2003年IMO中国国家集训队选拔考试

一、在锐角 $\triangle ABC$ 中, AD 是 $\angle A$ 的内角平分线,点 D 在边 BC 上,过点 D 分别作 $DE\perp AC$、$DF\perp AB$,垂足分别为 E、F,连结 BE、CF,它们相交于点 H, $\triangle AFH$ 的外接圆交 BE 于点 G. 求证:以线段 BG、GE、BF 组成的三角形是直角三角形.

二、设 $A\subseteq\{0,1,2,\cdots,29\}$,满足:对任何整数 k 及 A 中任意数 a、b(a、b 可以相同), $a+b+30k$ 均不是两个相邻整数之积. 试定出所有元素个数最多的 A.

三、设 $A\subset\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_i\in\mathbf{R}, i=1,2,\cdots,n\}$, A 是有限集. 对任意的 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in A$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in A$,定义:

$$\gamma(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(|a_1-b_1|,|a_2-b_2|,\cdots,|a_n-b_n|),$$

$$D(A)=\{\gamma(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\mid\boldsymbol{\alpha}\in A,\boldsymbol{\beta}\in A\}.$$

试证: $|D(A)|\geq|A|$.

四、求所有正整数集上到实数集的函数 f,使得

(1) 对任意 $n\geq1$, $f(n+1)\geq f(n)$;

(2) 对任意 m、n, $(m,n)=1$,有

$$f(mn)=f(m)f(n).$$

五、设 $A=\{1,2,\cdots,2\,002\}$, $M=\{1\,001,2\,003,3\,005\}$. 对 A 的任一非空子集 B,当 B 中任意两数之和不属于 M 时,称 B 为 M-自由集. 如果 $A=A_1\cup A_2$, $A_1\cap A_2=\varnothing$,且 A_1、A_2 均为 M-自由集,那么,称有序对 (A_1,A_2) 为 A 的一个 M-划分. 试求 A 的所有 M-划分的个数.

六、设实数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_0=0$, $x_2=\sqrt[3]{2}x_1$, x_3 是正整数,且 $x_{n+1}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}x_n+\sqrt[3]{4}x_{n-1}+\frac{1}{2}x_{n-2}$, $n\geq2$. 问:这类数列中最少有多少个整数项?

参考答案

一、如图1,过点 D 作 $DG'\perp BE$,垂足为 G'. 由勾股定理知 $BG'^2-G'E^2=BD^2-DE^2=BD^2-DF^2=BF^2$. 所以,线段 BG'、$G'E$、BF 组成的三角形是以 BG 为斜边的直角三角形.

下面证明 G' 即为 G,即只须证 A、F、G'、H 四点共圆.

如图1,连结 EF,则 AD 垂直平分 EF. 设 AD 交 EF 于点 Q,作 $EP\perp BC$,垂足为 P,连结 PQ 并延长交 AB 于点 R,连结 RE.

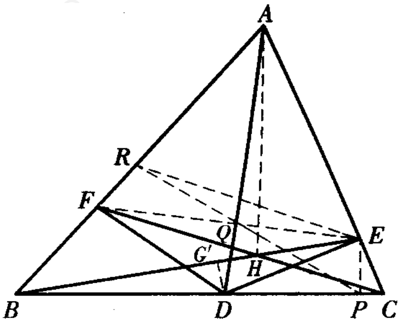

图1

因为 Q、D、P、E 四点共圆,所以,

$\angle QPD=\angle QED$.

又 A、F、D、E 四点共圆,所以,

$\angle QED=\angle FAD$.

于是, A、R、D、P 四点共圆.

又 $\angle RAQ=\angle DAC$, $\angle ARQ=\angle ADC$,于是,

$\triangle ARQ\backsim\triangle ADC$, $\frac{AR}{AQ}=\frac{AD}{AC}$.

从而, $AR\cdot AC=AQ\cdot AD=AF^2=AF\cdot AE$,即

$\frac{AR}{AF}=\frac{AE}{AC}$.

所以, $RE\parallel FC$, $\angle AFC=\angle ARE$.

因为 A、R、D、P 四点共圆, G'、D、P、E 四点共圆,则 $BG'\cdot BE=BD\cdot BP=BR\cdot BA$. 故 A、R、G'、E 四点共圆. 所以,

$\angle AG'E=\angle ARE=\angle AFC$.

