2005 年河北省高中数学竞赛

一、选择题(每小题 6 分,共 36 分)

1. 等差数列$\{a_n\}$中,S_n 为 a_n 的前 n 项和,$S_4=1$,$S_8=4$. 则

$$a_{2002}+a_{2003}+a_{2004}+a_{2005}$$

的值为( ).

(A) $\frac{2003}{2}$ (B) $\frac{2005}{2}$ (C) $\frac{2007}{2}$ (D) $\frac{2001}{2}$

2. 函数 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数,且对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有

$$f(x+10)=f(x)+f(5-x).$$

若 $f(5)=0$,则 $f(2005)$ 的值为( ).

(A) 2 000 (B) 2 005 (C) 2 008 (D) 0

3. 下面有 3 个命题:

①三棱锥的四个面的面积分别为 S_1、S_2、S_3、S_4,则 $S_1+S_2+S_3>S_4$;

②任意四面体均有外接球;

③过两异面直线外一点有且只有一条直线与两异面直线相交.

其中,真命题的个数为( ).

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

4. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$A_1B\perp B_1C$. 则 A_1B 与平面 BB_1C_1C 所成的角等于( ).

(A) 45° (B) 60° (C) $\arctan\sqrt{2}$ (D) 90°

5. 下列各数是一次同时投掷三枚骰子时可能出现正面朝上的数字之和中的 4 个. 在一次投掷下,它们中( )出现的概率最大.

(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10

6. 用 4 种不同的颜色将一个正四面体的各个面染上颜色,每个面只能染一种颜色,不允许不染,共有( )种不同的染法.

(A) 48 (B) 36 (C) 42 (D) 47

二、填空题(每小题 6 分,共 36 分)

7. 若方程 $\frac{x^2}{|k|-2}+\frac{y^2}{5-k}=1$ 表示双曲线,则 k 的取值范围为______.

8. 从集合 A 到集合 B 的一个映射 f 称作一个满射,如果对于集合 B 的每一个元素 y,都至少有一个 $x\in A$,使 $f(x)=y$ 成立. 已知五元集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$和三元集合 $B=\{\alpha,\beta,\gamma\}$. 则从集合 A 到集合 B 的满射有______个.

9. 若 $x=\frac{1+\sqrt{5}\,\mathrm{i}}{2}$,则 $2x^3+(x+1)^2$ 的值为______.

10. 设 S 是半径为 1 的圆内接三角形的面积. 则 $4S+\frac{9}{S}$ 的最小值为______.

11. 集合 $M=\{1,2,\cdots,2005\}$,若 $X\subseteq M$,$X\neq\varnothing$,a_X 为 X 中最大数与最小数的和(若集合 X 中只有一个元素,则此元素既为最大数,又为最小数),那么,对 M 的所有非空子集 X,全部 a_X 的平均值为______.

12. A、B、C、D 是一个正四面体的 4 个顶点,每条棱长为 1 m. 一只壁虎从点 A 出发沿着各棱爬行,并遵循下列规则:在每条棱的中途不改变方向,当爬行到每个顶点处时,它在相交于该顶点的三条棱中任选一条继续爬行的可能性相同. 则该壁虎爬行 7 m,回到顶点 A 的概率为______.

三、解答题(第 17 小题 18 分,其余每小题各 15 分,共 78 分)

13. 已知 n、k 均为自然数,且满足不等式 $\frac{9}{17}<\frac{n}{n+k}<\frac{8}{15}$. 若对于确定的自然数 n,只有唯一的一个自然数 k 使得不等式成立,求符合条件的自然数 n 的最大值和最小值.

14. 已知过椭圆 C 上一点 P 与对称轴平行的直线交椭圆 C 的两准线于点 T_1、T_2,它们分别与同侧焦点 F_1、F_2 的连线交于点 Q. 求证:P、F_1、Q、F_2 四点共圆.

15. 甲和乙轮流掷一枚均匀硬币,谁先掷出正面谁获胜,此时本场结束,而且负方在下一场先掷.

(1) 求任一场比赛中,先掷的人获胜的概率;

(2) 设他们一共玩了 10 场,且甲第一场先掷,记甲赢得第 k 场的概率为 P_k. 若 $1 < 3^9(2P_k - 1) < 81$,求 k 的值.

16. 集合 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$,$0 < a_i < a_{i+1}(i = 1,2,3)$. 试问:在集合 A 中,是否一定存在两个元素 x、y,使不等式

$$(2+\sqrt{3})|x - y| < (x+1)(y+1) + xy$$

成立?若存在,请给出证明;若不存在,说明理由.

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_1 = 1,\ a_{n+1}a_n - 1 = a_n^2.$$

(1) 证明:$\sqrt{2n-1} \leq a_n \leq \sqrt{3n-2}$;

(2) 求整数 m,使得 $|a_{2\,005} - m|$ 最小.

