

2014 年全国高中数学联合竞赛一试 (A 卷)

参考答案及评分标准

说明:

1. 评阅试卷时, 请依据本评分标准. 填空题只设 8 分和 0 分两档; 其他各题的评阅, 请严格按照本评分标准的评分档次给分, 不要增加其他中间档次.
2. 如果考生的解答方法和本解答不同, 只要思路合理、步骤正确, 在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分, 解答题中第 9 小题 4 分为一个档次, 第 10、11 小题 5 分为一个档次, 不要增加其他中间档次.

一、填空题: 本大题共 8 小题, 每小题 8 分, 共 64 分.

1. 若正数 a, b 满足 $2 + \log_2 a = 3 + \log_3 b = \log_6(a+b)$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的值为_____.

答案: 108.

解: 设 $2 + \log_2 a = 3 + \log_3 b = \log_6(a+b) = k$, 则 $a = 2^{k-2}$, $b = 3^{k-3}$, $a+b = 6^k$, 从而

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{6^k}{2^{k-2} \times 3^{k-3}} = 2^2 \times 3^3 = 108.$$

2. 设集合 $\left\{ \frac{3}{a} + b \mid 1 \leq a \leq b \leq 2 \right\}$ 中的最大元素与最小元素分别为 M, m , 则 $M - m$ 的值为_____.

答案: $5 - 2\sqrt{3}$.

解: 由 $1 \leq a \leq b \leq 2$ 知, $\frac{3}{a} + b \leq \frac{3}{1} + 2 = 5$, 当 $a=1, b=2$ 时, 得最大元素 $M=5$. 又

$$\frac{3}{a} + b \geq \frac{3}{a} + a \geq 2\sqrt{\frac{3}{a} \cdot a} = 2\sqrt{3},$$

当 $a=b=\sqrt{3}$ 时, 得最小元素 $m=2\sqrt{3}$.

因此, $M - m = 5 - 2\sqrt{3}$.

3. 若函数 $f(x) = x^2 + a|x-1|$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 则实数 a 的取值范围是_____.

答案: $[-2, 0]$.

解: 在 $[1, +\infty)$ 上, $f(x) = x^2 + ax - a$ 单调递增, 等价于 $-\frac{a}{2} \leq 1$, 即 $a \geq -2$. 在 $[0, 1]$ 上, $f(x) = x^2 - ax + a$ 单调递增, 等价于 $\frac{a}{2} \leq 0$, 即 $a \leq 0$.

因此实数 a 的取值范围是 $[-2, 0]$.

4. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{2(n+2)}{n+1} a_n$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 则 $\frac{a_{2014}}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2013}} =$ _____.

答案: $\frac{2015}{2013}$.

解: 由题设

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2(n+1)}{n} a_{n-1} = \frac{2(n+1)}{n} \cdot \frac{2n}{n-1} a_{n-2} = \cdots \\ &= \frac{2(n+1)}{n} \cdot \frac{2n}{n-1} \cdots \frac{2 \cdot 3}{2} a_1 = 2^{n-1}(n+1). \end{aligned}$$

记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则

$$S_n = 2 + 2 \times 3 + 2^2 \times 4 + \cdots + 2^{n-1}(n+1),$$

所以

$$2S_n = 2 \times 2 + 2^2 \times 3 + 2^3 \times 4 + \cdots + 2^n(n+1),$$

将上面两式相减，得 $S_n = 2^n(n+1) - (2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 2)$
 $= 2^n(n+1) - 2^n = 2^n n$.

故 $\frac{a_{2014}}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2013}} = \frac{2^{2013} \times 2015}{2^{2013} \times 2013} = \frac{2015}{2013}$.

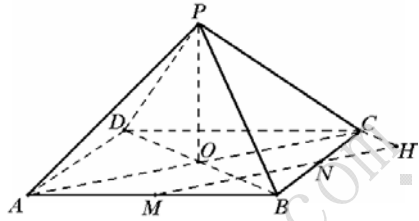
5. 正四棱锥 $P-ABCD$ 中，侧面是边长为 1 的正三角形， M, N 分别是边 AB, BC 的中点，则异面直线 MN 与 PC 之间的距离是_____.

