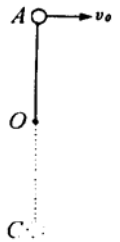


物理奥林匹克竞赛训练(1)

1、长为  $L$  的细绳一端固定于  $O$  点，如图所示，另一端拴一质量为  $m$  的小球，把线拉至最高点  $A$  以水平抛出，求当  $v_0$  为下列值时，小球运动到最低点  $C$  时线中的



张力大小。(1)  $v_0 = 2\sqrt{gL}$  (2)  $v_0 = \sqrt{\frac{gL}{2}}$

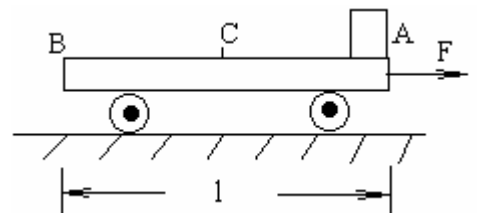
2、如图所示，平板车的质量为  $2m$ ，长为  $l$ ，车右端 ( $A$  点) 有一块质量为  $m$  的小金属块，都静止在水平地面上。金属块与车间有摩擦，并且在  $AC$  段与  $CB$  段摩擦因数不同，而车与地面间摩擦可忽略。现给车施加一个向右的水平恒力，使车向右边运动，并且金属块在车上开始滑动，当金属块滑到车的中点  $C$  时，

即撤去这个力。已知撤去力的瞬间，金属块的速度为  $v_0$ ，车的速度为  $2v_0$ ，并且最后金属块恰停在车的左端 ( $B$  点) 与车共同运动。

(1) 最后车与金属块的共同运动速度多大？

(2) 如果金属块与车在  $AC$  段的摩擦因数为  $\mu_1$ ，在  $CB$  段的摩擦系数为  $\mu_2$ ，

求  $\mu_1$  与  $\mu_2$  的比值。



3、2002 年 12 月 30 日凌晨，“神舟四号”飞船发射升空，飞船按预定轨道在太空飞行六天零十八小时（用  $t$  表示），环绕地球一百零八圈（用  $n$  表示），返回舱于 2003 年 1 月 5 日顺利返回地面。“神舟四号”运行过程中由于大气摩擦等因素，会逐渐偏离预定的轨道，因此“神舟四号”先后进行了三次精确的“轨道维持”（通过发动机向后喷气，利用反冲校准轨道）。设总质量为  $m$  的“神舟四号”飞船的预定圆形轨道高度为  $h$ ，当实际运行高度比预定轨道高度衰减了  $\Delta h$  时，控制中心开始启动轨道维持程序，开始小动量发动机，经时间  $\Delta t$  后，飞船恰好重新进入预定轨道平稳飞行。地球半径为  $R$ ，地球表面重力加速度为  $g$ 。

(1) 求“神舟四号”轨道离地面高度  $h$  的表达式（用题中所给的数据表示）；

(2) 已知质量为  $m$  的物体在地球附近的万有引力势能  $E_p = -\frac{R^2 mg}{r}$ （以无穷远处引力

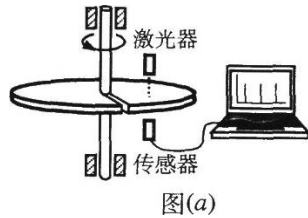
势能为零， $r$  表示物体到地心的距离），忽略在轨道维持过程中空气阻力对飞船的影

