# 2000 年河北省高中数学竞赛

一、选择题(满分 36 分,每小题 6 分)

1. 当 $0<x\leqslant 1$ 时,下列不等式正确的是(　　).

(A) $\frac{\sin x}{x}<\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\leqslant\frac{\sin x^2}{x^2}$

(B) $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2<\frac{\sin x}{x}\leqslant\frac{\sin x^2}{x^2}$

(C) $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2<\frac{\sin x^2}{x^2}\leqslant\frac{\sin x}{x}$

(D) $\frac{\sin x^2}{x^2}\leqslant\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2<\frac{\sin x}{x}$

2. 在圆 $x^2+y^2-5x=0$ 内,过点 $\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$ 有三条弦的长度成等比数列. 则其公比的取值范围是(　　).

(A) $\left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right]$　　(B) $\left[\sqrt[3]{\frac{4}{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right]$

(C) $\left[\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$　　(D) $\left(\frac{2}{\sqrt[3]{5}},\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$

3. 已知 $a$、$b\in\mathbf{R}^+$, $m$、$n\in\mathbf{R}$, $m^2n^2>a^2m^2+b^2n^2$, 令 $M=\sqrt{m^2+n^2}$, $N=a+b$. 则 M 与 N 的关系是(　　).

(A) $M>N$　　(B) $M<N$

(C) $M=N$　　(D) 不能确定

4. 当 $a>1$ 时,若不等式

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{7}{12}\left(\log_{a+1}x-\log_a x+1\right)$$

对于不小于 2 的正整数 $n$ 恒成立,则 $x$ 的范围是(　　).

(A) $2<x<\frac{29}{17}$　　(B) $0<x<1$

(C) $0<x<4$　　(D) $x>1$

5. 如果复数 $z$ 满足 $|z|=1$, $A(-1,0)$、$B(0,-1)$ 是复平面上两点,那么函数 $f(z)=|(z+1)(\bar{z}-\mathrm{i})|$ 取最大值时,复平面上以 Z、A、B 三点为顶点的图形是(　　).

(A) 等边三角形　(B) 等腰三角形

(C) 直角三角形　(D) 等腰直角三角形

6. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 1, O 为底面 ABCD 的中心, M、N 分别是棱 $CC_1$ 和 $A_1D_1$ 的中点. 则四面体 $O-MNB_1$ 的体积是(　　).

(A) $\frac{1}{6}$　(B) $\frac{5}{48}$　(C) $\frac{1}{8}$　(D) $\frac{7}{48}$

二、填空题(满分 54 分,每小题 9 分)

1. 设 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ ($x$、$y\in\mathbf{R}$). 则 $F(x,y)=\frac{x+1}{y}$ 的最小值为______.

2. 设 $|z_1|=|z_2|=a$ $(a\neq 0)$, 且 $z_1+z_2=m+m\mathrm{i}$, 其中 $m$ 为非零实数. 则 $z_1^3\cdot z_2^3$ 的值是______.

3. 已知 $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(3^x+1)+\frac{1}{2}abx$ 为偶函　, $g(x)=2^x+\frac{a+b}{2^x}$ 为奇函　,其中 $a$、$b\in\mathbf{C}$. 则 $a+a^2+a^3+\cdots+a^{2000}+b+b^2$

$+b^3+\cdots+b^{2\,000}=$ ______.

4. 数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1=1, a_{n+1}>a_n$, 且 $a_{n+1}^2+a_n^2+1=2(a_{n+1}a_n+a_{n+1}+a_n)$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{na_n}=$ ______.

5. 已知函数

$f(x)=4\pi\arcsin x-[\arccos(-x)]^2$

的最大值为 M, 最小值为 $m$. 则 $M-m=$ ______.

6. 如图 1, 若 ABC 的三边长分别为 $n+x, n+2x, n+3x$, 且 BC 边上的高 AD 长为 $n$, 其中 $n$ 为正整数, 且 $0<x\leqslant 1$. 则满足上述条件的三角形有 ______ 个.

