

第 30 届中国数学奥林匹克

重庆

第一天

(2014 年 12 月 20 日 8: 00—12:30)

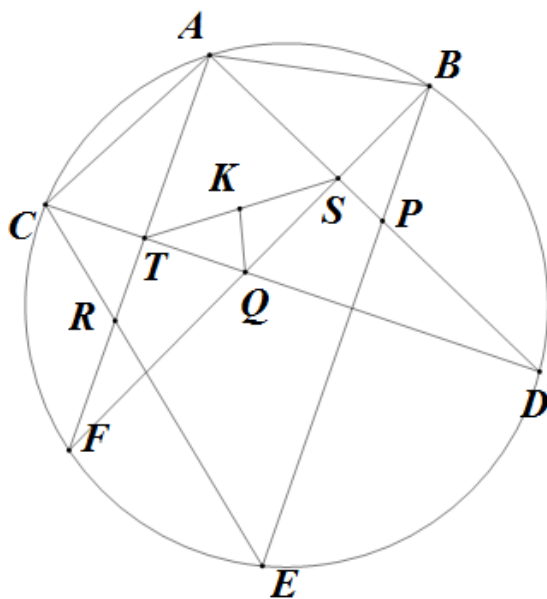
1. 复数 $z_k (k=1, 2, \dots, n)$ 满足: $|z_k - 1| \leq r$, 其中 $0 < r < 1$, 求证:

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \times \left| \sum_{k=1}^n \frac{1}{z_k} \right| \geq n^2 (1 - r^2)$$

2. 如图, 设 A, B, D, E, F, C 是圆周上顺次六个点, 满足 $AB = AC$, 直线 AD 交 BE 于 P , 直线 AF 交 CE 于 R , 直线

BF 交 CD 于 Q , 直线 AD 交 BF 于 S , 直线 AF 交 CD 于 T , 点 K 在线段 ST 上, 满足 $\angle SKQ = \angle ACE$, 求证:

$$\frac{SK}{KT} = \frac{PQ}{QR}$$



3. 已知 $n \geq 5$, 求最小的 m 使得存在两个正整数集合 A, B 满足:

(1) $|A| = n, |B| = m, A \subseteq B$

(2) 对 B 任意两个不同元素 x, y , 有 $x + y \in B$ 当且仅当 $x, y \in A$