因此, A、F、G'、H 四点共圆.

二、所求 A 为 $\{3l+2\mid 0\leq l\leq 9\}$.

设 A 满足题中条件且 $|A|$ 最大.

因为两个相邻整数之积被 30 除,余数为 0,2,6,12,20,26. 则对任意 $a\in A$,有

$2a\not\equiv 0,2,6,12,20,26 \pmod{30}$,

即 $a\not\equiv 0,1,3,6,10,13,15,16,18,21,25,28 \pmod{30}$.

因此, $A\subseteq\{2,4,5,7,8,9,11,12,14,17,19,20,$

22,23,24,26,27,29}.

后一集合可分拆成下列10个子集的并,其中每一个子集至多包含 A 中一个元素:

{2,4},{5,7},{8,12},{11,9},{14,22},{17,19},{20},{23,27},{26,24},{29}.

故 $|A|\leq 10$.

若 $|A|=10$,则每个子集恰好包含 A 中一个元素,因此,$20\in A$,$29\in A$.

由 $20\in A$ 知 $12\notin A$,$22\notin A$,从而,$8\in A$,$14\in A$. 这样,$4\notin A$,$24\notin A$,因此,$2\in A$,$26\in A$.

由 $29\in A$ 知 $7\notin A$,$27\notin A$,从而,$5\in A$,$23\in A$. 这样,$9\notin A$,$19\notin A$,因此,$11\in A$,$17\in A$.

综上有 $A=\{2,5,8,11,14,17,20,23,26,29\}$,此 A 确实满足要求.

三、对 n 和集 A 的元素个数用归纳法.

如果 A 恰有一个元素,则 $D(A)$ 仅包含一个零向量. 结论成立.

如果 $n=1$,设 $A=\{a_1<a_2<\cdots<a_m\}$,则

$\{0,a_2-a_1,a_3-a_1,\cdots,a_m-a_1\}\subseteq D(A)$.

因此,$|D(A)|\geq|A|$.

假定 $|A|>1$ 和 $n>1$,定义 $B=\{(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})\mid$ 存在 x_n 使得 $(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n)\in A\}$.

由归纳假设 $|D(B)|\geq|B|$.

对每一个 $b\in B$,令 $A_b=\{x_n\mid(b,x_n)\in A\}$,$a_b=\max\{x\mid x\in A_b\}$,$C=A\setminus\{(b,a_b)\mid b\in B\}$. 则

$|C|=|A|-|B|$.

因为 $|C|<|A|$,由归纳假设 $|D(C)|\geq|C|$.

另一方面,$D(A)=\bigcup\limits_{D\in D(B)}\{(D,|a-a'|)\mid d(b,b')=D$,且 $a\in A_b$,$a'\in A_{b'}\}$.

类似地,再令 $C_b=A_b\setminus\{a_b\}$,有

$D(C)=\bigcup\limits_{D\in D(B)}\{(D,|c-c'|)\mid d(b,b')=D$,且 $c\in C_b$,$c'\in C_{b'}\}$.

注意到,对每一对 b、$b'\in B$,最大差 $|a-a'|$($a\in A_b$,$a'\in A_{b'}$)一定是 $a=a_b$ 或 $a'=a_{b'}$. 于是,这个最大差不出现在 $\{|c-c'|\mid c\in C_b,c'\in C_{b'}\}$ 中.

因此,对任何的 $D\in D(B)$,集合

$\{|c-c'|\mid d(b,b')=D$ 且 $c\in C_b$ 和 $c'\in C_{b'}\}$

并不包含集合

$\{|a-a'|\mid d(b,b')=D$ 且 $a\in A_b$ 和 $a'\in A_{b'}\}$

中的最大元,前者是后者的真子集.

由此结论可知

$|D(C)|\leq\sum\limits_{D\in D(B)}(|\{|a-a'|\mid d(b,b')=D$ 且 $a\in A_b$ 和 $a'\in A_{b'}\}|-1)\leq|D(A)|-|D(B)|$.

故 $|D(A)|\geq|D(B)|+|D(C)|\geq|B|+|C|=|A|$.

四、显然,$f=0$ 是问题的解.

设 $f\neq 0$,则 $f(1)\neq 0$. 否则,对任意正整数 n 有 $f(n)=f(1)f(n)=0$,矛盾. 于是得 $f(1)=1$.