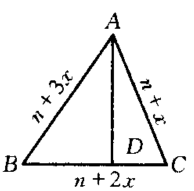

图 1

三、(满分 20 分) 设 $y^2=2^{n+1}x\ (n=1,2,3,\cdots,2\,000)$ 为一族抛物线, 分别过每条抛物线的焦点作倾斜角为 45° 的直线, 并截该抛物线得弦 $A_nB_n\ (n=1,2,\cdots,2\,000)$, 将各弦绕其对应准线旋转 90°得到 2 000 个旋转面. 试求所有这些旋转面面积之和.

四、(满分 20 分) 在 ABC 中, 若 $\frac{\cos A}{\sin B}+\frac{\cos B}{\sin A}=2$, 且 ABC 的周长为 12. 求其面积的最大可能值.

五、(满分 20 分) 已知函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图像过点 $(-1,0)$. 问是否存在常数 $a$、$b$、$c$, 使不等式 $x\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{2}(1+x^2)$ 对一切实 $x$ 都成立? 若存在, 求出 $a$、$b$、$c$ 的值; 若不存在, 说明理由.

# 参考答案

一、1. (B).

因为 $0<x\leqslant 1<\frac{\pi}{2}$, 故有 $0<\sin x<x$, 即 $0<\frac{\sin x}{x}<1$. 所以, $\frac{\sin x}{x}>\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$. 又因为 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上是减函数, 而 $0<x^2\leqslant x\leqslant 1<\frac{\pi}{2}$, 所以 $\frac{\sin x^2}{x^2}\geqslant\frac{\sin x}{x}$.

2. (C).

易得圆 $x^2+y^2-5x=0$ 的直径为 5, 所以过点 $\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$ 的弦长最大是 5. 又过点 $\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$ 且垂直于过该点的直径弦长最小, 其长为 4. 由 $a_3=a_1q^2$ 得 $q=\sqrt{\frac{a_3}{a_1}}$, 而 $4\leqslant a_3\leqslant 5$, $4\leqslant a_1\leqslant 5$, 所以,

$$q=\sqrt{\frac{a_3}{a_1}}\leqslant\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}, \text{且 } q\geqslant\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

3. (A).

显然 $m^2n^2\neq 0$. 不等式两边同除以 $m^2n^2$, 得 $\frac{a^2}{n^2}+\frac{b^2}{m^2}<1$. 此不等式两边再同乘 $m^2+n^2$, 得

$$m^2+n^2>(m^2+n^2)\left(\frac{a^2}{n^2}+\frac{b^2}{m^2}\right)$$
$$=a^2+b^2+\frac{m^2}{n^2}a^2+\frac{n^2}{m^2}b^2$$
$$\geqslant a^2+b^2+2ab=(a+b)^2.$$

4. (D).

设 $f(n)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}$. 则

$$f(n+1)=f(n)+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}$$
$$=f(n)+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}$$
$$>f(n).$$

所以, $f(n)$ 为增函 , 故 $f(n)\geqslant f(2)$.

又已知不等式恒成立, 所以,

$$\frac{7}{12}(\log_{a+1}x-\log_a x+1)<\frac{7}{12},$$

即 $\log_{a+1}x<\log_a x$.

由于 $a>1$，则 $x>1$.

5.(B).

令 $z=\cos\theta+i\sin\theta$，则

$$(z+1)(\bar{z}-i)$$
$$=(1+\cos\theta+i\sin\theta)[\cos\theta-(1+\sin\theta)i]$$
$$=\cos\theta(1+\cos\theta)+\sin\theta(1+\sin\theta)$$
$$+i[\sin\theta\cdot\cos\theta-(1+\cos\theta)(1+\sin\theta)]$$
$$=(\sin\theta+\cos\theta+1)-i(1+\sin\theta+\cos\theta).$$

所以

$$f(z)=\sqrt{(1+\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta+\cos\theta+1)^2}$$
$$=\sqrt{2\left[1+\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right]^2}.$$

当 $\theta=2k\pi+\frac{\pi}{4}$ $(k\in\mathbf{Z})$时，$f(z)$最大，最大值为 $2+\sqrt{2}$. 此时 $z=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$. 而 A、B、Z 三点的位置如图 2 所示，显然，

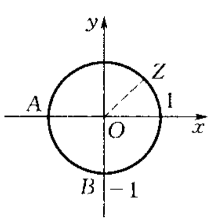


图 2

ABZ为等腰三角形，但不是等边的，也不是直角的.