答案: $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

解: 设底面对角线 AC, BD 交于点 O ，过点 C 作直线 MN 的垂线，交 MN 于点 H 。

由于 PO 是底面的垂线，故 $PO \perp CH$ ，又 $AC \perp CH$ ，所以 CH 与平面 POC 垂直，故 $CH \perp PC$ 。

因此 CH 是直线 MN 与 PC 的公垂线段，又 $CH = \frac{\sqrt{2}}{2} CN = \frac{\sqrt{2}}{4}$ ，故异面直线 MN 与 PC 之间的距离是 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ 。



6. 设椭圆 Γ 的两个焦点是 F_1, F_2 ，过点 F_1 的直线与 Γ 交于点 P, Q 。若 $|PF_2| = |F_1F_2|$ ，且 $3|PF_1| = 4|QF_1|$ ，则椭圆 Γ 的短轴与长轴的比值为_____.

答案: $\frac{2\sqrt{6}}{7}$.

解: 不妨设 $|PF_1| = 4, |QF_1| = 3$ 。记椭圆 Γ 的长轴，短轴的长度分别为 $2a, 2b$ ，焦距为 $2c$ ，则 $|PF_2| = |F_1F_2| = 2c$ ，且由椭圆的定义知，

$$2a = |QF_1| + |QF_2| = |PF_1| + |PF_2| = 2c + 4.$$

于是 $|QF_2| = |PF_1| + |PF_2| - |QF_1| = 2c + 1$ 。

设 H 为线段 PF_1 的中点，则 $|F_1H| = 2, |QH| = 5$ ，且有 $F_2H \perp PF_1$ 。由勾股定理知，

$$|QF_2|^2 - |QH|^2 = |F_2H|^2 = |F_1F_2|^2 - |F_1H|^2,$$

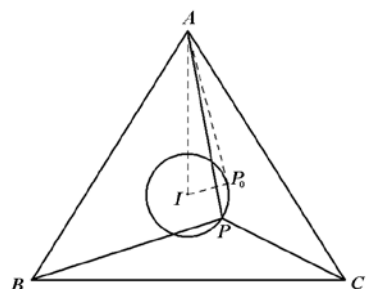
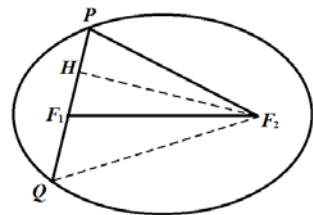
即 $(2c+1)^2 - 5^2 = (2c)^2 - 2^2$ ，解得 $c = 5$ ，进而 $a = 7$ ，

$b = 2\sqrt{6}$ ，因此椭圆 Γ 的短轴与长轴的比值为 $\frac{b}{a} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$ 。

7. 设等边三角形 ABC 的内切圆半径为 2，圆心为 I 。若点 P 满足 $PI = 1$ ，则 $\triangle APB$ 与 $\triangle APC$ 的面积之比的最大值为_____.

答案: $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

解: 由 $PI = 1$ 知点 P 在以 I 为圆心的单位圆 K 上。



设 $\angle BAP = \alpha$. 在圆 K 上取一点 P_0 , 使得 α 取到最大值 α_0 , 此时 P_0 应落在 $\angle IAC$ 内,

且是 AP_0 与圆 K 的切点. 由于 $0 < \alpha \leq \alpha_0 < \frac{\pi}{3}$, 故

$$\frac{S_{\triangle APB}}{S_{\triangle APC}} = \frac{\frac{1}{2}AP \cdot AB \cdot \sin \alpha}{\frac{1}{2}AP \cdot AC \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)} = \frac{\sin \alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)} \leq \frac{\sin \alpha_0}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha_0\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right)}, \quad ①$$

其中, $\theta = \alpha_0 - \frac{\pi}{6} = \angle IAP_0$.

由 $\angle AP_0I = \frac{\pi}{2}$ 知, $\sin \theta = \frac{IP_0}{AI} = \frac{1}{2r} = \frac{1}{4}$, 于是 $\cot \theta = \sqrt{15}$, 所以

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right)} = \frac{\frac{1}{2}\cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin \theta}{\frac{1}{2}\cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin \theta} = \frac{\cot \theta + \sqrt{3}}{\cot \theta - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{\sqrt{15} - \sqrt{3}} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}. \quad ②$$

根据①、②可知, 当 $P = P_0$ 时, $\frac{S_{\triangle APB}}{S_{\triangle APC}}$ 的最大值为 $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

8. 设 A, B, C, D 是空间四个不共面的点, 以 $\frac{1}{2}$ 的概率在每对点之间连一条边, 任意两对点之间是否连边是相互独立的, 则 A, B 可用 (一条边或者若干条边组成的) 空间折线连接的概率为_____.

