdot PD=3(m+n)$，

则 $m+n+p=3(m+n)$.

故 $p=2m+2n$. ①

在 Rt$\triangle PDN$ 和 Rt$\triangle PDM$ 中，由勾股定理得

$$\begin{cases}PD^2+DN^2=PN^2,\\ PD^2+MD^2=PM^2,\end{cases}$$

即 $$\begin{cases}6^2+x^2=(p+n)^2, & ②\\ 6^2+(m+n-x)^2=(m+p)^2. & ③\end{cases}$$

②-③得

$(m+n)(2x-m-n)=(n-m)(m+n+2p)$

$=5(n-m)(m+n)$，

即 $x=3n-2m$. ④

把式④代入式②得

$36+(3n-2m)^2=(2m+3n)^2$，

即 $36=24mn$.

从而，$mn=1.5$，即 $AM\cdot AN=1.5$.

因此，$AM\cdot AN$ 为定值，且定值为 1.5.

三、当 $k=0$ 时，原方程化为 $4x+8=0$，解得 $x=-2$. 故当 $k=0$ 时，原方程的解都是整数.

当 $k=2$ 时，原方程化为 $-8x+8=0$，解得 $x=1$. 故当 $k=2$ 时，原方程的解都是整数.

当 $k\neq0$ 或 2 时，原方程化为

$(kx-2)[(k-2)x-4]=0$.

解得 $x_1=\frac{2}{k},x_2=\frac{4}{k-2}$.

由 $x_1=\frac{2}{k}$，得 $k=\frac{2}{x_1}$.

把 $k=\frac{2}{x_1}$ 代入 $x_2=\frac{4}{k-2}$ 中，得

$x_1x_2+2x_1-x_2=0$.

故 $(x_1-1)(x_2+2)=-2=1\times(-2)=2\times(-1)$.

因为 x_1、x_2 为整数，所以，x_1-1、x_2+2 也均为整数. 于是，有

$$\begin{cases}x_1-1=1,\\ x_2+2=-2\end{cases}\text{或}\begin{cases}x_1-1=-2,\\ x_2+2=1\end{cases}$$

$$\text{或}\begin{cases}x_1-1=2,\\ x_2+2=-1\end{cases}\text{或}\begin{cases}x_1-1=-1,\\ x_2+2=2.\end{cases}$$

分别解得

$$\begin{cases}x_1=2,\\ x_2=-4\end{cases}\text{或}\begin{cases}x_1=-1,\\ x_2=-1\end{cases}\text{或}\begin{cases}x_1=3,\\ x_2=-3\end{cases}\text{或}\begin{cases}x_1=0,\\ x_2=0\end{cases}(\text{舍去}).$$

故 $k=1,-2,\frac{2}{3}$.

综上，k 的值为 $-2,0,1,2$ 或 $\frac{2}{3}$.

(谢文晓　湖北省黄冈中学，438000)