6.(D).

如图3，过 O 作AB的平行线分别与棱AD、BC 交于E、F，连结BE，并取BF的中点Q. 易知 OQ ∥ BE ∥ $B_1N$. 所以，OQ ∥ 平面 $MNB_1$. 故 $V_{O-MNB_1}=V_{Q-MNB_1}=V_{N-MQB_1}$. 又 $S_{\triangle MQB_1}=1-\frac{1}{4}-\frac{3}{16}-\frac{1}{8}=\frac{7}{16}$，所以，$V_{O-MNB_1}=\frac{7}{48}$.

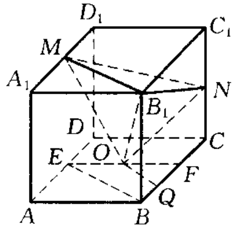


图 3

二、1. $\frac{3}{4}$.

原式变形为 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$. 令 $x-1=\cos\theta$, $y-1=\sin\theta$，则 $x=1+\cos\theta$, $y=1+\sin\theta$. 所以，$\frac{x+1}{y}=\frac{2+\cos\theta}{1+\sin\theta}$，设其为 $\mu$. 则 $\mu+\mu\sin\theta=2+\cos\theta$，即 $\mu\sin\theta-\cos\theta=2-\mu$. 所以，

$$\sqrt{\mu^2+1}\sin(\theta-\varphi)=2-\mu.$$

$$\left(\text{其中，}\cos\varphi=\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2+1}},\ \sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{\mu^2+1}}\right)$$

$$\sin(\theta-\varphi)=\frac{2-\mu}{\sqrt{\mu^2+1}},\quad\left|\frac{2-\mu}{\sqrt{\mu^2+1}}\right|\leqslant 1.$$

解得 $\mu\geqslant\frac{3}{4}$，即F$(x,y)$的最小值为 $\frac{3}{4}$.

2. $-a^6 i$.

设 $z_1=a(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, $z_2=(\cos\beta+i\sin\beta)$. 则据已知条件得

$$\begin{cases}\cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{m}{a},\\ \sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{m}{a},\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\dfrac{m}{a},\\ 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\dfrac{m}{a}.\end{cases}$$

所以，$\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=1$, $\alpha+\beta=2k\pi+\frac{\pi}{2}$.

故 $z_1\cdot z_2=a^2 i$, $(z_1\cdot z_2)^3=-a^6 i$.

3. $-2$.

由已知 $f(-x)=f(x)$, $g(-x)=-g(x)$得

$$\log_{\frac{1}{3}}(3^{-x}+1)-\frac{1}{2}abx$$
$$=\log_{\frac{1}{3}}(3^x+1)+\frac{1}{2}abx. \quad ①$$

$$2^{-x}+\frac{a+b}{2^{-x}}=-\left(2^x+\frac{a+b}{2^x}\right). \quad ②$$

化简，由式①得 $ab=1$，由式②得 $a+b=-1$. 故 $a$、$b$ 是 程 $x^2+x+1=0$ 的一对共轭虚根，即 1 的虚立 根. 则

$$a+a^2+a^3+\cdots+a^{1999}+a^{2000}+b+b^2$$

$+b^{3}+\cdots+b^{1999}+b^{2000}$

$=a^{1999}+a^{2000}+b^{1999}+b^{2000}$

$=a+a^{2}+b+b^{2}=-1-1=-2.$

4. $\frac{1}{3}$.

由已知得

$1+a_{n+1}^{2}+a_{n}^{2}+2a_{n+1}a_{n}-2a_{n+1}-2a_{n}$

$=4a_{n+1}a_{n}$,

即 $(a_{n+1}+a_{n}-1)^{2}=4a_{n}a_{n+1}$.