由(1)可知 $f(2)\geq 1$. 下面分两种情况讨论:

(i) $f(2)=1$,则可证

$f(n)=1\ (\forall n)$. ①

事实上,由(2)知

$f(6)=f(2)f(3)=f(3)$.

记 $f(3)=a$,则 $a\geq 1$.

由于 $f(3)=f(6)=a$,利用(1)可知 $f(4)=f(5)=a$. 利用(2)知,对任意奇数 p 有 $f(2p)=f(2)f(p)=f(p)$.

再由此及(1)可证

$f(n)=a\ (\forall n\geq 3)$. ②

事实上,

$a=f(3)=f(6)=f(5)=f(10)=f(9)=f(18)$

$=f(17)=f(34)=f(33)=\cdots$.

由式②和(2)得 $a=1$,即 $f=1$.

故式①成立.

(ii) $f(2)>1$. 设 $f(2)=2^a$,其中 $a>0$.

令 $g(x)=f^{\frac{1}{a}}(x)$,则 $g(x)$ 满足(1)、(2),且 $g(1)=1$,$g(2)=2$.

设 $k\geq 2$,则由(1)得

$2g(2^{k-1}-1)=g(2)g(2^{k-1}-1)=g(2^k-2)$

$\leq g(2^k)\leq g(2^k+2)=g(2)g(2^{k-1}+1)$

$=2g(2^{k-1}+1)$;

若 $k\geq 3$,则

$2^2g(2^{k-2}-1)=2g(2^{k-1}-2)$

$\leq g(2^k)\leq 2g(2^{k-1}+2)=2^2g(2^{k-2}+1)$.

依此类推,用归纳法得

$2^{k-1}\leq g(2^k)\leq 2^{k-1}g(3)\ (\forall k\geq 2)$. ③

同样,对任意 $m\geq 3$,$k\geq 2$ 有

$g^{k-1}(m)g(m-1)$

$\leq g(m^k)\leq g^{k-1}(m)g(m+1)$. ④

显然,当 $k=1$ 时,③、④也成立.

任取 $m\geq 3$,$k\geq 1$,有 $s\geq 1$,使得

$2^s\leq m^k<2^{s+1}$.

于是,有 $s\leq k\log_2 m<s+1$,

即 $k\log_2 m-1<s\leq k\log_2 m$. ⑤

由(1)可知

$g(2^s) \le g(m^k) \le g(2^{s+1})$.

再由③、④得

$$\begin{cases} 2^{s-1} \le g^{k-1}(m)\, g(m+1), \\ g^{k-1}(m)\, g(m-1) \le 2^{s-1} g(3), \end{cases}$$

即 $\dfrac{2^{s-1}}{g(m+1)} \le g^{k-1}(m) \le \dfrac{2^{s-1} g(3)}{g(m-1)}$.

所以, $\dfrac{g(m)}{g(m+1)} \cdot 2^{s-1} \le g^k(m) \le \dfrac{g(m)\,g(3)}{g(m-1)} \cdot 2^{s-1}$.

由⑤得

$$\frac{g(m)}{4g(m+1)} \cdot 2^{k\log_2 m} \le g^k(m) \le \frac{g(m)\,g(3)}{2g(m-1)} \cdot 2^{k\log_2 m}.$$

故 $\sqrt[k]{\dfrac{g(m)}{4g(m+1)}} \cdot 2^{\log_2 m} \le g(m) \le \sqrt[k]{\dfrac{g(m)\,g(3)}{2g(m-1)}} \cdot 2^{\log_2 m}$,

即 $\sqrt[k]{\dfrac{g(m)}{4g(m+1)}}\, m \le g(m) \le \sqrt[k]{\dfrac{g(m)\,g(3)}{2g(m-1)}}\, m$.

令 $k \to +\infty$ 得 $g(m) = m$,则 $f(m) = m^a$.

综上得 $f = 0$ 或 $f(n) = n^a$ $(\forall n)$,其中 a $(a \ge 0)$ 为常数.

五、对 m、$n \in A$,若 $m + n = 1\ 001$ 或 $2\ 003$ 或 $3\ 005$,则称 m 与 n"有关".

易知与 1 有关的数仅有 1 000 和 2 002,与 1 000 和 2 002 有关的都是 1 和 1 003,与 1 003 有关的为 1 000和 2 002.

所以,1,1 003,1 000,2 002 必须分别为两组

{1,1 003},{1 000,2 002}.