参 考 答 案

一、**1**. A.

$S_8 - 2S_4$

$= (a_8 - a_4) + (a_7 - a_3) + (a_6 - a_2) + (a_5 - a_1)$

$= 16d = 2$.

而 $a_{2\,002} + a_{2\,003} + a_{2\,004} + a_{2\,005} - S_4$

$= 4 \times 2\,001 d = \frac{2\,001}{2}$.

所以,$a_{2\,002} + a_{2\,003} + a_{2\,004} + a_{2\,005} = \frac{2\,003}{2}$.

2. D.

由题意得 $f((5 - x) + 10) = f(5 - x) + f(x)$.

所以,$f(x + 10) = f(15 - x) = -f(x - 15)$.

从而,$f(x) = -f(x - 25) = f(x - 50)$.

故 $f(x)$ 是以 50 为周期的周期函数.

因此,$f(2\,005) = f(50 \times 40 + 5) = f(5) = 0$.

3. C.

①、②正确,③为假命题.

4. A.

如图 1,设 M 为 AB 的中点,联结 CM、B_1M. 显然,$CM \perp$ 面 AA_1B_1B.

由三垂线定理知 $B_1M \perp A_1B$. 由此得

$\triangle B_1BM \backsim \triangle A_1B_1B$.

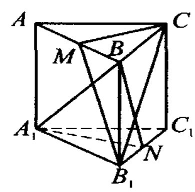

图 1

故 $A_1B_1 ∶ BB_1 = \sqrt{2} ∶ 1$.

设 N 为 B_1C_1 的中点,则 $A_1N \perp$ 面 BB_1C_1C. 所以,$\angle A_1BN$ 即为 A_1B 与平面 BB_1C_1C 所成角.

设 $BB_1 = a$,则 $A_1B_1 = \sqrt{2}a$.

所以,$A_1B = \sqrt{3}a$,$A_1N = \frac{\sqrt{6}a}{2}$.

因此,$\sin \angle A_1BN = \frac{A_1N}{A_1B} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. D.

出现 7 点的概率为 $\frac{15}{6^3}$;出现 8 点的概率为 $\frac{21}{6^3}$;出现 9 点的概率为 $\frac{25}{6^3}$;出现 10 点的概率为 $\frac{27}{6^3}$.

6. B.

用一种颜色有 $C_4^1 = 4$ 种不同的染法;用两种颜色有 $C_4^2 \times 3 = 18$ 种不同的染法;用三种颜色有 $C_4^3 \cdot C_3^1 = 12$ 种不同的染法;用四种颜色有 $C_4^4 \cdot C_2^1 = 2$ 种不同的染法. 共有 $4 + 18 + 12 + 2 = 36$ 种.

二、**7**. $-2 < k < 2$ 或 $k > 5$.

8. 150.

从五元集合到三元集合的所有映射共有 3^5 个,其中属于非满射的映射可以分成两类加以计算:一类是 B 中只有一个元素作为 A 中所有元素的像,这样的映射有 $C_3^1 = 3$ 个. 另一类是 B 中只有两个元素作为 A 中所有元素的像,这样的映射有 $C_3^2(C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4) = 90$ 个. 两类合计 93 个. 因此,从 A 到 B 的满射有 $3^5 - 93 = 150$ 个.

9. $\sqrt{5}\,\mathrm{i} - \frac{5}{2}$.

$\frac{1+\sqrt{5}\,\mathrm{i}}{2}$ 是方程 $x^2 - x + \frac{3}{2} = 0$ 的一个根,则

$2x^3 + (x+1)^2 = 2x^3 + x^2 + 2x + 1$

$= (2x+3)\left(x^2 - x + \frac{3}{2}\right) + 2x - \frac{7}{2} = \sqrt{5}\,\mathrm{i} - \frac{5}{2}$.

10. $7\sqrt{3}$.

令 $y = 4S + \frac{9}{S}$,易知它是$\left(0, \frac{3}{2}\right]$上的单调递减函数. 又因单位圆内接三角形中正三角形面积最大,且等于$\frac{3\sqrt{3}}{4}$,故 $0 < S \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{4} < \frac{3}{2}$.

所以, $y_{\min} = 4 \times \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{9}{\frac{3\sqrt{3}}{4}} = 7\sqrt{3}$.

11. 2 006.

对任意非空子集 $X \subseteq M$,定义 $X' = \{2\,006 - x \mid x \in X\}$. 显然可知亦有 $X' \subseteq M$. 于是, $f: X \to X'$ 给出了 M 的所有非空子集组成的集族上的一个一一对应. 注意到

$\max(X) + \min(X') = 2\,006$,

$\min(X) + \max(X') = 2\,006$.