$\because a_{1}=1, a_{n+1}>a_{n}$,

$\therefore a_{n+1}+a_{n}-1>0$.

于是, $a_{n+1}+a_{n}-1=2\sqrt{a_{n}a_{n+1}}$

或 $(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_{n}})^{2}=1$,

即 $\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_{n}}=1$.

再由 $a_{1}=1$,知等差数列 $\{\sqrt{a_{n}}\}$的通项为 $\sqrt{a_{n}}=n$. 于是, $a_{n}=n^{2}$. 从而,

$S_{n}=1^{2}+2^{2}+\cdots+n^{2}=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_{n}}{na_{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^{2}+3n+1}{6n^{2}}=\frac{1}{3}$.

5. $3\pi^{2}$.

$\because \arccos(-x)=\pi-\arccos x$,

$\arcsin x=\frac{\pi}{2}-\arccos x$,

$\therefore f(x)=4\pi\left(\frac{\pi}{2}-\arccos x\right)-(\pi-\arccos x)^{2}$

$=-(\arccos)^{2}-2\pi\arccos x+\pi^{2}$

$=-(\arccos x+\pi)^{2}+2\pi^{2}$.

$\therefore f_{\max}(x)=\pi^{2}, f_{\min}(x)=-2\pi^{2}$,

故 $M-m=3\pi^{2}$.

6. 12.

记 $a=n+x, b=n+2x, c=n+3x, s=\frac{1}{2}(a+b+c)$. 由海伦公式及一般面积公式得

$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{1}{2}n(n+2x)$.

整理得 $12x=n$.

而 $0<x=\frac{n}{12}\leqslant 1$,

故 $0<n\leqslant 12$,

即 $n$ 恰有 12 种可能(相应给出 $x$ 值).

因此,所求三角形个数为 12.

三、第 $n$ 条抛物线的方程为 $y^{2}=2^{n+1}x=2\times 2^{n}x$, 故其焦点坐标为 $(2^{n-1},0)$. 过此焦点, 倾斜角为 45°的直线方程为

$y=x-2^{n-1}$.

通过方程组

$$\begin{cases} y^{2}=2^{n+1}x, & ① \\ y=x-2^{n-1} & ② \end{cases}$$

可求弦长.

将②代入①并整理得

$x^{2}-(2^{n}+2^{n+1})x+2^{2n-2}=0$.

有 $x_{1}+x_{2}=2^{n}+2^{n+1}, x_{1}x_{2}=2^{2n-2}$.

$(x_{1}-x_{2})^{2}=(x_{1}+x_{2})^{2}-4x_{1}x_{2}=8\times 2^{2n}$,

$(y_{1}-y_{2})^{2}=[(x_{1}-2^{n-1})-(x_{2}-2^{n-1})]^{2}$

$=(x_{1}-x_{2})^{2}=8\times 2^{2n}$.

故弦长 $d_{n}=\sqrt{(x_{1}-x_{2})^{2}+(y_{1}-y_{2})^{2}}$

$=\sqrt{16\times 2^{2n}}=2^{n+2}$.

旋转面是 $\frac{1}{4}S_{圆台侧}$,

$S_{圆台侧}=\pi(r_{上}+r_{下})l$.

如图 4, 由抛物线定义得

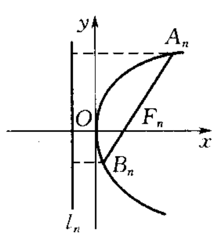

图 4

$r_{上}+r_{下}$

$=A_{n}F_{n}+B_{n}F_{n}$

$=A_{n}B_{n}=d_{n}$.

$\therefore S_{圆台侧}=\pi d_{n}^{2}$

$=\pi(2^{n+2})^{2}$

$=16\pi\times 2^{2n}$.

$\therefore \frac{1}{4}S_{圆台侧}$

$=4\pi\times 2^{2n}$.