同理可划分其他各组

{2,1 004},{999,2 001};

{3, 1 005},{998,2 000};

……

{500,1 502},{501, 1 503};

{1 001},{1 002}.

这样 A 中的 2 002 个数被划分成 501 对,共 1 002 组.

由于任意数与且只与对应的另一组有关,所以,若一对中一组在 A_1 中,另一组必在 A_2 中. 反之亦然,且 A_1 与 A_2 中不再有有关的数. 故 A 的 M-划分的个数为 2^{501}.

六、设 $n \ge 2$,则

$$\begin{aligned} & x_{n+1} - \sqrt[3]{2}\, x_n - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} x_{n-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{4}} x_n - \sqrt[3]{2}\, x_n + \sqrt[3]{4}\, x_{n-1} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} x_{n-1} + \frac{1}{2} x_{n-2} \\ &= -\frac{\sqrt[3]{2}}{2} x_n + \frac{\sqrt[3]{4}}{2} x_{n-1} + \frac{1}{2} x_{n-2} \\ &= -\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\left(x_n - \sqrt[3]{2}\, x_{n-1} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} x_{n-2} \right). \end{aligned}$$

由于 $x_2 - \sqrt[3]{2}\, x_1 - \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} x_0 = 0$,所以,

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{2}\, x_n + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} x_{n-1} \quad (\forall n \ge 1). \qquad ①$$

①的特征方程为 $\lambda^2 = \sqrt[3]{2}\lambda + \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$,解得

$$\lambda = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \pm \sqrt{\frac{\sqrt[3]{4}}{4} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}(1 \pm \sqrt{3}).$$

再由 $x_0 = 0$ 可得

$$x_n = A\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)^n [(1+\sqrt{3})^n - (1-\sqrt{3})^n].$$

于是, $x_3 = \dfrac{A}{4}[(1+\sqrt{3})^3 - (1-\sqrt{3})^3] = 3\sqrt{3}A$.

故 $A = \dfrac{x_3}{3\sqrt{3}}$.

由此可得

$$x_n = \frac{x_3}{3\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)^n [(1+\sqrt{3})^n - (1-\sqrt{3})^n]. \qquad ②$$

记 $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{3}}[(1+\sqrt{3})^n - (1-\sqrt{3})^n]$. 显然,$\{a_n\}$ 为偶数列,且由 x_3 为正整数和②知 x_n 为整数的必要条件是 $3 | n$. 而

$$\begin{aligned} a_{3k} &= \frac{3}{3\sqrt{3}}[(1+\sqrt{3})^{3k} - (1-\sqrt{3})^{3k}] \\ &= \frac{3}{3\sqrt{3}}[(10+6\sqrt{3})^k - (10-6\sqrt{3})^k], \end{aligned}$$

所以,$3 | a_{3k}$.

令 $b_n = (1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n$, $n = 0,1,2,\cdots$,则 $\{b_n\}$ 也是偶数列,且易知对任意非负整数 m、n,有

$$\begin{cases} a_{n+m} = \dfrac{1}{2}(a_n b_m + a_m b_n), \\ b_{n+m} = \dfrac{1}{2}(b_n b_m + 3a_n a_m). \end{cases} \qquad ③$$

在③中令 $m = n$,则有

$$\begin{cases} a_{2n} = a_n b_n, \\ b_{2n} = \dfrac{1}{2}(b_n^2 + 3a_n^2). \end{cases} \qquad ④$$

设 $a_n = 2^{k_n} p_n$, $b_n = 2^{l_n} q_n$,其中 n、k_n、l_n 为正整数,p_n、q_n 为奇数.

由于 $a_1 = b_1 = 2$,即 $k_1 = l_1 = 1$,由④可知

$k_2 = 2$, $l_2 = 3$;

$k_4 = 5$, $l_4 = 3$;

$k_8 = 8$, $l_8 = 5$.

