

## 高中奥林匹克物理竞赛解题方法

### 近似法

#### 方法简介

近似法是在观察物理现象、进行物理实验、建立物理模型、推导物理规律和求解物理问题时，为了分析认识所研究问题的本质属性，往往突出实际问题的主要方面，忽略某些次要因素，进行近似处理。在求解物理问题时，采用近似处理的手段简化求解过程的方法叫近似法。近似法是研究物理问题的基本思想方法之一，具有广泛的应用。善于对实际问题进行合理的近似处理，是从事创造性研究的重要能力之一。纵观近几年的物理竞赛试题和高考试题，越来越多地注重这种能力的考查。

#### 赛题精讲

**例 1:** 一只狐狸以不变的速度  $v_1$  沿着直线 AB 逃跑，一只猎犬以不变的速率  $v_2$  追击，其运动方向始终对准狐狸。某时刻狐狸在 F 处，猎犬在 D 处， $FD \perp AB$ ，且  $FD=L$ ，如图 14—1 所示，求猎犬的加速度的大小。

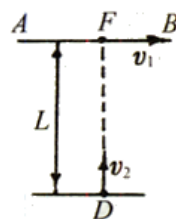


图 14—1

**解析:** 猎犬的运动方向始终对准狐狸且速度大小不变，

故猎犬做匀速率曲线运动，根据向心加速度  $a = \frac{v_2^2}{r}$ ， $r$  为猎

犬所在处的曲率半径，因为  $r$  不断变化，故猎犬的加速度的大小、方向都在不断变化，题目要求猎犬在 D 处的加

速度大小，由于  $v_2$  大小不变，如果求出 D 点的曲率半径，

此时猎犬的加速度大小也就求得了。

猎犬做匀速率曲线运动，其加速度的大小和方向都在不断改变。在所求时刻开始的一段很短的时间  $\Delta t$  内，猎犬运动的轨迹可近似看做是一段圆弧，设其半径为  $R$ ，则加速度

$$a = \frac{v_2^2}{R}$$

其方向与速度方向垂直，如图 14—1—甲所示。在  $\Delta t$  时间内，设狐狸与猎犬分别到达  $F'$  与  $D'$ ，猎犬的速度方向转过的角度为  $\alpha = v_2 \Delta t / R$

而狐狸跑过的距离是： $v_1 \Delta t \approx \alpha L$  因而  $v_2 \Delta t / R \approx v_1 \Delta t / L$ ， $R = L v_2 / v_1$

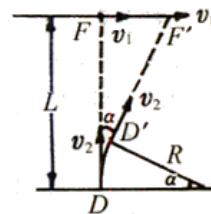


图 14—2—甲

所以猎犬的加速度大小为  $a = \frac{v_2^2}{R} = v_1 v_2 / L$

**例 2** 如图 14—2 所示, 岸高为  $h$ , 人用绳经滑轮拉船靠岸, 若当绳与水平方向为  $\theta$  时, 收绳速率为  $v$ , 则该位置船的速率为多大?

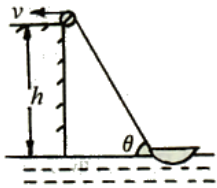


图 14—2

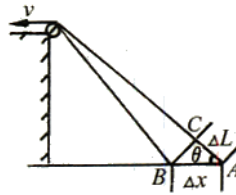


图 14—2—甲

**解析** 要求船在该位置的速率即为瞬时速率, 需从该时刻起取一小段时间求它的平均速率, 当这一小段时间趋于零时, 该平均速率就为所求速率.

设船在  $\theta$  角位置经  $\Delta t$  时间向左行驶  $\Delta x$  距离, 滑轮右侧的绳长缩短  $\Delta L$ , 如图 14—2—甲所示, 当绳与水平方向的角度变化很小时,  $\triangle ABC$  可近似看做是一直角三角形, 因而有  $\Delta L = \Delta x \cos \theta$

两边同除以  $\Delta t$  得:  $\frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \cos \theta$ , 即收绳速率  $v = v_{\text{船}} \cos \theta$

因此船的速率为  $v_{\text{船}} = \frac{v}{\cos \theta}$

**例 3** 如图 14—3 所示, 半径为  $R$ , 质量为  $m$  的圆形绳圈, 以角速率  $\omega$  绕中心轴  $O$  在光滑水平面上匀速转动时, 绳中的张力为多大?

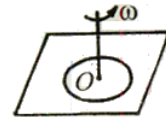


图 14—3

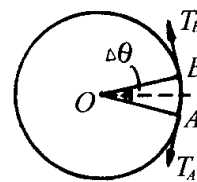
**解析** 取绳上一小段来研究, 当此段弧长对应的圆心角  $\Delta \theta$  很小时, 有近似关系式  $\Delta \theta \approx \sin \Delta \theta$ .