各旋转面面积之和为

$4\pi(2^2+2^4+\cdots+2^{4000})$

$=4\pi\cdot\frac{2^2[(2^2)^{2000}-1]}{2^2-1}$

$=\frac{16}{3}\pi(2^{4000}-1)$.

四、由已知得

$\sin A\cdot\cos A+\sin B\cdot\cos B=2\sin A\cdot\sin B$,

即 $\sin A(\cos A-\sin B)+\sin B(\cos B-\sin A)=0$.

$\sin A[\sin(90^\circ-A)-\sin B]+\sin B[\sin(90^\circ-B)-\sin A]$

$=2\sin\frac{90^\circ-A-B}{2}\left[\sin A\cdot\cos\left(45^\circ-\frac{A-B}{2}\right)+\sin B\cdot\cos\left(45^\circ+\frac{A-B}{2}\right)\right]$

$=2\sin\frac{90^\circ-A-B}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left[\cos\frac{A-B}{2}\cdot(\sin A+\sin B)+\sin\frac{A-B}{2}\cdot(\sin A-\sin B)\right]$

$=0$.

又 $\cos\frac{A-B}{2}\cdot(\sin A+\sin B)+\sin\frac{A-B}{2}\cdot(\sin A-\sin B)$

$=2\cos^2\frac{A-B}{2}\sin\frac{A+B}{2}+2\cos\frac{A+B}{2}\cdot\sin^2\frac{A-B}{2}>0$,

故 $\sin\frac{90^\circ-A-B}{2}=0$.

则 $90^\circ-\angle A-\angle B=0$, $\angle A+\angle B=90^\circ$,

即 $\triangle ABC$ 为直角三角形.

设 A、B、C 分别对应的边为 $a$、$b$、$c$，依题意得

$a+b+\sqrt{a^2+b^2}=12$.

$\because a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$, $a^2+b^2\geqslant 2ab$,

$\therefore 12=a+b+\sqrt{a^2+b^2}\geqslant 2\sqrt{ab}+\sqrt{2ab}$,

即 $ab\leqslant 36(2-\sqrt{2})^2$.

则 $S=\frac{1}{2}ab\leqslant 18(2-\sqrt{2})^2=36(3-2\sqrt{2})$,

即 $S_{\max}=36(3-2\sqrt{2})$.

五、假设存在符合条件的 $a$、$b$、$c$.

$\because f(x)$ 的图像过 $(-1,0)$,

$\therefore f(-1)=0$，即 $a-b+c=0$.

又 $\because x\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{2}(1+x^2)$ 对一切实数 $x$ 都成立，令 $x=1$，则

$1\leqslant a+b+c\leqslant\frac{1}{2}(1+1^2)=1$.

$\therefore a+b+c=1$.

$\therefore b=\frac{1}{2}$, $a+c=\frac{1}{2}$.

$\therefore f(x)=ax^2+\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}-a\right)$.

由 $\begin{cases} f(x)\geqslant x, \\ f(x)\leqslant\frac{1}{2}(1+x^2) \end{cases}$

得 $\begin{cases} ax^2-\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}-a\right)\geqslant 0, & ① \\ \left(a-\frac{1}{2}\right)x^2+\frac{1}{2}x-a\leqslant 0. & ② \end{cases}$

据题意，对于任意实数 $x$，①与②都成立.

对于①，若 $a=0$，则 $x\leqslant 1$，不合题意；若 $a>0$，欲使①的解集为 $\mathbf{R}$，则需

$\begin{cases} a>0, \\ \Delta\leqslant 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a>0, \\ \frac{1}{4}-4a\left(\frac{1}{2}-a\right)\leqslant 0. \end{cases}$

解之得 $a=\frac{1}{4}$.

对于 $a=\frac{1}{4}$，再考虑②. 把 $a=\frac{1}{4}$ 代入②得

$x^2-2x+1\geqslant 0$.

其解集为 $\mathbf{R}$.

所以，存在满足条件的 $a$、$b$、$c$，其中，$a=c=\frac{1}{4}$, $b=\frac{1}{2}$.

（冀 竞 提供）