### 数学竞赛 第七届“华罗庚金杯”少年数学邀请赛

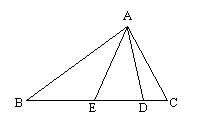
### 决赛第二试及答案

1.某计算机接信息的速度为每秒2.8千字节，发送信息的速度为每秒3.8千字节。现要从A处接收，往B处发送，并还要将机内储存的58千字节的信息也发送B处。如果发送、接收轮流进行，每次发与收各l0秒钟，问：

(1)若先发送，经过多少秒恰好将机内储存的信息送完?

(2)若先接收，经过多少秒恰好将机内储存的信息送完?(结果保留分数)

2.在三角形ABC中，D，E是BC边上的点，BD=AB，CE=AC，又∠DAE=∠BAC，求∠BAC的度数。



3.152个球。放入若干个同样的箱子中，一个箱子最少放l0个，最多放20个，且各个箱子的球数均不相同。问：有多少种放法?(不计箱子的排列，即两种放法，若经过箱子的重新排列后，是一样的，就算一种放法)

4.A，B两地相距l25千米，甲、乙二人骑自行车分别从A，B两地同时出发，相向而行。丙骑摩托车每小时行63千米，与甲同时从A出发，在甲、乙二人间来回穿梭(与乙相遇立即返回，与甲相遇也立即返回)，若甲车速每小时9千米，且当丙第二次回到甲处时(甲、丙同时出发的那一次为丙第0次回到甲处)，甲、乙二人相距45千米，问：当甲、乙二人相距20千米时，甲与丙相距多少千米?

5.3个三位数乘积的算式 clip_image005_0007=234235286，(其中a＞b＞c)在校对时，发现右边的积的数字顺序出现错误，但是知道最后一位6是正确的。问：原式中的clip_image007_0005是多少?

6.对干自然数a,Sa表示a的各位数字之和。求同时满足下列条件的所有的自然数

(1)a为奇数，且不是3的倍数；(2)＝m＜50，m为自然数。

**参考答案**

1.【解】

1)先发送1O秒，发出：10×3.8＝38 千字节，还剩：58－38＝20千字节，以后每20秒(收、发各10秒)，可发机内储存的10×(3.8－2.8)＝10千字节，因此，将机内储存的信息送完需要10＋2×20＝50秒，

2)每20秒(收、发各10秒)，可发机内储存的10千字节100秒可发机内储存的50千字节还剩58－50＝8千字节，再过10秒，又输入28(＝2.8×10)千字节，共有8＋28＝36千字节，需要clip_image013_0006秒，因此，将机内储存的信息送完需要100＋10＋clip_image015_0009＝clip_image017_0013秒。

2.【解】设∠BAE，∠EAD，∠DAC分别为α，β，γ，则β＝clip_image002_0026(α＋β十γ)，即 2β＝α＋γ．

　由AB＝BD得，α＋β＝∠BDA＝γ＋∠C，②

　由CE＝AC得，β＋γ＝∠CEA＝α＋∠B，③

　②十③得，α＋γ＋2β＝∠B＋∠C＋α＋γ，④

　两边再加上β得，α＋γ＋3β＝∠B＋∠C＋∠BAC＝180°⑤

　由于①上式即，5β＝180°

　所以3β＝clip_image020_0014×3＝108°，即∠BAC＝108°。

3.【解】设箱子个数为m，

　因为每只箱子的球数均不相同，最少放10个，最多放20个，所以m≤20－10＋1＝11。

　如果m＝11，即么球的总数≥10×11＋(0＋1＋2＋…＋10)＝110＋55＞152

　所以m≤10。

　如果m≤9，那么球的总数≤10×9＋(10＋9＋8＋…＋2)＝90＋54＝144<152

　所以m＝10，

　在m＝10时，10×10＋(10＋9＋…＋1)＝155＝152＋3，

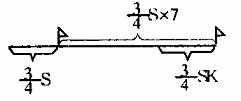
　所以一个箱子放10个球，其余箱子分别放11，12，14，15，16，17，18，19，20个球，总数恰好为152，

　而且符合要求的放法也只有这一种。

4.【解】先求乙的速度，设乙的速度为甲的K倍，丙与乙相遇时甲行S千米，则这时丙行7S千米，乙行KS千米，于是7S＋KS＝125(1)

这时甲丙相距6S(＝7S－S)千米，丙第一次回到甲处时，甲又向前行6S＋(7＋1)＝clip_image024_0018S(千米)，丙行clip_image024_0019S×7(千米)，乙行clip_image024_0020S×K(千米)，所以甲、乙相距clip_image024_0021S×7－clip_image024_0022S×K＝clip_image024_0023S(7－K)(2)

即(将(1)代入(2)消去S)

clip_image022_0003

clip_image030_0025×125(千米)　⑶

【注】(3)中的125，如果改成其他数(例如A、A两地原来相距250千米)．推导完全一样，于是，在丙第二次回到甲处时，甲、乙相距

clip_image030_0026×clip_image030_0027×125(千米)　(4)

　(推导与上面完全一样，只是125千米换成了clip_image030_0028×125千米)

