1992 年加拿大數學競賽試題

王子俠譯

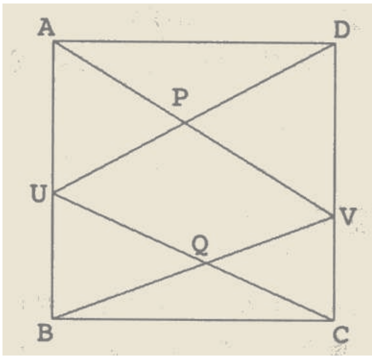
1. 試證 $1 \times 2 \times \ldots \times n$ 能被 $1 + 2 + \ldots + n$ 整除之充分且必要條件爲: $n+1$ 不爲奇質數。

2. 設 x, y, z 爲非負實數。試證不等式

$$x(x-z)^2 + y(y-z)^2 \geq (x-z)(y-z)(x+y-z)$$

並決定出等號成立的情形。

3. 在附圖中,$ABCD$ 爲一正方形。U及V 分別表在邊 AB 及 CD 上之任意內點。試決定出所有 U 及 V 的位置, 使得四邊形 $PUQV$ 之面積爲最大。



4. 試解方程式 $x^2 + \dfrac{x^2}{(x+1)^2} = 3$。

5. 假定一副牌由一張百搭 (Joker) 及其他 $2n$ 張牌組成, 而對 $1, 2, \ldots, n$ 中之每一個數 k 均有兩張牌的號碼是 k。今欲將此 $2n+1$ 張牌排成一列, 滿足下述條件: 百搭在當中, 而對任意整數 k $(1 \leq k \leq n)$, 在兩張號碼爲 k 的牌中間恰好有 $k-1$ 張牌。

(a) 試求出所有使這種排列可能之 n $(n \leq 10)$ 之值。

(b) 對那些 n 之值所求之排列爲不可能?

—本文譯者任教於加拿大滑鐵盧之 Wilfrid Laurier 大學並爲加拿大數學競賽委員會之會員—