响。求在轨道维持过程中，小动量发动机的平均功率  $P$  的表达式（轨道离地面高度  $h$  不用代入（1）问中求得的结果）。

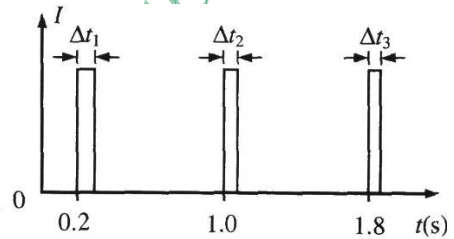
4. 一水平放置的圆盘绕竖直固定轴转动，在圆盘上沿半径开有一条宽度为  $2\text{mm}$  的均匀狭缝。将激光器与传感器上下对准，使二者间连线与转轴平行，分别置于圆盘的上下两侧，且可以同步地沿圆盘半径方向匀速移动，激光器连续向下发射激光束。在圆盘转动过程中，当狭缝经过激光器与传感器之间时，传感器接收到一个激光信号，并将其输入计算机，经处理后画出相应图线。图(a)为该装置示意图，图(b)为所接收的光信号随时间变化的图线，横坐标表示时间，纵坐标表示接收到的激光信号强度，图中  $\Delta t_1 = 1.0 \times 10^{-3} \text{s}$ ， $\Delta t_2 = 0.8 \times 10^{-3} \text{s}$ 。

- (1) 利用图(b)中的数据求  $1\text{s}$  时圆盘转动的角速度；
- (2) 说明激光器和传感器沿半径移动的方向；
- (3) 求图(b)中

第三个激光信号  
的宽度  $\Delta t_3$ 。



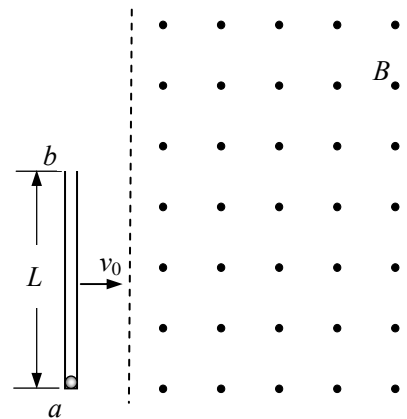
图(a)



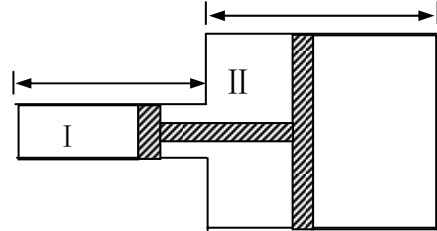
图(b)

5. 如图所示，一长为  $L$  的薄壁玻璃管放置在水平面上，在玻璃管的  $a$  端放置一个直径比玻璃管直径略小的小球，小球带电荷量为  $-q$ 、质量为  $m$ 。玻璃管右边的空间存在方向竖直向上、磁感应强度为  $B$  的匀强磁场。磁场的左边界与玻璃管平行，右边界足够远。玻璃管带着小球以水平速度  $v_0$  垂直于左边界向右运动，由于水平外力的作用，玻璃管进入磁场后速度保持不变，经一段时间后小球从玻璃管  $b$  端滑出并能在水平面内自由运动，最后从左边界飞离磁场。设运动过程中小球的电荷量保持不变，不计一切阻力。求：

- (1) 小球从玻璃管  $b$  端滑出时速度的大小；
- (2) 从玻璃管进入磁场至小球从  $b$  端滑出的过程中，外力  $F$  随时间  $t$  变化的关系；
- (3) 小球飞离磁场时速度的方向。

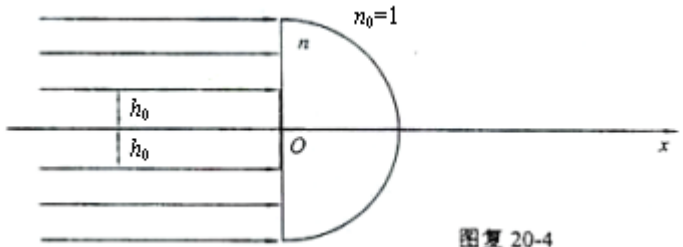


6、横截面积为  $S$  和  $\alpha S (\alpha > 1)$ , 长度相同的两圆柱形“对接”的容器内盛有理想气体, 每个圆筒中间位置有一个用硬杆想连的活塞, 如图所示。这时舱 I 内气体压强为  $P_1$ , 舱 III 内气体压强为  $\beta p_1$ , 活塞处于平衡, 整个系统吸收热量  $Q$ , 温度上升, 使各舱温度相同。试求舱 I 内压强的变化。 $1\text{mol}$  气体内能为  $CT(C$  是气体摩尔热容量), 圆筒和活塞的热容量很小, 摩擦不计。