若取绳圈上很短的一小段绳  $AB = \Delta L$  为研究对象, 设这段绳所对应的圆心角为  $\Delta \theta$ , 这段绳两端所受的张力分别为  $T_A$  和  $T_B$  (方向见图 14—3—甲), 因为绳圈匀速转动, 无切向加速度, 所以  $T_A$  和  $T_B$  的大小相等, 均等于  $T$ .  $T_A$  和  $T_B$  在半径方向上的合力提供这一段绳做匀速圆周运动的向心力, 设这段绳子的质量为  $\Delta m$ , 根据牛顿第二定律有:  $2T \sin \frac{\Delta \theta}{2} = \Delta m \omega^2 R$ ;

因为  $\Delta L$  段很短, 它所对应的圆心角  $\Delta \theta$  很小所以  $\sin \frac{\Delta \theta}{2} = \frac{\Delta \theta}{2}$

将此近似关系和  $\Delta m = R \cdot \Delta \theta \cdot \frac{m}{2\pi R} = \frac{m \Delta \theta}{2\pi}$

代入上式得绳中的张力为  $T = \frac{m \omega^2 R}{2\pi}$



图—14—3—甲

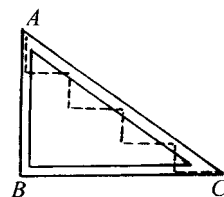


图 14—4

**例 4** 在某铅垂面上有一固定的光滑直角三角形细管轨道 ABC，光滑小球从顶点 A 处沿斜边轨道自静止出发自由地滑到端点 C 处所需时间，恰好等于小球从顶点 A 处自静止出发自由地经两直角边轨道滑到端点 C 处所需的时间.这里假设铅垂轨道 AB 与水平轨道 BC 的交接处 B 有极小的圆弧，可确保小球无碰撞的拐弯，且拐弯时间可忽略不计.

在此直角三角形范围内可构建一系列如图 14—4 中虚线所示的光滑轨道，每一轨道是由若干铅垂线轨道与水平轨道交接而成，交接处都有极小圆弧（作用同上），轨道均从 A 点出发到 C 点终止，且不超出该直角三角形的边界，试求小球在各条轨道中，由静止出发自由地从 A 点滑行到 C 点所经时间的上限与下限之比值.

**解析** 直角三角形 AB、BC、CA 三边的长分别记为

$l_1$ 、 $l_2$ 、 $l_3$ ，如图 14—4—甲所示，小球从 A 到 B 的时间

记为  $T_1$ ，再从 B 到 C 的时间为  $T_2$ ，而从 A 直接沿斜边到 C

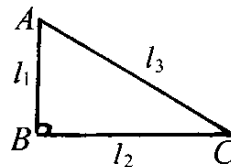


图 14—4—甲

所经历的时间记为  $T_3$ ，由题意知  $T_1 + T_2 = T_3$ ，可得  $l_1 : l_2 : l_3 = 3 : 4 : 5$ ，

由此能得  $T_1$  与  $T_2$  的关系.

$$\text{因为 } l_1 = \frac{1}{2} g T_1^2 \quad l_1 = g T_1 T_2$$

$$\text{所以 } \frac{l_1}{l_2} = \frac{T_1}{2T_2}$$

$$\text{因为 } l_1 : l_2 = 3 : 4, \text{ 所以 } T_2 = \frac{2}{3} T_1$$

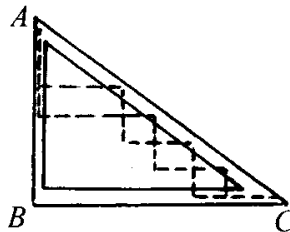


图 14—4—乙

小球在图 14—4—乙中每一虚线所示的轨道中，经各垂直线段所需时间之和为  $t_1 = T_1$ ，

经各水平段所需时间之和记为  $t_2$ ，则从 A 到 C 所经时间总和为  $t = T_1 + t_2$ ，最短的  $t_2$  对应  $t$  的

下限  $t_{\min}$ ，最长的  $t_2$  对应  $t$  的上限  $t_{\max}$ 。

小球在各水平段内的运动分别为匀速运动，同一水平段路程放在低处运动速度大，所需时间短，因此，所有水平段均处在最低位置（即与 BC 重合）时  $t_2$  最短，其值即为  $T_2$ ，故

$$t_{\min} = T_1 + T_2 = \frac{5}{3} T_1.$$

$t_2$  的上限显然对应各水平段处在各自可达到的最高位置，实现它的方案是垂直段每下降

小量  $\Delta l_1$ ，便接一段水平小量  $\Delta l_2$ ，这两个小量之间恒有  $\Delta l_2 = \Delta l_1 \cot \alpha$ ，角  $\alpha$  即为  $\angle ACB$ ，水平段到达斜边边界后，再下降一小量并接一相应的水平量，如此继续下去，构成如图所示的微齿形轨道，由于  $\Delta l_1$ 、 $\Delta l_2$  均为小量，小球在其中的运动可处理为匀速率运动，分别所经的时间小量  $\Delta t_1(i)$  与  $\Delta t_2(i)$  之间有如下关联：

$$\frac{\Delta t_2(i)}{\Delta t_1(i)} = \frac{\Delta l_2}{\Delta l_1} = \cot \alpha$$

