2007 年中国数学奥林匹克

第一天

2007年1月27日　上午8:00–12:30　浙江温州

1. 设 a, b, c 是给定复数, 记 $|a+b| = m,\ |a-b| = n$, 已知 $mn \neq 0$, 求证

$$\max\{|ac+b|, |a+bc|\} \geqslant \frac{mn}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

2. 试证明: (1) 若 $2n-1$ 为素数, 则对于任意 n 个互不相同的正整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 都存在 $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 使得

$$\frac{a_i + a_j}{(a_i, a_j)} \geqslant 2n-1;$$

(2) 若 $2n-1$ 为合数, 则存在 n 个互不相同的正整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 使得对任意 $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 都有

$$\frac{a_i + a_j}{(a_i, a_j)} < 2n-1.$$

其中 (x, y) 表示正整数 x, y 的最大公约数.

3. 已知 $a_1, a_2, \cdots, a_{11}$ 为给定的 11 个互不相同的正整数, 且总和小于 2007. 在黑板上依次写着 $1, 2, \cdots, 2007$ 这 2007 个数. 将连续的 22 次操作定义为一个操作组: 第 i 次操作可以从黑板上现有的数中任选一个数, 当 $1 \leqslant i \leqslant 11$ 时, 加上 a_i, 当 $12 \leqslant i \leqslant 22$ 时, 减去 a_{i-11}. 如果最终结果为 $1, 2, \cdots, 2007$ 的偶排列, 则称这个操作组为优的; 如果最终结果为 $1, 2, \cdots, 2007$ 的奇排列, 则称这个操作为次优的, 问: 优的操作组与次优的操作组哪种多, 多多少?
注: $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 称为偶排列, 如果 $\prod\limits_{i>j}(x_i - x_j)$ 为正数; 否则称为奇排列.