用归纳法可得

$$k_{2^m} = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 2, & m = 1, \\ 2^{m-1} + m + 1, & m \ge 2, \end{cases}$$

$$l_{2^m}=\begin{cases}1, & m=0,\\ 3, & m=1,\\ 2^{m-1}+1, & m\geq 2.\end{cases}$$

任取 $m_1>m_2\geq 2$,由③可得

$$\begin{cases}a_{2^{m_1}+2^{m_2}}=\frac{1}{2}(a_{2^{m_1}}b_{2^{m_2}}+a_{2^{m_2}}b_{2^{m_1}}),\\ b_{2^{m_1}+2^{m_2}}=\frac{1}{2}(b_{2^{m_1}}b_{2^{m_2}}+3a_{2^{m_1}}a_{2^{m_2}}).\end{cases}$$

由此易知

$$\begin{cases}k_{2^{m_1}+2^{m_2}}=2^{m_1-1}+2^{m_2-1}+m_2+1,\\ l_{2^{m_1}+2^{m_2}}=2^{m_1-1}+2^{m_2-1}+1.\end{cases}$$

用归纳法可知,对于 $m_1>m_2>\cdots>m_r\geq 2$,有

$$\begin{cases}k_{2^{m_1}+2^{m_2}+\cdots+2^{m_r}}=2^{m_1-1}+2^{m_2-1}+\cdots+2^{m_r-1}+m_r+1,\\ l_{2^{m_1}+2^{m_2}+\cdots+2^{m_r}}=2^{m_1-1}+2^{m_2-1}+\cdots+2^{m_r-1}+1,\end{cases}$$

即当 $n=2^rp$,其中 $r(r\geq 2)$ 是整数,p 是奇数时,有

$$\begin{cases}k_n=\frac{n}{2}+r+1,\\ l_n=\frac{n}{2}+1.\end{cases} \qquad ⑤$$

当 $n=4m+1$ 时,由③可得

$$a_{4m+1}=\frac{1}{2}(a_{4m}b_1+a_1b_{4m})=a_{4m}+b_{4m}.$$

由⑤可知 $k_{4m+1}=2m+1$.

同理,由

$$a_{4m+2}=\frac{1}{2}(a_{4m}b_2+b_{4m}a_2)=2(2a_{4m}+b_{4m}),$$

$$a_{4m+3}=\frac{1}{2}(a_{4m}b_3+b_{4m}a_3)=2(5a_{4m}+3b_{4m})$$

知 $k_{4m+2}=k_{4m+3}=2m+2$.

综上可知

$$k_n=\begin{cases}\frac{n}{2}+\frac{1}{2}, & \text{当 } n \text{ 为奇数时},\\ \frac{n}{2}+1, & \text{当 } n\equiv 2 \pmod 4 \text{ 时},\\ \frac{n}{2}+r+1, & \text{当 } n=2^rp,\ r\geq 2,\ p \text{ 为奇数时}.\end{cases}$$

当 $3|n$ 时,由②得

$$x_n=\frac{x_3}{3}2^{-\frac{2}{3}n}a_n=\frac{x_3}{3}2^{k_n-\frac{2}{3}n}p_n,$$

其中 $3|p_n$.

由于 $k_3=2=\frac{2}{3}\times 3$,$k_6=4=\frac{2}{3}\times 6$,

$$k_{12}=9>\frac{2}{3}\times 12,\ k_{24}=16=\frac{2}{3}\times 24,$$

从而,x_3,x_6,x_{12},x_{24} 均为整数.

若 $n\not\equiv 0 \pmod 4$,则 $k_n\leq\frac{n}{2}+1$.所以,

$$k_n-\frac{2}{3}n\leq 1-\frac{n}{6}<0\ (\forall n>6). \qquad ⑥$$

若 $n\equiv 0\pmod 4$,由于 $3|n$,则 $n=2^r\times 3^kq$,其中 $r\geq 2$,$k\geq 1$,q 不含 3 的因子.

由⑤可知,$k_n=2^{r-1}\times 3^kq+r+1$.于是,

$$k_n-\frac{2}{3}n=2^{r-1}\times 3^kq+r+1-2^{r+1}\times 3^{k-1}q$$

$$=r+1-2^{r-1}\times 3^{k-1}q\leq r+1-2^{r-1},$$

等号当且仅当 $k=q=1$ 时成立.

当 $r>3$ 时,$2^{r-1}=(1+1)^{r-1}>r+1$.由此可知,当 $r>3$ 或 $2\leq r\leq 3$,但 k、q 中有一个不为 1 时,有

$$k_n-\frac{2}{3}n<0. \qquad ⑦$$

由⑥和⑦知$\{x_n\}$中仅有 x_0,x_3,x_6,x_{12},x_{24}为整数.

综上得数列中最少有 5 个整数项.