于是作为  $\Delta t_2(i)$  之和的  $t_2$  上限与作为  $\Delta t_1(i)$  之和的  $T_1$  之比也为  $\cot \alpha$ 。故  $t_2$  的上限必为  $T_1 \cot \alpha$ ，即得： $t_{\max} = T_1 + T_1 \cot \alpha = \frac{7}{3} T_1$ 。

这样  $t_{\max} : t_{\min} = 7:5$

**例 5** 在光滑的水平面上有两个质量可忽略的相同弹簧，它们的一对端点共同连接着一个光滑的小物体，另外一对端点 A、B 固定在水平面上，并恰使两弹簧均处于自由长度状态且在同一直线上，如图 14—5 所示。如果小物体在此平面上沿着垂直于 A、B 连线的方向稍稍偏离初始位置，试分析判断它是否将做简谐运动？



图 14—5

**解析** 因为一个物体是否做简谐运动就是要看它所受的回复力是否是一个线性力，即回复力的大小与位移大小成正比，方向相反。因此分析判断该题中的小物体是否做简谐运动，关键是求出所受的回复力的表达式（即此题中所受合外力的表达式）。

以 AB 中点为原点，过中点且垂直于 AB 的直线为 x 轴，如图 14—5—甲所示，取 x 轴正方向为正向，小物体所受回复力为： $F_x = -2k(l - l_0) \sin \theta$  ①

其中  $k$  为弹簧的劲度系数， $l_0$  为弹簧的自由长度， $l$  为弹簧伸长后的长度， $\theta$  为弹簧伸长后与 AB 直线的夹角。由几何知识可得

$$\sin \theta = \frac{x}{l} \quad ②$$

$$l = \sqrt{l_0^2 + x^2} \quad ③$$

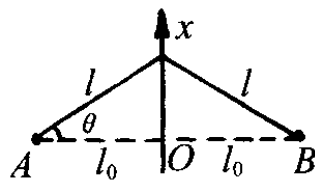


图 14—5—甲

将②、③代入①式得：

$$F_x = -2k \left[ 1 - \left( \frac{l_0}{l_0^2 + x^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] x = -2k \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{l_0^2} \right) \right] x = -\frac{kx^3}{l_0^2}$$

由此可见，小物体受的合外力是一个非线性回复力，因此小物体将不做简谐运动。同时本

题表明，平衡位置附近的小振动未必都是简谐运动。

**例 6** 三根长度均为  $2m$ ，质量均匀的直杆，构成一正三角形框架  $ABC$ ， $C$  点悬挂在一光滑水平转轴上，整个框架可绕转轴转动。杆  $AB$  是一导轨，一电动玩具松鼠可在导轨上运动，如图 14—6 所示，现观察到松鼠正在导轨上运动，而框架却静止不动，试论证松鼠的运动是一种什么样的运动。

**解析** 松鼠在  $AB$  轨道运动，当框架不动时，松鼠受到轨道给它的水平力  $F'$  作用，框架也受到松鼠给它的水平力  $F$  作用，设在某一时刻，松鼠离杆  $AB$  的中点  $O$  的距离为  $x$ ，如图 14—6 所示，松鼠在竖直方向对导轨的作用力等于松鼠受到的重力  $mg$ ， $m$  为松鼠的质量。以  $C$  点为轴，要使框架平衡，必须满足

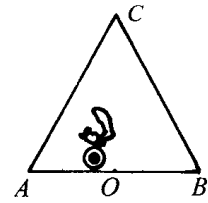


图 14-6

条件  $mgx = FL \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} FL$ ，松鼠对  $AB$  杆的水平力为

$F = 2mgx/(\sqrt{3}L)$ ，式中  $L$  为杆的长度。所以对松鼠而言，在其运动过程中，沿竖直方向受到的合力为零，在水平方向受到杆  $AB$  的作用力为  $F'$ ，由牛顿第三定律可知  $F' = F$ ，即  $F' = -2mgx/(\sqrt{3}L) = kx$

$$\text{其中 } k = -\frac{2m}{\sqrt{3}L}$$

即松鼠在水平方向受到的作用力  $F'$  作用下的运动应是以  $O$  点为平衡位置的简谐运动，

其振动的周期为  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{3}L}{2g}} = 2.64s$ 。