7. 如图所示, 一半径为  $R$ 、折射率为  $n$  的玻璃半球,

放在空气中, 平表面中央半径为  $h_0$  的区域被涂黑. 一平行光束垂直入射到此平面上, 正好覆盖整个表面.  $Ox$  为以球心  $O$  为原点, 与平而垂直的坐标轴. 通过计算, 求出坐标轴  $Ox$  上玻璃半球右边有光线通过的各点 (有光线段) 和无光线通过的各点 (无光线段) 的分界点的坐标.



图复 20-4

参考答案:

1. 解: (1) 由于  $v_0 = 2\sqrt{gL}$  大于作圆周运动最高点的最小速度  $\sqrt{gL}$ , 故小球做圆周运动。

由机械能守恒得:  $\frac{1}{2}mv_0^2 + 2mgL = \frac{1}{2}mv^2$  又  $T - mg = m\frac{v^2}{L}$  故  $T = 9mg$

(2) 由于  $v_0 = \sqrt{\frac{gL}{2}}$  小于作圆周运动最高点的最小速度  $\sqrt{gL}$ , 故小球开始做平抛运动。

设小球运动到 B 点时绳张紧, 此时悬线与水平方向夹角为  $\theta$ , 由平抛运动规律有:  $L\cos\theta = v_0t$

$L(1 - \sin\theta) = \frac{1}{2}gt^2$  得  $\theta = 0^\circ$  说明 B 与 O 在同一水平线上。此时  $v_{Bx} = v_0 = \sqrt{\frac{gL}{2}}$ ,  $v_{By} = \sqrt{2gL}$ 。

接着, 由于绳子瞬时张紧, 产生瞬时冲量, 使小球水平冲量变为零, 机械能损失。然后小球以  $\sqrt{2gL}$  的速度从 B 开始作圆周运动到 C 点, 机械能守恒有:  $\frac{1}{2}mv_{By}^2 + mgL = \frac{1}{2}mv_C^2$ , 在

最低点有:  $T - mg = \frac{mv_C^2}{L}$ , 故小球在最低点 C 时绳的拉力  $T = 5mg$

2 解: (1) 以车与小金属组成物体系为研究对象, 小金属滑到车中点 C 时开始到小金属块停在车的左端为止的过程中, 体系在水平方向外力为零, 动量守恒,  $v$  为共同速度

$$2v_0 \times 2m + v_0m = (2m+m)v \quad v = \frac{5}{3}v_0$$

(2) 对金属块使用动量定理  $ft_1 = mv_0 - 0$        $\mu_1 mgt_1 = mv_0$        $t_1 = \frac{v_0}{\mu_1 g}$

对小车使用动量定理  $(F - f)t_1 = 2m \times 2v_0 - 0$        $F = 5\mu_1 mg$

金属块由 A → C 过程中作匀加速运动  $a_1 = \frac{f}{m} = \frac{\mu_1 mg}{m} = \mu_1 g$

小车加速度  $a_2 = \frac{F - f}{2m} = \frac{5\mu_1 mg - \mu_1 mg}{2m} = 2\mu_1 g$

金属块相对小车位移  $s = \frac{l}{2} = \frac{1}{2}(a_2 - a_1)t_1^2 = \frac{1}{2}(2\mu_1 g - \mu_1 g)\left(\frac{v_0}{\mu_1 g}\right)^2$        $\mu_1 = \frac{v_0^2}{gl}$

在金属块由 C → B 过程中  $\mu_2 mgt_2 = m \times \frac{5}{3}v_0 - m \times v_0$        $t_2 = \frac{2v_0}{3\mu_2 g}$

小车加速度  $a_2' = \frac{-f}{2m} = \frac{-\mu_2 mg}{2m} = -\frac{1}{2}\mu_2 g$  金属块加速度  $a_1' = \mu_2 g$

