第 29 届中国数学奥林匹克

江苏　南京

第一天

(2013 年 12 月 21 日　8 : 00 – 12 : 30)

1. 如图 1, 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $AB > AC$, $\angle BAC$ 的平分线与边 BC 交于点 D, 点 E、F 分别在边 AB、AC 上, 使得 B、C、F、E 四点共圆. 证明: $\triangle DEF$ 的外接圆圆心与 $\triangle ABC$ 的内切圆圆心重合的充分必要条件是 $BE + CF = BC$.

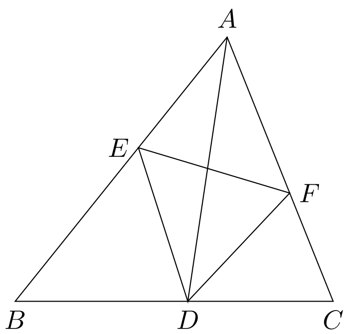

图 1

2. 对大于 1 的整数 n, 定义集合

$$D(n) = \{a - b \mid n = ab, a, b \text{为正整数}, a > b\}.$$

证明: 对任意大于 1 的整数 k, 总存在 k 个互不相同且大于 1 的整数 $n_1, n_2, \cdots, n_k$, 使得 $D(n_1) \cap D(n_2) \cap \cdots \cap D(n_k)$ 的元素个数不小于 2.

3. 证明: 存在唯一的函数 $f : \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ 满足

$$f(1) = f(2) = 1,$$

$$f(n) = f\big(f(n-1)\big) + f\big(n - f(n-1)\big),\ n = 3, 4, \cdots,$$

并对每个整数 $m \geqslant 2$, 求 $f(2^m)$ 的值.

第 29 届中国数学奥林匹克

江苏 南京

第二天

(2013 年 12 月 22 日 8 : 00 – 12 : 30)

4. 对整数 $n>1$, 设 $n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_l^{\alpha_l}$ 是 n 的标准分解式. 定义

$$\omega(n)=l,\ \Omega(n)=\alpha_1+\cdots+\alpha_l.$$

是否对任意给定的正整数 k 及正实数 α,β, 总存在整数 $n>1$, 使得

$$\frac{\omega(n+k)}{\omega(n)}>\alpha,\ \frac{\Omega(n+k)}{\Omega(n)}<\beta?$$

证明你的结论.

5. 设集合 $X=\{1,2,\cdots,100\}$, 函数 $f:X\to X$ 同时满足

(1) 对任意 $x\in X$, 都有 $f(x)\neq x$;

(2) 对 X 的任意一个 40 元子集 A, 都有 $A\cap f(A)\neq\varnothing$.

求最小的正整数 k, 使得对任意满足上述条件的函数 f, 都存在 X 的 k 元子集 B, 使得 $B\cup f(B)=X$.

注: 对 X 的子集 T, 定义 $f(T)=\{x\mid \text{存在}\, t\in T, \text{使得}\, x=f(t)\}$.

6. 对于非空数集 S,T, 定义

$$S+T=\{s+t\mid s\in S,\, t\in T\},\ 2S=\{2x\mid x\in S\},$$

设 n 为正整数, A,B 均为 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的非空子集. 证明: 存在 $A+B$ 的子集 D, 使得

$$D+D\subseteq 2(A+B),\ \text{且}\ |D|\geqslant\frac{|A|\cdot|B|}{2n}.$$

这里 $|X|$ 表示有限集 X 的元素个数.