模拟训练

数学奥林匹克初中训练题(1)

第 一 试

一、选择题(每小题 7 分,共 42 分)

1. 设 $\sqrt{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$,且 x、y、z 为有理数. 则 $xyz=$(　　).

(A) $\frac{3}{4}$　(B) $\frac{5}{6}$　(C) $\frac{7}{12}$　(D) $\frac{13}{18}$

2. 设二次函数 $f(x)=ax^2+ax+1$ 的图像开口向下,且满足 $f(f(1))=f(3)$. 则 $2a$ 的值为(　　).

(A) -3　(B) -5　(C) -7　(D) -9

3. 方程 $|xy|+|x+y|=1$ 的整数解的组数为(　　).

(A) 2　(B) 4　(C) 6　(D) 8

4. a、b 是方程 $x^2+(m-5)x+7=0$ 的两个根. 则 $(a^2+ma+7)(b^2+mb+7)=$(　　).

(A) 365　(B) 245　(C) 210　(D) 175

5. 如图 1, Rt $\triangle ABC$ 的斜边 $BC=4$, $\angle ABC=30°$,以 AB、AC 为直径分别作圆. 则这两圆的公共部分面积为(　　)

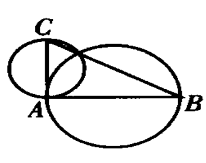

图 1

(A) $\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$　(B) $\frac{5\pi}{6}-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(C) $\frac{5\pi}{6}-\sqrt{3}$　(D) $\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3}$

6. 从 1, 2, …, 13 中取出 k 个不同的数,使这 k 个数中任两个数之差既不等于 5,也不等于 8. 则 k 的最大值为(　　).

(A) 5　(B) 6　(C) 7　(D) 8

二、填空题(每小题 7 分,共 28 分)

1. 若整系数一元二次方程

$$x^2+(a+3)x+2a+3=0$$

有一正根 x_1 和一负根 x_2,且 $|x_1|<|x_2|$,则 $a=$______.

2. 当 $x=\frac{\sqrt{29}-3}{2}$ 时,代数式

$$x^4+5x^3-3x^2-8x+9$$

的值是______.

3. 给定两组数, A 组为: 1, 2, …, 100; B 组为: $1^2, 2^2, \cdots, 100^2$. 对于 A 组中的数 x,若有 B 组中的数 y,使 $x+y$ 也是 B 组中的数,则称 x 为"关联数". 那么, A 组中这样的关联数有______个.

4. 已知 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 $AB=2\sqrt{a^2+576}$, $BC=\sqrt{a^2+14a+625}$, $AC=\sqrt{a^2-14a+625}$,其中 $a>7$. 则 $\triangle ABC$ 的面积为______.

第 二 试

一、(20 分)解方程:

$$(12x+5)^2(6x-1)(x+1)=\frac{55}{2}.$$

二、(25 分)如图 2,四边形 $ABCD$ 中, $\angle ACB=\angle ADB=90°$,自对角线 AC、BD 的交点 N 作 $NM\perp AB$ 于点 M,线段 AC、MD 交于点 E, BD、MC 交于点 F, P 是线段 EF 上的任意一点. 证明:点 P 到线段 CD 的距离等于点 P 到线段 MC、MD 的距离之和.

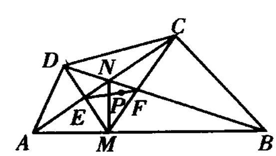

图 2

三、(25 分)矩形玻璃台板碎裂成一些小玻璃片,每块碎片都是凸多边形,将其重新粘合成原矩形后,有交结点 30 个,其中 20 个点在原矩形的周界上(包括原矩形的四个顶点),其余 10 个点在矩形内部. 在矩形的内部

有 45 条粘缝(两个结点之间的线段算是一条粘缝,如图 3 所示).

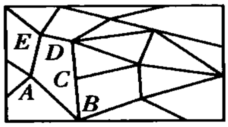

图 3

试求该矩形台板所碎裂成的各种类型(指三角形、四边形、五边形等)的块数.

说明:若凸多边形的周界上有 n 个点,就将其看成 n 边形,例如,图 3 中的多边形 $ABCDE$ 要看成五边形.

参 考 答 案

第 一 试

1. A.

两边平方得

$3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}=x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{yz}+2\sqrt{xz}$.

根据有理数 x、y、z 的对称性,可考虑方程组

$$\begin{cases} x+y+z=3, \\ 2\sqrt{xy}=\sqrt{2}, \\ 2\sqrt{yz}=\sqrt{3}, \\ 2\sqrt{xz}=\sqrt{6}. \end{cases}$$

解得 $x=1$, $y=\frac{1}{2}$, $z=\frac{3}{2}$. 此时, $xyz=\frac{3}{4}$.