金属块与小车相对位移  $\frac{l}{2} = \frac{1}{2}(a_1' - a_2')t_2^2 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}\mu_2 g \times (\frac{2v_0}{3\mu_2 g})^2$   $\mu_2 = \frac{2v_0^2}{3lg}$

$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{3}{2}$

3 答案: (1)  $h = \sqrt[3]{\frac{R^2 g t^2}{4n^2 \pi^2}} - R$

(2) 卫星的动能  $E_k = mv^2/2 = GMm/2r = R^2 mg/2r$  卫星的机械能为  $E = E_p + E_k = -R^2 mg/2r$   
由发动机做功  $W = E_2 - E_1$  及  $P = W/t$  有

$P = \left( \frac{R^2 mg}{R+h-\Delta h} - \frac{R^2 mg}{R+h} \right) / 2\Delta t$

4. (1) 由图线读得, 转盘的转动周期  $T = 0.8s$  ① 角速度

$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{6.28}{0.8} rad/s = 7.85 rad/s$  ②

(2) 激光器和探测器沿半径由中心向边缘移动(理由为: 由于脉冲宽度在逐渐变窄, 表明光信号能通过狭缝的时间逐渐减少, 即圆盘上对应探测器所在位置的线速度逐渐增加, 因此激光器和探测器沿半径由中心向边缘移动)。

(3) 设狭缝宽度为  $d$ , 探测器接收到第  $i$  个脉冲时距转轴的距离为  $r_i$ , 第  $i$  个脉冲的宽度为  $\Delta t_i$ , 激光器和探测器沿半径的运动速度为  $v$ 。

$\Delta t_i = \frac{d}{2\pi r_i} T$  ③  $r_3 - r_2 = r_2 - r_1 = vT$  ④  $r_2 - r_1 = \frac{dT}{2\pi} \left( \frac{1}{\Delta t_2} - \frac{1}{\Delta t_1} \right)$  ⑤  $r_3 - r_2 =$

$\frac{dT}{2\pi} \left( \frac{1}{\Delta t_3} - \frac{1}{\Delta t_2} \right)$  ⑥

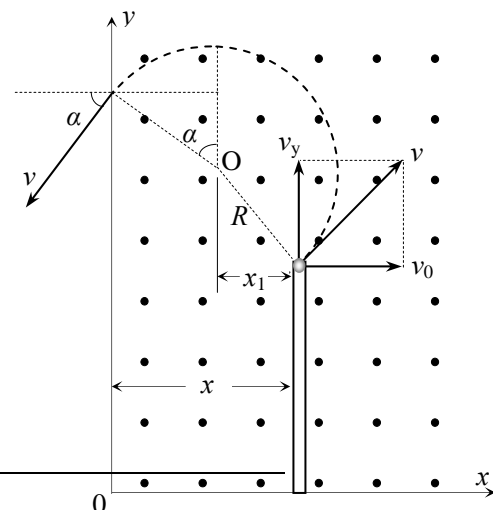
由④. ⑤. ⑥式解得:

$\Delta t_3 = \frac{\Delta t_1 \Delta t_2}{2\Delta t_1 - \Delta t_2} = \frac{1.0 \times 10^{-3} \times 0.8 \times 10^{-3}}{2 \times 1.0 \times 10^{-3} - 0.8 \times 10^{-3}} \approx 0.67 \times 10^{-3} s$

⑦

5. (1) 如图所示, 小球管中运动的加速度为:  $a = \frac{F_y}{m} = \frac{Bv_0 q}{m}$  ①

设小球运动至  $b$  端时的  $y$  方向速度分量为  $v_y$ , 则:  $v_y^2 = 2aL$  ②



又:  $v = \sqrt{v_0^2 + v_y^2}$  ③ 由①~③式, 可解得小球运动至  $b$  端时速度大

$$\text{小为: } v = \sqrt{\frac{2Bv_0q}{m}L + v_0^2} \quad ④$$

(2) 由平衡条件可知, 玻璃管受到的水平外力为:  $F = F_x = Bv_yq$  ⑤

$$v_y = at = \frac{Bv_0q}{m} \cdot t \quad ⑥$$

$$\text{由⑤~⑥式可得外力随时间变化关系为: } F = \frac{B^2v_0q^2}{m} \cdot t \quad ⑦$$

(3) 设小球在管中运动时间为  $t_0$ , 小球在磁场中做圆周运动的半径为  $R$ , 轨迹如图所示,

$$t_0 \text{ 时间内玻璃管的运动距离 } x = v_0 t_0 \quad ⑧ \quad L = \frac{1}{2}at_0^2 \quad ⑨ \quad \text{由牛顿第二定律得:}$$

