2007 年中国数学奥林匹克

第二天

2007年1月28日　上午8:00–12:30　浙江温州

1. 设 O 和 I 分别为 $\triangle ABC$ 的外心和内心, $\triangle ABC$ 的内切圆与边 BC, CA, AB 分别相切于点 D, E, F, 直线 FD 与 CA 相交于点 P, 直线 DE 与 AB 相交于点 Q, 点 M, N 分别为线段 PE, QF 的中点, 求证: $OI \perp MN$.

2. 设有界数列 $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ 满足

$$a_n < \sum_{k=n}^{2n+2006} \frac{a_k}{k+1} + \frac{1}{2n+2007},\ n = 1, 2, 3, \cdots,$$

   证明: $a_n < \dfrac{1}{n}, n = 1, 2, 3, \cdots$.

3. 试求不小于 9 的最小正整数 n, 满足: 对任给的 n 个整数(可以相同) $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 总存在 9 个数 $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_n}$ $(1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_9 \leqslant n)$ 及 $b_i \in \{4, 7\}$ $(i = 1, 2, \ldots, 9)$, 使得 $b_1 a_{i_1} + b_2 a_{i_2} + \cdots + b_i a_{i_9}$ 为 9 的倍数.