答案: $\frac{3}{4}$.

解: 每对点之间是否连边有 2 种可能, 共有 $2^6 = 64$ 种情况. 考虑其中 A, B 可用折线连接的情况数.

(1) 有 AB 边: 共 $2^5 = 32$ 种情况.

(2) 无 AB 边, 但有 CD 边: 此时 A, B 可用折线连接当且仅当 A 与 C, D 中至少一点相连, 且 B 与 C, D 中至少一点相连, 这样的情况数为 $(2^2 - 1) \times (2^2 - 1) = 9$.

(3) 无 AB 边, 也无 CD 边: 此时 AC, CB 相连有 2^2 种情况, AD, DB 相连也有 2^2 种情况, 但其中 AC, CB, AD, DB 均相连的情况被重复计了一次, 故 A, B 可用折线连接的情况数为 $2^2 + 2^2 - 1 = 7$.

以上三类情况数的总和为 $32 + 9 + 7 = 48$, 故 A, B 可用折线连接的概率为 $\frac{48}{64} = \frac{3}{4}$.

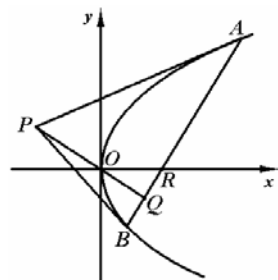
二、解答题: 本大题共 3 小题, 共 56 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9. (本题满分 16 分) 平面直角坐标系 xOy 中, P 是不在 x 轴上的一个动点, 满足条件: 过 P 可作抛物线 $y^2 = 4x$ 的两条切线, 两切点连线 l_p 与 PO 垂直.

设直线 l_p 与直线 PO , x 轴的交点分别为 Q, R .

(1) 证明 R 是一个定点;

(2) 求 $\frac{|PQ|}{|QR|}$ 的最小值.



解：(1) 设 P 点的坐标为 (a, b) ($b \neq 0$)，易知 $a \neq 0$ 。记两切点 A, B 的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ，则 PA, PB 的方程分别为

$$yy_1 = 2(x + x_1), \quad \text{①}$$

$$yy_2 = 2(x + x_2), \quad \text{②}$$

而点 P 的坐标 (a, b) 同时满足①, ②，故 A, B 的坐标 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 均满足方程

$$by = 2(x + a). \quad \text{③}$$

故③就是直线 AB 的方程。

直线 PO 与 AB 的斜率分别为 $\frac{b}{a}$ 与 $\frac{2}{b}$ ，由 $PO \perp AB$ 知， $\frac{b}{a} \cdot \frac{2}{b} = -1$ ，故 $a = -2$ 。

.....4 分

从而③即为 $y = \frac{2}{b}(x - 2)$ ，故 AB 与 x 轴的交点 R 是定点 $(2, 0)$ 。

.....8 分

(2) 因为 $a = -2$ ，故直线 PO 的斜率 $k_1 = -\frac{b}{2}$ ，直线 PR 的斜率 $k_2 = -\frac{b}{4}$ 。设 $\angle OPR = \alpha$ ，则 α 为锐角，且

$$\frac{|PQ|}{|QR|} = \frac{1}{\tan \alpha} = \left| \frac{1 + k_1 k_2}{k_1 - k_2} \right| = \left| \frac{1 + \left(-\frac{b}{2}\right)\left(-\frac{b}{4}\right)}{-\frac{b}{2} + \frac{b}{4}} \right| = \frac{8 + b^2}{2|b|} \geq \frac{2\sqrt{8 \cdot b^2}}{2|b|} = 2\sqrt{2}.$$

当 $b = \pm 2\sqrt{2}$ 时， $\frac{|PQ|}{|QR|}$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$ 。