可知,若 $X = X'$,则 $a_X = a_{X'} = 2\,006$;

若 $X \neq X'$,则 $a_X + a_{X'} = 2 \times 2\,006$.

故对全部非空子集 X,诸 a_X 的平均值为 2 006.

12. $\frac{182}{729}$.

设壁虎爬行 n m 回到顶点 A 的爬法有 a_n 种,爬行 7 m 回到顶点 A 的爬法为 a_7. 可以得到递归关系式 $a_n = 3^{n-1} - a_{n-1}$, $n \geqslant 2$,且易得 $a_1 = 0$. 则

$a_7 = 3^6 - (3^5 - a_5) = 3^6 - 3^5 + a_5$

$= 3^6 - 3^5 + (3^4 - a_4) = \cdots$

$= 3^6 - 3^5 + 3^4 - 3^3 + 3^2 - 3$.

所以, $a_7 = \frac{-3(1-3^6)}{1-(-3)} = \frac{3 \times 728}{4} = 3 \times 182$.

因此, $P(A) = \frac{3 \times 182}{3^7} = \frac{182}{729}$.

三、**13**. 由$\frac{9}{17} < \frac{n}{n+k} < \frac{8}{15}$,得$\frac{15}{8} < \frac{n+k}{n} < \frac{17}{9}$. 则

$$\frac{7}{8} < \frac{k}{n} < \frac{8}{9}, \quad ①$$

$$\frac{7n}{8} < k < \frac{8n}{9}. \quad ②$$

因为 k 为自然数,且对于给定的 n 来说, k 值只有一个,故$\frac{8n}{9} - \frac{7n}{8} \leqslant 2$. 解得 $n \leqslant 144$.

当 $n = 144$ 时,代入式②得 $126 < k < 128$.

所以, $k = 127$.

故 n 最大值为 144.

又由式①对 $n = 1, 2, \cdots, 9$ 试验,均不符合题设条件,得 $n > 9$.

当 $n = 10, 11, \cdots, 16$ 时,分别有

$8\frac{3}{4} < k < 8\frac{8}{9}$, $9\frac{5}{8} < k < 9\frac{7}{9}$,

$10\frac{1}{2} < k < 10\frac{2}{3}$, $11\frac{3}{8} < k < 11\frac{5}{9}$,

$12\frac{1}{4} < k < 12\frac{4}{9}$, $13\frac{1}{8} < k < 13\frac{1}{3}$,

$14 < k < 14\frac{2}{9}$,

均无符合条件的整数 k.

当 $n = 17$ 时,得 $14\frac{7}{8} < k < 15\frac{1}{9}$. 故 $k = 15$.

可见,符合条件的自然数 n 的最大值为 144,最小值为 17.

14. 如图 2,设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ (a > b > 0)$ 的焦点为

$F_1(-c, 0)$,

$F_2(c, 0)$.

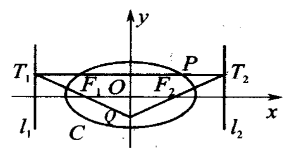

图 2

令 $P(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$,则 $T_2\left(\frac{a^2}{c}, b\sin\alpha\right)$.

由对称性知,点 Q 在 y 轴上. 设 $Q(0, -d)$,则

$\frac{d}{c} = \frac{d + b\sin\alpha}{\frac{a^2}{c}}$, $d = \frac{c^2}{b}\sin\alpha$.

令 $\triangle F_1F_2Q$ 的外接圆圆心为 $D(0, f)$,使得 $|DF_1| = |DF_2| = |DQ|$,则 $(f+d)^2 = f^2 + c^2$. 所以,

$f = \frac{b^2 - c^2\sin^2\alpha}{2b\sin\alpha}$.

下面证明 $|DP| = |DF_1|$,即证

$(f - b\sin\alpha)^2 + a^2\cos^2\alpha = f^2 + c^2$.

整理得 $-2bf\sin\alpha + b^2\sin^2\alpha + a^2\cos^2\alpha = c^2$.

将 f 代入得

$c^2\sin^2\alpha - b^2 + b^2\sin^2\alpha + a^2\cos^2\alpha = c^2$,

即　$a^2 - b^2 = c^2$.

故 P、F_1、F_2、Q 四点共圆.

15. (1) 任一场比赛中,先掷的人获胜的概率为

$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \cdots = \frac{2}{3}$.

(2) 由(1)知后掷的人获胜的概率为

$1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

根据已知 $P_1=\frac{2}{3}$，对 $2\leq k\leq 10$，有

$$P_k=\frac{1}{3}P_{k-1}+\frac{2}{3}(1-P_{k-1})=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}P_{k-1}.$$

所以，$P_k-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}\left(P_{k-1}-\frac{1}{2}\right)$.

故 $P_k=\frac{1}{2}+\frac{(-1)^{k-1}}{3^{k-1}}\left(P_1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{(-1)^{k-1}}{2\times 3^k}$.