2. B.

注意到

$f(1)=2a+1$, $f(3)=12a+1$,

$f(f(1))=a(2a+1)^2+a(2a+1)+1$.

由 $f(f(1))=f(3)$,得

$(2a+1)^2+(2a+1)=12$.

所以, $2a+1=3$ 或 -4.

因 $a<0$,故 $2a=-5$.

3. C.

因 x、y 为整数,则 $|xy|$、$|x+y|$ 为非负整数. 于是, $|xy|$、$|x+y|$ 中一个为 0,一个为 1. 分情形考虑得 6 组解.

4. D.

由 $ab=7$, $a^2+ma+7=5a$, $b^2+mb+7=5b$,所以, $(a^2+ma+7)(b^2+mb+7)=25ab=175$.

5. C.

记两圆公共部分的面积为 S. 如图 4,易知

$S=S_{扇形EAD}+S_{扇形FAD}-S_{四边形AEDF}$

$=\frac{\pi}{3}\times 1^2+\frac{\pi}{6}\times(\sqrt{3})^2-\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}=\frac{5\pi}{6}-\sqrt{3}$.

6. B.

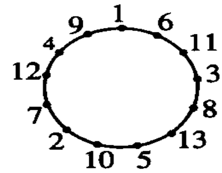

图 4

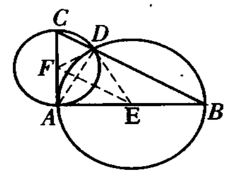

图 5

将这 13 个数按照相邻两数的差为 5 或 8 排列于一个圆周上(如图 5). 若取出的数多于 6 个,则必有 2 个数在圆周上相邻. 另一方面,可以取出适合条件的 6 个数(任取圆周上不相邻的 6 个数即可),因此, k 的最大值为 6.

二、**1.** -2.

因方程的两根不等,故 $\Delta>0$,即

$(a+3)^2>4(2a+3)$.

解得 $a>3$ 或 $a<-1$.

又由题设条件知,方程的两根和与积皆负,即

$-(a+3)<0$, $2a+3<0$.

从而, $a>-3$, $a<-\frac{3}{2}$,即 $-3<a<-\frac{3}{2}$.

而 a 为整数,则 $a=-2$.

2. $7\sqrt{29}-32$.

因 $x=\frac{\sqrt{29}-3}{2}$ 是方程 $x^2+3x-5=0$ 的根,则

$x^4+5x^3-3x^2-8x+9$

$=(x^2+3x-5)(x^2+2x-4)+14x-11$

$=14x-11=14\times\frac{\sqrt{29}-3}{2}-11=7\sqrt{29}-32$.

3. 73.

记 $x+y=a^2$, $y=b^2$,则 $1\leq b<a\leq 100$.

而 $x=a^2-b^2=(a+b)(a-b)\leq 100$,因 $a+b$、$a-b$ 同奇偶,故 $a+b\geq(a-b)+2$.

(1) 若 $a-b=1$,则 $a+b$ 为奇数,且 $3\leq a+b\leq 99$. 于是, $a+b$ 可取 3,5,7,…,99,共 49 个值,这时,相应的 x 也可取这 49 个值.

(2) 若 $a-b=2$,则 $a+b$ 为偶数,且 $4\leq a+b\leq 50$. 于是, $a+b$ 可取 4,6,8,…,50,共 24 个值,这时,相应的 x 可取 8,12,16,…,100 这 24 个值.

其他情况下所得的 x 值均属于以上情形.

若 $a-b=$ 奇数,则 $a+b=$ 奇数.

而 $x=a^2-b^2\geq a+b\geq 3$,归入(1).

若 $a-b=$ 偶数,则 $a+b=$ 偶数.

而 $x=(a-b)(a+b)$ 为 4 的倍数,且 $a-b\geq 2$, $a+b\geq 4$,故 $x\geq 8$,归入(2).

因此,这种 x 共有 $49+24=73$ 个.

4. 168.

注意到

$AB^2=(2a)^2+48^2$,

$BC^2=(a+7)^2+24^2$,

$AC^2=(a-7)^2+24^2$.

如图 6,以 AB 为斜边,向 $\triangle ABC$ 一侧作直角 $\triangle ABD$,使

$BD=2a$, $AD=48$,

$\angle ADB=90°$.

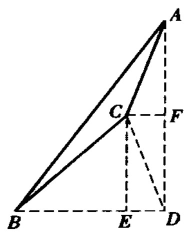

图 6

在 BD 上取点 E,使 $BE=a+7$, $ED=a-7$,又取 AD 的中点 F,作矩形 $EDFC_1$.