当松鼠运动到杆  $AB$  的两端时，它应反向运动，按简谐运动规律，速度必须为零，所以松鼠做简谐运动的振幅小于或等于  $L/2=1m$ 。

由以上论证可知，当框架保持静止时，松鼠在导轨  $AB$  上的运动是以  $AB$  的中点  $O$  为平衡位置，振幅不大于  $1m$ 、周期为  $2.64s$  的简谐运动。

**例 7** 在一个横截面面积为  $S$  的密闭容器中，有一个质量为  $m$  的活塞把容器中的气体分成两部分。活塞可在容器中无摩擦地滑动，活塞两边气体的温度相同，压强都是  $p$ ，体积分别是  $V_1$  和  $V_2$ ，如图 14—7 所示。现用某种方法使活塞稍微偏离平衡位置，然后放开，活塞将在两边气体压力的作用下来回运动。容器保持静止，整个系统可看做是恒温的。

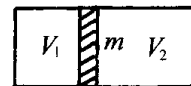


图 14-7

(1) 求活塞运动的周期，将结果用  $p$ 、 $V_1$ 、 $V_2$ 、 $m$  和  $S$  表示；

(2) 求气体温度  $t = 0^\circ\text{C}$  时的周期  $\tau$  与气体温度  $t' = 30^\circ\text{C}$  时的周期  $\tau'$  之比值。

**解析** (1) 活塞处于平衡时的位置  $O$  为坐标原点  $x = 0$ 。当活塞运动到右边距  $O$  点  $x$  处时，左边气体的体积由  $V_1$  变为  $V_1 + Sx$ ，右边气体的体积由  $V_2$  变为  $V_2 - Sx$ ，设此时两边气

体的压强分别为  $p_1$  和  $p_2$ ，因系统的温度恒定不变，根据玻意耳定律有：

$$p_1(V_1 + Sx) = pV_1 \quad p_2(V_2 - Sx) = pV_2$$

$$\text{而以上两式解出： } p_1 = \frac{pV_1}{V_1(1 + \frac{Sx}{V_1})}, p_2 = \frac{pV_2}{2V_2(1 + \frac{Sx}{V_2})} \quad \text{①}$$

按题意，活塞只稍许离开平衡位置，故上式可近似为： $p_1 \approx p(1 - \frac{S}{V_1}x)$ ,

$p_2 \approx p(1 + \frac{S}{V_2}x)$ ，于是活塞受的合力为  $(p_1 - p_2)S = -pS^2(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2})x$ 。所以活塞的运动方

$$\text{程是 } ma = -pS^2(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2})x = -pS^2 \frac{V_1 + V_2}{V_1 V_2} x$$

其中  $a$  是加速度，由此说明活塞做简谐运动，周期为  $\tau = 2\pi \sqrt{\frac{mV_1 V_2}{pS^2(V_1 + V_2)}}$

(2) 设温度为  $t$  时，周期为  $\tau$ ，温度为  $t'$  时，周期为  $\tau'$ 。由于  $\frac{p}{T} = \frac{p'}{T'}$ ，得出

$$\tau' = 2\pi \sqrt{\frac{mV_1 V_2}{p'S^2(V_1 + V_2)}} = 2\pi \sqrt{\frac{mV_1 V_2}{pS^2(V_1 + V_2) \cdot \frac{T}{T'}}} = \tau \sqrt{\frac{T}{T'}}$$

所以  $\frac{\tau'}{\tau} = \sqrt{\frac{T}{T'}}$ ，将数值代入得  $\tau' : \tau = 0.95$

**例 8** 如图 14—8 所示，在边长为  $a$  的正三角形三个顶点 A、B、C 处分别固定电量为  $Q$  的正点电荷，在其中三条中线的交点 O 上放置一个质量为  $m$ ，电量为  $q$  的带正电质点，O 点显然为带电质点的平衡位置，设该质点沿某一中线稍稍偏离平衡位置，试证明它将做简谐运动，并求其振动周期。