$$qvB = \frac{mv^2}{R} \quad ⑩$$

$$\text{由几何关系得: } \sin \alpha = \frac{x - x_1}{R} \quad \text{⑪} \quad \frac{x_1}{R} = \frac{v_y}{v} \quad \text{⑫} \quad \text{由①~②、⑧~⑫式可得: } \sin$$

$$\alpha = 0 \quad \text{⑬}$$

故  $\alpha = 0^\circ$ , 即小球飞离磁场时速度方向垂直于磁场边界向左。

6. 解: 设  $V_i$ 、 $p_i$ 、 $\nu_i$  分别为第  $i$  个舱内气体的体积、压强的摩尔数。容器内气体总摩尔数  $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3$ , 因为各舱温度皆为  $T$ , 利用克拉珀龙方程得

$$p_1V_1 + p_2V_2 + p_3V_3 = (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3)RT = \nu RT \quad ①$$

取得中打斜线的活塞与硬杆为研究对象, 由平衡条件得  $(p_3 - p_2)aS = (p_1 - p_2)S$  ②

$$\text{而由题意} \quad p_3 = \beta p_1 \quad ③$$

$$\text{及} \quad V_1 = \frac{l}{2}S, \quad V_2 = \frac{l}{2}(S + aS), \quad V_3 = \frac{a}{2}lS$$

$$p_1 = \frac{\gamma TR(\alpha - 1)}{Sl(\alpha^2\beta - 1)} \quad ④$$

系统吸收热量后, 假设活塞不移动, 显然 I、II、III 舱气体都作等容升温变化, 因题中

明确三舱升高的温度相同, 因而由  $\frac{P}{T} = C$

可知三舱气体的压强都增加相同的倍数, 即方程②仍然满足, 这说明升温过程中活塞确实不移动, 即方程④也仍然成立。

因  $Q = \gamma C \Delta T$   
 结合④式易得 I 舱内气体压强的变化

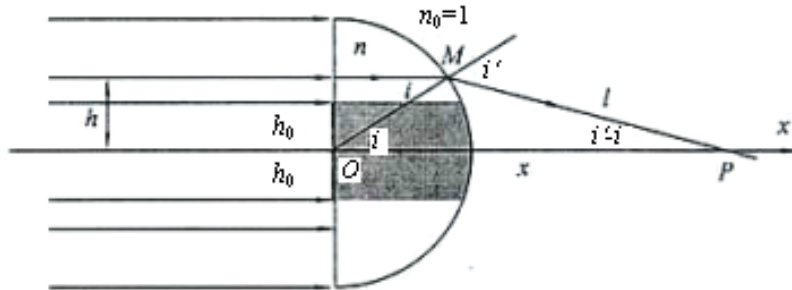
$$\Delta p_1 = \frac{QR(\alpha - 1)}{CSl(\alpha^2 \beta - 1)}。$$

说明利用②式和③式可得  $p_2 = p_1 \frac{\alpha \beta - 1}{\alpha - 1}$

显然只有当  $\alpha \beta > 1$  时才有意义。因为压强必须为正值。

7. 图复解 20-4-1 中画出的是进入玻璃半球的任一光线的光路（图中阴影处是无光线进入的区域），光线在球面上的入射角和折射角分别为  $i$  和  $i'$ ，折射光线与坐标轴的交点在  $P$ 。令轴上  $OP$  的距离为  $x$ ， $MP$  的距离为  $l$ ，根据折射定律，有