因 $BC_1^2=BE^2+EC_1^2=(a+7)^2+24^2=BC^2$,

$AC_1^2=C_1F^2+AF^2=(a-7)^2+24^2=AC^2$,

故点 C 与点 C_1 重合.

而 $S_{\triangle ABD}=48a$, $S_{\triangle CBD}=24a$, $S_{\triangle ACD}=24(a-7)$,

则 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}-S_{\triangle CBD}-S_{\triangle ACD}=168$.

第二试

一、将原方程变形得

$(12x+5)^2(12x-2)(12x+12)=660$.

令 $12x+5=t$,则 $t^2(t-7)(t+7)=660$,即

$t^4-49t^2=660$.

解得 $t^2=60$ 或 $t^2=-11$(舍去).

由此得 $t=\pm2\sqrt{15}$,即有 $12x+5=\pm2\sqrt{15}$.

因此,原方程的根为 $x_{1,2}=\frac{-5\pm2\sqrt{15}}{12}$.

二、如图 7,易知 A、B、C、D 四点共圆,B、C、N、M 四点共圆,因此,$\angle ACD=\angle ABD=\angle MCN$.

故 AC 平分 $\angle DCM$.

同理,BD 平分 $\angle CDM$.

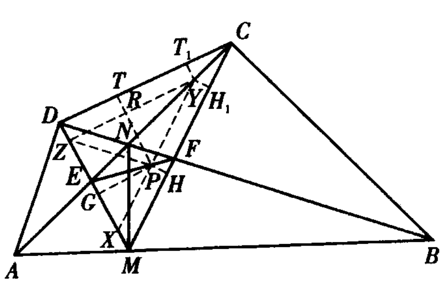

图 7

如图 7,设 $PH\perp MC$ 于点 H, $PG\perp MD$ 于点 G, $PT\perp CD$ 于点 T;过点 P 作 $XY\parallel MC$,交 MD 于点 X,交 AC 于点 Y;过点 Y 作 $YZ\parallel CD$,交 MD 于点 Z,交 PT 于点 R;再作 $YH_1\perp MC$ 于点 H_1, $YT_1\perp CD$ 于点 T_1. 由平行线及角平分线的性质得

$PH=YH_1=YT_1=RT$.

为证 $PT=PG+PH$,只须证 $PR=PG$.

由平行线的比例性质得 $\frac{EP}{EF}=\frac{EY}{EC}=\frac{EZ}{ED}$.

因此,$ZP\parallel DF$.

由于 $\triangle XYZ$ 与 $\triangle MCD$ 的对应边分别平行,且 DF 平分 $\angle MDC$,故 ZP 是 $\angle XZY$ 的平分线.

从而,$PR=PG$. 因此,所证结论成立.

三、设全部碎片中,共有三角形 a_3 个,四边形 a_4 个,……,k 边形 a_k 个(a_3, a_4, …, a_k 为非负整数). 记这些多边形的内角和为 $S_角$,于是,

$S_角=a_3\times\pi+a_4\times2\pi+\cdots+a_k(k-2)\pi$.

另一方面,矩形内部有 10 个结点,对于每个点,围绕它的多边形顶角和为 2π,10 个内结点共获得 $10\times2\pi$ 弧度;矩形边界上(不含 4 个顶点)共有 16 个结点,在每个这种结点处,各多边形的顶角在此汇合成一个平角,16 个这种结点共获得 16π 弧度;而原矩形的 4 个顶点处,共获得多边形碎片的 2π 弧度. 因此,

$S_角=20\pi+16\pi+2\pi=38\pi$.

于是,$a_3+2a_4+\cdots+(k-2)a_k=38$. ①

记这些多边形的边数和为 $S_边$.

由于每个 n 边形有 n 条边,则

$S_边=3a_3+4a_4+\cdots+ka_k$.

另一方面,在矩形内部的 45 条粘缝,每条都是两个多边形的公共边,故都计算了两次;矩形周界上的 20 条线段各被计算了一次,因此,

$S_边=2\times45+20=110$.

于是,$3a_3+4a_4+\cdots+ka_k=110$. ②

②-①得 $2(a_3+a_4+\cdots+a_k)=72$.

故 $a_3+a_4+\cdots+a_k=36$. ③

①-③得

$a_4+2a_5+3a_6+\cdots+(k-3)a_k=2$.

因所有 $a_i\in\mathbf{N}$,故

$a_6=a_7=\cdots=a_k=0$, $a_4+2a_5=2$.

所以,或者 $a_4=2$, $a_5=0$;或者 $a_4=0$, $a_5=1$.

综上,本题的解共有两种情况,即全部碎片共 36 块,其中,或含有 34 个三角形,2 个四边形;或含有 35 个三角形,1 个五边形.

(陶平生 提供)