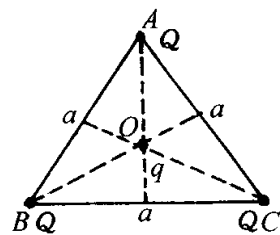


图 14—8

**解析** 要想证明带电质点是否做简谐运动，则需证明该带电质点沿某一中线稍稍偏离平衡位置时，所受的回复力是否与其的位移大小成正比，方向相反。因此该题的关键是求出它所受回复力的表达式，在此题也就是合外力的表达式。

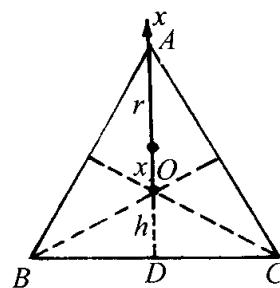


图 14—8—甲

以 O 为坐标原点，以 AOD 中线为坐标  $x$  轴，如图 14—8—甲所示，设带电质点在该轴上偏移  $x$ ，A 处 Q 对其作用力为  $F_1$ ，B、C 处两个 Q 对其作用的合力为  $F_2$ ，取  $x$  轴方向为正方向。有

$$F_1 = -\frac{kQq}{(r-x)^2} = -\frac{kQq}{r^2} \left(1 - \frac{x}{r}\right)^{-2}$$

$$\text{因为 } r = OA = OB = OC = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

$$\left(1 - \frac{x}{r}\right)^{-2} = 1 + \frac{2x}{r} + \dots \text{ 当 } x \text{ 很小时可忽略高次项所以 } F_1 = -3k \frac{Qq}{a^2} \left(1 + \frac{6x}{\sqrt{3}a}\right)$$

$$F_2 = 2 \left( \frac{kQq}{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (h+x)^2} \cdot \frac{h+x}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (h+x)^2}} \right)$$

$$= 2kQq(h+x) \left[ \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (h+x)^2 \right]^{-\frac{3}{2}}$$

$$= 2kQq(h+x) \left( \frac{a^2}{4} + h^2 + 2hx \right)^{-\frac{3}{2}} \quad (\text{略去 } x^2 \text{ 项})$$

$$= 2kQq(h+x) \left( \frac{a^2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}ax \right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= 2kQq(h+x) \left( \frac{a^2}{3} \right)^{-\frac{3}{2}} \left( 1 + \frac{\sqrt{3}}{a}x \right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= 6\sqrt{3}kQq \frac{h+x}{a^3} \left( 1 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{x}{a} \right)$$

$$= 6\sqrt{3}k \frac{Qq}{a^3} \left( h - \frac{3\sqrt{3}}{2a}hx + x \right) \quad (\text{略去 } x^2 \text{ 项})$$

$$= 6\sqrt{3}k \frac{Qq}{a^3} h \left( 1 - \frac{3\sqrt{3}}{2a}x + \frac{x}{h} \right)$$

$$= 3k \frac{Qq}{a^3} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2a} x\right)$$

因此带电质点所受合力为  $F_x = F_1 + F_2 = -3k \frac{Q}{a^2} q \left(\frac{6x}{\sqrt{3}a} - \frac{\sqrt{3}}{2a} x\right) = -\frac{9\sqrt{3}}{2} k \frac{Q}{a^3} qx$

由此可知，合外力  $F_x$  与  $x$  大小成正比，方向相反。

即该带电质点将做简谐运动，其振动周期为  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2\pi a}{3} \sqrt{\frac{2am}{3kQq}}$

**例 9** 欲测电阻  $R$  的阻值，现有几个标准电阻、一个电池和一个未经标定的电流计，连成如图 14—9 所示的电路。第一次与电流计并联的电阻  $r$  为  $50.00 \Omega$ ，电流计的示度为 3.9 格；第二次  $r$  为  $100.00 \Omega$ ，电流计的示度为 5.2 格；第三次  $r$  为  $10.00 \Omega$ ，同时将待测电阻  $R$  换成一个  $20.00k \Omega$  的标准电阻，结果电流计的示度为 7.8 格。已知电流计的示度与所通过的电流成正比，求电阻  $R$  的阻值。

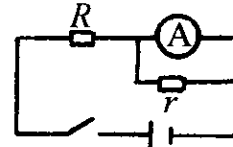


图 14—9

**解析** 在测试中，除待求量  $R$  外，电源电动势  $E$ ，电源内阻  $r$ ，电流计内阻  $R_g$  以及电流计每偏转一格的电流  $I_0$ ，均属未知。本题数据不足，且电流计读数只有两位有效数字，故本题需要用近似方法求解。

设电源电动势为  $E$ ，电流计内阻为  $R_g$ ，电流计每偏转一格的电流为  $I_0$ ，用欧姆定律对三次测量的结果列式如下：

$$\frac{E}{\frac{50R_g}{50 + R_g} + R + r} \cdot \frac{50R_g}{50 + R_g} \cdot \frac{1}{R_g} = 3.9I_0$$

$$\frac{E}{\frac{100R_g}{100 + R_g} + R + r} \cdot \frac{100R_g}{100 + R_g} \cdot \frac{1}{R_g} = 5.2I_0$$

$$\frac{E}{\frac{10R_g}{10 + R_g} + 20000 + r} \cdot \frac{10R_g}{10 + R_g} \cdot \frac{1}{R_g} = 7.8I_0$$