.....16 分

10. (本题满分 20 分) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{\pi}{6}$ ， $a_{n+1} = \arctan(\sec a_n)$ ($n \in \mathbf{N}^*$)。求正整数 m ，使得

$$\sin a_1 \cdot \sin a_2 \cdots \sin a_m = \frac{1}{100}.$$

解：由已知条件可知，对任意正整数 n ， $a_{n+1} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ，且

$$\tan a_{n+1} = \sec a_n. \quad \text{①}$$

由于 $\sec a_n > 0$ ，故 $a_{n+1} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 。由①得， $\tan^2 a_{n+1} = \sec^2 a_n = 1 + \tan^2 a_n$ ，故

$$\tan^2 a_n = n - 1 + \tan^2 a_1 = n - 1 + \frac{1}{3} = \frac{3n - 2}{3},$$

即 $\tan a_n = \sqrt{\frac{3n - 2}{3}}$ 。

.....10 分

因此

$$\begin{aligned} \sin a_1 \cdot \sin a_2 \cdots \sin a_m &= \frac{\tan a_1}{\sec a_1} \cdot \frac{\tan a_2}{\sec a_2} \cdots \frac{\tan a_m}{\sec a_m} \\ &= \frac{\tan a_1}{\tan a_2} \cdot \frac{\tan a_2}{\tan a_3} \cdots \frac{\tan a_m}{\tan a_{m+1}} \quad (\text{利用①}) \\ &= \frac{\tan a_1}{\tan a_{m+1}} = \sqrt{\frac{1}{3m + 1}}. \end{aligned}$$

由 $\sqrt{\frac{1}{3m + 1}} = \frac{1}{100}$ ，得 $m = 3333$ 。

.....20 分

11. (本题满分 20 分) 确定所有的复数 α , 使得对任意复数 z_1, z_2 ($|z_1|, |z_2| < 1, z_1 \neq z_2$), 均有

$$(z_1 + \alpha)^2 + \alpha \bar{z}_1 \neq (z_2 + \alpha)^2 + \alpha \bar{z}_2.$$

解: 记 $f_\alpha(z) = (z + \alpha)^2 + \alpha \bar{z}$. 则

$$\begin{aligned} f_\alpha(z_1) - f_\alpha(z_2) &= (z_1 + \alpha)^2 + \alpha \bar{z}_1 - (z_2 + \alpha)^2 - \alpha \bar{z}_2 \\ &= (z_1 + z_2 + 2\alpha)(z_1 - z_2) + \alpha(\bar{z}_1 - \bar{z}_2). \end{aligned} \quad \textcircled{1}$$

假如存在复数 z_1, z_2 ($|z_1|, |z_2| < 1, z_1 \neq z_2$), 使得 $f_\alpha(z_1) = f_\alpha(z_2)$, 则由①知,

$$\left| \alpha(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) \right| = \left| -(z_1 + z_2 + 2\alpha)(z_1 - z_2) \right|,$$

利用 $\left| \bar{z}_1 - \bar{z}_2 \right| = \left| \overline{z_1 - z_2} \right| = |z_1 - z_2| \neq 0$ 知, $|\alpha| = |z_1 + z_2 + 2\alpha| \geq 2|\alpha| - |z_1| - |z_2| > 2|\alpha| - 2$, 即 $|\alpha| < 2$10 分

另一方面, 对任意满足 $|\alpha| < 2$ 的复数 α , 令 $z_1 = -\frac{\alpha}{2} + \beta i, z_2 = -\frac{\alpha}{2} - \beta i$, 其中 $0 < \beta < 1 - \frac{|\alpha|}{2}$, 则 $z_1 \neq z_2$, 而 $\left| -\frac{\alpha}{2} \pm \beta i \right| \leq \left| -\frac{\alpha}{2} \right| + |\beta| < 1$, 故 $|z_1|, |z_2| < 1$. 此时将

$$z_1 + z_2 = -\alpha, \quad z_1 - z_2 = 2\beta i, \quad \bar{z}_1 - \bar{z}_2 = \overline{2\beta i} = -2\beta i$$

代入①可得, $f_\alpha(z_1) - f_\alpha(z_2) = \alpha \cdot 2\beta i + \alpha \cdot (-2\beta i) = 0$, 即 $f_\alpha(z_1) = f_\alpha(z_2)$.

综上所述, 符合要求的 α 的值为 $\{\alpha \mid \alpha \in \mathbf{C}, |\alpha| \geq 2\}$20 分