因为 $1<3^9(2P_k-1)<81$，所以，

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times 3^9}<P_k<\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times 3^5}.$$

将 P_k 代入并化简得 $\frac{1}{3^9}<\frac{(-1)^{k-1}}{3^k}<\frac{1}{3^5}$.

所以，k 为奇数，且 $5<k<9$. 故 $k=7$.

16. 这样的两个数存在.

不妨设 $x>y$，则原不等式变形为

$$\frac{x-y}{(x+1)(y+1)+xy}<2-\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow\frac{x(y+1)-y(x+1)}{(x+1)(y+1)+xy}<2-\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(1+\frac{1}{y}\right)-\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)+1}<2-\sqrt{3}.$$

令 $\alpha_i=\arctan\left(1+\frac{1}{a_i}\right)$，$i=1,2,3,4$.

由 $a_i>0$，知 $\alpha_i\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$.

将 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 分成三等份，由抽屉原理可知，在 $\alpha_i(i=1,2,3,4)$ 中至少有两个数之差的绝对值小于 $\frac{\pi}{12}$. 不妨设 $0<\alpha_j-\alpha_i<\frac{\pi}{12}$，则

$$\tan(\alpha_j-\alpha_i)=\frac{\tan\alpha_j-\tan\alpha_i}{\tan\alpha_j\cdot\tan\alpha_i+1}<\tan\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}.$$

取 $y=a_i$，$x=a_j$ 即可.

17. (1) 由已知易得 $\{a_n\}$ 为递增数列，且各项均为正. 因为 $a_{n+1}a_n-1=a_n^2$，所以，当 $k\geq 2$ 时，

$$a_k=a_{k-1}+\frac{1}{a_{k-1}}.$$

由此得

$$a_k^2=\left(a_{k-1}+\frac{1}{a_{k-1}}\right)^2=a_{k-1}^2+\frac{1}{a_{k-1}^2}+2>a_{k-1}^2+2,$$

即 $a_k^2-a_{k-1}^2>2$.

则 $a_n^2-a_1^2=\sum_{k=2}^{n}(a_k^2-a_{k-1}^2)>2(n-1)$，即

$$a_n^2>a_1^2+2(n-1)=2n-1.$$

故 $a_n>\sqrt{2n-1}\ (n>1)$.

又 $a_n^2-a_1^2=\sum_{k=2}^{n}(a_k^2-a_{k-1}^2)$

$$=2(n-1)+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{a_{k-1}^2}$$

$$\leq 2(n-1)+(n-1)\times 1=3n-3,$$

即 $a_n^2\leq 3n-3+a_1^2=3n-2$.

故 $a_n\leq\sqrt{3n-2}$.

综合得 $\sqrt{2n-1}\leq a_n\leq\sqrt{3n-2}$.

(2) 由 (1) 的结果知 $\sqrt{4\,009}\leq a_{2\,005}\leq\sqrt{6\,013}$，

即 $63<a_{2\,005}<78$.

为进一步估计 $a_{2\,005}$ 的值，引入数列 $\{b_n\}$，使得 $a_n^2=2n-1+b_n$.

由 (1) 知，当 $n>1$ 时，有 $b_n>0$.

于是，等式 $a_{n+1}^2=a_n^2+2+\frac{1}{a_n^2}$ 可改写为

$$2n+1+b_{n+1}=2n-1+b_n+2+\frac{1}{2n-1+b_n}.$$

由此得

$$b_{n+1}=b_n+\frac{1}{2n-1+b_n}\leq b_n+\frac{1}{2n-1}.$$

通过归纳推出

$$b_{n+1}\leq b_1+1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-3}+\frac{1}{2n-1}.$$

由于 $b_1=0$，所以，

$$b_{2\,005}\leq 1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{4\,005}+\frac{1}{4\,007}.$$

为了估计该式右端之值，将其分段如下：

$$b_{2\,005}\leq 1+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{25}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{243}+\cdots+\frac{1}{727}\right)+\left(\frac{1}{729}+\cdots+\frac{1}{2\,185}\right)+\left(\frac{1}{2\,187}+\cdots+\frac{1}{4\,007}\right).$$

上式右端第一个括号中有 3 个加项，最大项为 $\frac{1}{3}$；第二个括号中有 9 个加项，最大项为 $\frac{1}{9}$；……；第六个括号中有 729 个加项，最大项为 $\frac{1}{729}$；最后，第七个括号中有 911 个加项，最大项为 $\frac{1}{2\,187}$. 所以，$b_{2\,005}<8$. 结合 $a_n^2=2n-1+b_n$，得

$$a_{2\,005}^2<4\,010-1+8<4\,032.25=63.5^2.$$

因此，$63<a_{2\,005}<63.5$. 故 $m=63$.

(杨春宏　提供)