从第三次测量数据可知，当用  $20k \Omega$  电阻取代  $R$ ，而且  $r$  阻值减小时电流计偏转格数明显增大，可推知  $R$  的阻值明显大于  $20k \Omega$ ，因此电源内阻完全可以忽略不计，与  $R$  相比，电



流计内阻  $R_g$  与  $r$  的并联值对干路电流的影响同样也可以忽略不计，故以上三式可近似为：

$$\frac{E}{R} \cdot \frac{50}{50 + R_g} = 3.9I_0 \quad \text{①}$$

$$\frac{E}{R} \cdot \frac{100}{100 + R_g} = 5.2I_0 \quad \text{②}$$

$$\frac{E}{20000} \cdot \frac{10}{10 + R_g} = 7.8I_0 \quad \text{③}$$

待测电阻  $R=120\text{k}\Omega$

解①、②、③三式，可得  $R_g=50\Omega$

**例 10** 如图 14—10 所示，两个带正电的点电荷 A、B 带电量均为  $Q$ ，固定放在  $x$  轴上的两处，离原点都等于  $r$ 。若在原点  $O$  放另一正点电荷  $P$ ，其带电量为  $q$ ，质量为  $m$ ，限制  $P$  在哪些方向上运动时，它在原点  $O$  才是稳定的？

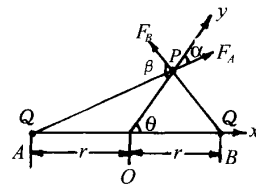


图 14—10

**解析** 设  $y$  轴与  $x$  轴的夹角为  $\theta$ ，正点电荷  $P$  在原点沿  $y$  轴方向有微小的位移  $s$  时，

A、B 两处的点电荷对  $P$  的库仑力分别为  $F_A$ 、 $F_B$ ，方向如图 14—10 所示， $P$  所受的库仑力

在  $y$  轴上的分量为  $F_y = F_A \cos \alpha - F_B \cos \beta \quad \text{①}$

根据库仑定律和余弦定理得  $F_A = \frac{kqQ}{r^2 + s^2 + 2rs \cos \theta} \quad \text{②}$

$$F_B = \frac{kqQ}{r^2 - s^2 + 2rs \cos \theta} \quad \text{③}$$

$$\cos \alpha = \frac{r \cos \theta + s}{\sqrt{r^2 + s^2 + 2rs \cos \theta}} \quad \text{④}$$

$$\cos \beta = \frac{r \cos \theta - s}{\sqrt{r^2 + s^2 - 2rs \cos \theta}} \quad \text{⑤}$$

将②、③、④、⑤式代入①得：

$$F_y = \frac{kqQ(r \cos \theta + s)}{(r^2 + s^2 + 2rs \cos \theta)^{3/2}} - \frac{kqQ(r \cos \theta - s)}{(r^2 + s^2 - 2rs \cos \theta)^{3/2}}$$

因为  $s$  很小, 忽略  $s^2$  得:

$$F_y = \frac{kqQ}{r^3} \left[ \frac{r \cos \theta + s}{\left(1 + \frac{2s}{r} \cos \theta\right)^{3/2}} - \frac{r \cos \theta - s}{\left(1 - \frac{2s}{r} \cos \theta\right)^{3/2}} \right]$$

又因为  $s \leq r, \frac{2s}{r} \cos \theta < 1$

所以利用近似计算  $(1 \pm x)^{-\frac{3}{2}} \approx 1 \mp \frac{3}{2}x$  得

$$F_y \approx \frac{kqQ}{r^3} \left[ (r \cos \theta + s) \left(1 + \frac{3s}{r} \cos \theta\right) - (r \cos \theta - s) \left(1 + \frac{3s}{r} \cos \theta\right) \right]$$

忽略  $s^2$  得  $F_y = -\frac{kqQs}{r^3} (3 \cos^2 \theta - 1)$

当  $(3 \cos^2 \theta - 1) > 0$  时  $F_y$  具有恢复线性形式, 所以在  $\cos^2 \theta > \frac{1}{3}$  范围内, P 可围绕原点做微小振动, 所以 P 在原点处是稳定的。

**例 11** 某水池的实际深度为  $h$ , 垂直于水面往下看, 水池底的视深为多少? (设水的折射率为  $n$ )

解析 如图 14-11 所示, 设 S 为水池底的点光源, 在由 S 点发出的光线中选取一条垂直于面 MN 的光线, 由 O 点垂直射出, 由于观察者在 S 正方, 所以另一条光线与光线 SO 成极小的角度从点 S 射向水面点 A, 由点 A 远离法线折射到空气中, 因入射角极小, 故折射角也很小, 进入人眼的两条折射光线的反向延长线交于点 S', 该点即为我们看到水池底光源 S 的像, 像点 S' 到水面的距离  $h'$ , 即为视深。