$$\frac{\sin i'}{\sin i} = n \quad (1)$$



图复解 20-4-1

在  $\triangle OMP$  中

$$\frac{l}{\sin i} = \frac{x}{\sin i'} \quad (2)$$

$$l^2 = R^2 + x^2 - 2Rx \cos i \quad (3)$$

由式 (1) 和式 (2) 得

$$x = nl$$

再由式 (3) 得

$$x^2 = n^2(R^2 + x^2 - 2Rx \cos i)$$

设  $M$  点到  $Ox$  的距离为  $h$ ，有

$$h = R \sin i$$

$$R \cos i = \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 i} = \sqrt{R^2 - h^2}$$

得

$$\frac{x^2}{n^2} = R^2 + x^2 - 2x\sqrt{R^2 - h^2}$$

$$x^2(1 - \frac{1}{n^2}) - 2x\sqrt{R^2 - h^2} + R^2 = 0$$

(4)

解式(4)可得 
$$x = \frac{n^2\sqrt{R^2 - h^2} \pm n\sqrt{R^2 - n^2h^2}}{n^2 - 1} \quad (5)$$

为排除上式中应舍弃的解, 令  $h \rightarrow 0$ , 则  $x$  处应为玻璃半球在光轴  $Ox$  上的傍轴焦点, 由上式

$$x \rightarrow \frac{n(n \pm 1)}{n^2 - 1} R = \frac{n}{n-1} R \text{ 或 } \frac{n}{n+1} R$$

由图可知, 应有  $x > R$ , 故式(5)中应排除±号中的负号, 所以  $x$  应表示为

$$x = \frac{n^2\sqrt{R^2 - h^2} + n\sqrt{R^2 - n^2h^2}}{n^2 - 1} \quad (6)$$

上式给出  $x$  随  $h$  变化的关系。

因为半球平表面中心有涂黑的面积, 所以进入玻璃半球的光线都有  $h \geq h_0$ , 其中折射光线与  $Ox$  轴交点最远处的坐标为

$$x_0 = \frac{n^2\sqrt{R^2 - h_0^2} + n\sqrt{R^2 - n^2h_0^2}}{n^2 - 1} \quad (7)$$

在轴上  $x > x_0$  处, 无光线通过。

随  $h$  增大, 球面上入射角  $i$  增大, 当  $i$  大于临界角  $i_c$  时, 即会发生全反射, 没有折射光线。与临界角  $i_c$  相应的光线有 
$$h_c = R \sin i_c = R \frac{1}{n}$$

这光线的折射线与轴线的交点处于

$$x_c = \frac{n^2 R \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}}{n^2 - 1} = \frac{nR}{\sqrt{n^2 - 1}}$$

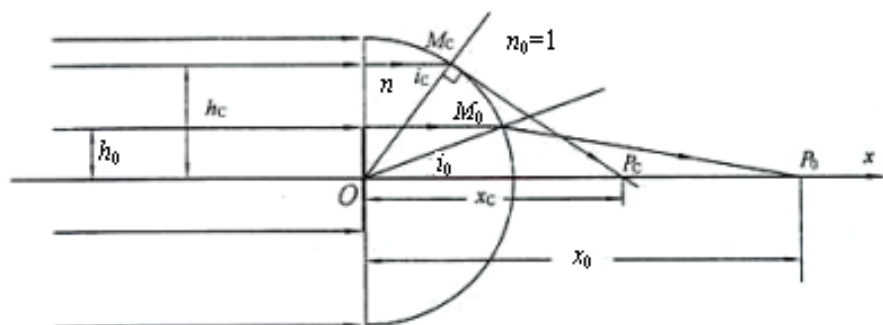
(8)

在轴  $Ox$  上  $R < x < x_c$  处没有折射光线通过。

由以上分析可知, 在轴  $Ox$  上玻璃半球以右

$$x_c \leq x \leq x_0 \quad (9)$$

的一段为有光线段, 其它各点属于无光线段。  $x_0$  与  $x_c$  就是所要求的分界点, 如图复解 20-4-2 所示



图复解 20-4-2