　根据已知条件：clip_image030_0029×clip_image030_0030×125＝45⑸

　即：clip_image033_0003(6)

　于是(只取正值)　clip_image035_0008＝clip_image037_0005(7)

　从而　K＝clip_image039_0004

即乙的速度是每小时：clip_image039_0005×9＝7(千米)

当丙第三次回到甲处时，甲、乙相距　clip_image030_0031×45＝clip_image024_0024×clip_image037_0006×45＝clip_image043_0012×45＝27(千米)．

丙第四次回到甲处时，甲、乙相距　clip_image043_0013×27＝clip_image046_0012＜20(千米)。

因此，甲、乙相距20千米发生在丙第四次回到甲处之前，即他们都应从丙第四次回到甲处这事往回倒退。由于

20－clip_image046_0013＝clip_image048_0007，

而甲、乙速度之比是9∶7．所以甲应退　clip_image048_0008×clip_image051_0007

丙的速度是甲的7倍，所以丙应退甲的7倍，

从而在甲、乙相距20米时，甲丙相距　clip_image048_0009×clip_image051_0008×(1＋7)＝clip_image054_0006(千米)

5.【解】考虑除以9的余数，我们用　x≡y(mod9)

表示x,y除以9的余数相同，也就是x－y是9的倍数，读作x与y模9同余

熟知一个自然数与它的数字和模9同余，所以

234235286≡2＋3＋4＋2十3＋5＋2＋8＋6≡8(mod 9)

clip_image005_0008≡(a＋b＋c)3(mod 9)

于是 (a＋b＋c)3≡8(mod 9)

从而(用a＋b＋c≡0，1，2，…，8代入上式检验) a＋b＋c≡2，5，8(mod 9)(1)

对a进行讨论

如果a＝9，那么 b＋c≡2，5，8(mod 9)(2)

又c×a×b的个位数字是6，所以 b×c＝4×1＝7×2＝8×3＝6×4

其中只有(b，c)＝(4，1)，(8，3)符合(2)，经检验只有 983×839×398＝328245326 符合题意

如果a＝8，那么 b＋c≡3，6，O(mod9)(3)

又b×c＝2×1＝4×3＝6×2＝7×6＝7×1，其中只有(b，c)＝(2，1)，符合(3)．

经检验clip_image007_0006＝921，不合题意

如果a＝7，那么 b＋c≡4，7，1(mod 9)(4)

又b×c＝4×2＝6×3，其中没有符合(4)的b、c

如果a≤6，那么 clip_image005_0009＜700×600×500＝210000000＜222334586，

因此这时clip_image007_0007不可能符合题意。

综上所述，clip_image007_0008＝983是本题唯一的解

本题采用枚举法(也称为穷举法)，分情况进行讨论，这是一种极常用的方法．

6.【解】如果a是一位数，那么(2)显然满足(clip_image011_0013＝1)，由(1)，a＝1，5，7。

如果a是两位数，设十位数字为x，个位数字为y，则 clip_image011_0014＝clip_image063_0011＝1＋clip_image065_0000

由于a不是3的倍数，所以Sa也不是3的倍数。但clip_image011_0015＝m是自然数，所以clip_image065_0001是自然数，即9x被x＋y整除。因为Sa＝x＋y不是3的倍数，即x＋y与9互质，所以x被x＋y整除。但a是奇数，所以y≠O，x＜x＋y，x不可能被x＋y整除。因此a不可能是两位数。

如果a是四位以上的数，设a＝1000x＋100y十10z＋u，其中y,z,u都是数字，x是自然数，则Sa≤x＋y＋z＋u，由(2)，1000x十1OOy＋10z＋u＜50(x＋y十z十u)

于是950＜950x＋50y＜40z＋50u＜400＋500＝900矛盾，因此a不可能是四位以上的数。

如果a是三位数，设a＝1OOx＋1Oy＋1Oz，x、y、z都是数字，x≠0，则Sa＝x＋y＋z，

m＝clip_image069_0008

与前面的推理相同，clip_image071_0002是奇数,而且由于，m＜50，所以 clip_image073_0017＜clip_image075_0002＜5，

从而，clip_image073_0018＝1或3(1)

以下分两种情况来求(1)的解

(a)1Ox－z＝x＋y＋z，即 9x＝y＋2z(2)

在x＝1时，由(2)可得z＝1，y＝7或者z＝3，y＝3(注意a为奇数，所以z是奇数)，其中第一组得出a＝117是3的倍数不合要求。

在x＝2时，由(2)可得z＝5，y＝8(不合要求)；z＝7,y＝4；z＝9，y＝0．

在x＝3时，由(2)得x＝y＝9不合要求．

由于y＋2z≤9十2×9＝27，所以x不可能大于3

(b)1Ox－z＝3(x＋y＋z)，即 7x＝3y＋4z

同样，令x＝1,2，…，9逐一检验，得出x＝4时，z＝7,y＝0；z＝1，y＝8,x＝6时，z＝9，y＝2

于是本题的解为：1，5，7，133，247，209，407，481,629