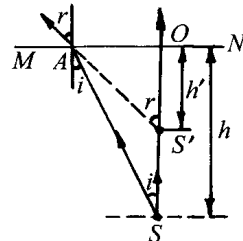


图 14-11

由几何关系有  $\tan r = \overline{AB}/h', \tan i = \overline{AO}/h$ , 所以  $\tan r / \tan i = h/h'$ , 因为  $r, i$  均很小, 则有  $\tan r \approx \sin r, \tan i \approx \sin i$ , 所以  $\sin r / \sin i \approx h/h'$  又因  $n = \frac{\sin r}{\sin i}$  所以视深  $h' = h/n$

### 针对训练

1. 活塞把密闭气缸分成左、右两个气室, 每室各与 U 形管压强计的一臂相连, 压强计的两臂截面处处相同. U 形管内盛有密度

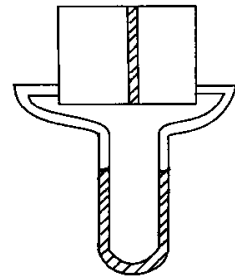


图 14-12

为  $\rho = 7.5 \times 10^2 \text{kg/m}^3$  的液体.开始时左、右两气室的体积都为  $V_0 = 1.2 \times 10^{-2} \text{m}^3$ , 气压都为  $p_0 = 4.0 \times 10^3 \text{Pa}$ , 且液体的液面处在同一高度, 如图 14—12 所示.现缓缓向左推动活塞, 直到液体在 U 形管中的高度差  $h = 40 \text{cm}$ .求此时左、右气室的体积  $V_1$ 、 $V_2$ .假定两气室的温度保持不变.计算时可以不计 U 形管和连接管道中气体的体积.取  $g = 10 \text{m/s}^2$ .

2. 一汽缸的初始体积为  $V_0$ , 其中盛有  $2 \text{mol}$  的空气和少量的水 (水的体积可忽略), 其平衡时气体的总压强是  $3.0$  大气压.经过等温膨胀使其体积加倍, 在膨胀过程结束时, 其中的水刚好全部消失, 此时的总压强为  $2.0$  大气压.若让其继续作等温膨胀, 使其体积再次加倍, 试计算此时:

- (1) 汽缸中气体的温度;
- (2) 汽缸中水蒸气的摩尔数;
- (3) 汽缸中气体的总压强. (假定空气和水蒸气均可当做理想气体处理)

3. 1964 年制成了世界上第一盏用海浪发电的航标灯, 它的气室示意图如图 14—13 所示.利用海浪上下起伏力量, 空气能被吸进来, 压缩后再推入工作室, 推动涡轮机带动发电机发电.当海水下降时, 阀门  $S_1$  关闭,  $S_2$  打开, 设每次吸入压强为  $1.0 \times 10^6 \text{Pa}$ 、温度为  $7^\circ \text{C}$  的空气  $0.233 \text{m}^3$  (空气可视为理想气体), 当海上升时,  $S_2$  关闭, 海水推动活塞

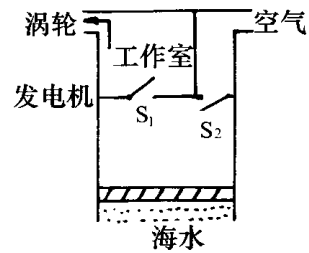


图 14—13

绝热压缩空气, 空气压强达到  $\sqrt{32} \times 10^5 \text{Pa}$  时, 阀门  $S_1$  才

打开. $S_1$  打开后, 活塞继续推动空气, 直到气体全部推入工

作室为止, 同时工作室的空气推动涡轮机工作.设打开  $S_1$  后, 活塞附近的压强近似保持不变, 活塞的质量及活塞筒壁间的摩擦忽略不计.问海水每次上升时所做的功是多少? 已知空气从压强为  $p_1$ 、体积为  $V_1$  的状态绝热的改变到压强为  $p_2$ 、体积为  $V_2$  的状态过程中, 近似遵循关系式  $p_1/p_2 = (V_2/V_1)^{5/3}$ ,  $1 \text{mol}$  理想气体温度升高  $1 \text{K}$  时, 内能改变为  $3R/2$ . [ $R = 8.31 \text{J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ ]

4. 如图 14—14 所示, 在  $Ox$  轴的坐标原点  $O$  处, 有一固定的电量为  $Q (Q > 0)$  的点电荷, 在  $x = -L$  处, 有一固定的、电量为  $-2Q$  的点电荷, 今有一正试探电荷  $q$  放在  $x$  轴上  $x > 0$  的位置, 并设斥力为正, 引力为负.

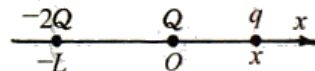


图 14—14

- (1) 当  $q$  的位置限制在  $Ox$  轴上变化时, 求  $q$  的受力平衡的位置, 并讨论平衡的稳定性;
  - (2) 试定性地画出试探电荷  $q$  所受的合力  $F$  与  $q$  在  $Ox$  轴上的位置  $x$  的关系图线.
5. 如图 14—15 所示, 一人站在水面平静的湖岸边, 观察到离岸边有一段距离的水下的一条鱼, 此人看到鱼的位置与鱼在水下的真实位置相比较, 应处于什么方位.

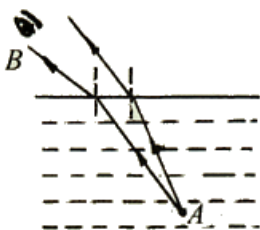


图 14—15

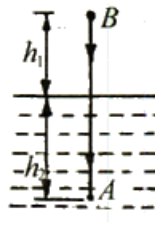


图 14—16

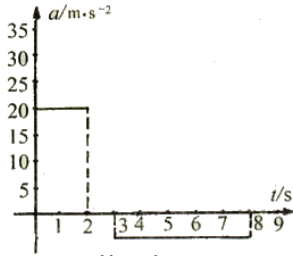
6. 如图 14—16 所示, 天空中有一小鸟 B, 距水面高  $h_1 = 3m$ , 其正下方距水面深  $h_2 = 4m$  处的水中有一条小鱼 A. 已知水的折射率为  $4/3$ , 则小鸟看水中的鱼距离自己是多远? 小鱼看到鸟距离自己又是多远?

## 参考答案

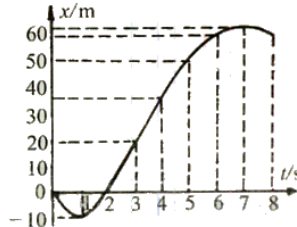
### 十一、图象法

1. A 2. A、D 3. C

4.



第4题 (b)



第4题 (c)

5.  $t_1 > t_2$  6. 乙图中小球先到底端 7.  $v_B = \sqrt{2a \frac{s}{n} (n + \frac{n-1}{2})} = \sqrt{as(3 - \frac{1}{n})}$  8. 13.64s

9. 2:1 10. D 11.  $t = \sqrt{\frac{2sFG}{g(F-f)f}}$   $v_m = \sqrt{\frac{2gfs(F-f)}{FG}}$

### 十二、类比法

1.  $2\sqrt{3}LR^2/3Gt^2$  2.  $\frac{kQ^2 aR}{(a^2 - R^2)^2}$  3.  $\frac{kQ(\frac{R}{a}Q + q)}{a^2} - \frac{kQ^2 aR}{(a^2 - R^2)^2}$

4.  $C_{AB} = 2.9\mu F$  5.  $C_{AB} = 6\mu F$

6. (1)  $C' = \frac{\sqrt{5}-1}{2}C$  (2)  $C_{\text{总}} = C'$  (3)  $C' = \frac{\sqrt{5}-1}{2}C$

7.  $N = \frac{\Delta L^2(H+t)}{\lambda[H(t-f)-tf]}$  (注: 将“两块半透镜移开一小段距离”后加“ $\Delta L$ ”在“ $t > f$

处放置一个”与“单色点光源”之间加“波长为 $\lambda$ 的”.)

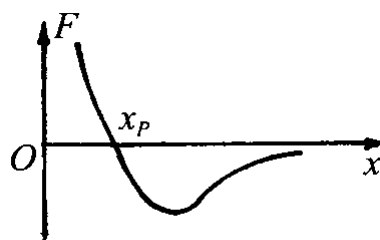
8. (1)  $a = 0.5 \times 10^{-3}m$  (2)  $d = 4m$

### 十三、降维法

1.  $0.288 \times 10^3 \text{N} \leq F \leq 0.577 \times 10^3 \text{N}$     2. (1) 7.2N    (2)  $0.8 \text{m/s}^2$   
 3. 5N 沿斜面指向右上方水平方向的夹角为  $53^\circ$   
 4.  $R_{AB} = \frac{R}{2}$     5.  $R_{AB} = \frac{4}{9}R$     6. (1)  $R_{AG} = \frac{5}{6}r$     (2)  $R_{AD} = \frac{7}{12}r$

十四、近似法

1.  $V_1 = 0.8 \times 10^{-2} \text{m}^3$ ,  $V_2 = 1.6 \times 10^{-2} \text{m}^3$     2. (1) 373K    (2) 2mol    (3) 1.0 大气压  
 3.  $8.15 \times 10^4 \text{J}$     4. (1) 平衡是稳定的    (2)  
 5. 应在鱼的右上方  
 6. 6m, 8m



第 4 题(2)