2007年IMO中国国家集训队选拔考试

第一天

一、已知 AB 是 $\odot O$ 的弦，M 是弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，C 是 $\odot O$ 外任一点，过点 C 作 $\odot O$ 的切线 CS、CT，联结 MS、MT 分别交 AB 于点 E、F. 过点 E、F 作 AB 的垂线，分别交 OS、OT 于点 X、Y. 再过点 C 任作 $\odot O$ 的割线，交 $\odot O$ 于点 P、Q，联结 MP 交 AB 于点 R，设 Z 是 $\triangle PQR$ 的外心. 求证：X、Y、Z 三点共线.

(熊　斌　供题)

二、称满足如下条件的有理数 x 为"好的"：$x=\frac{p}{q}>1$，其中，p、q 是互质的正整数，且存在常数 α、N，使得对任意正整数 $n\geq N$，都有

$$|\{x^n\}-\alpha|\leq\frac{1}{2(p+q)},$$

其中，$\{a\}$ 表示 a 的小数部分. 求出所有好的有理数.

(李伟固　供题)

三、在半径为 10 的圆周 C 上任给 63 个点，设以这些点为顶点且三边长都大于 9 的三角形的个数为 S. 求 S 的最大值.

(冷岗松　供题)

第二天

四、求所有的函数 $f:\mathbf{Q}_+\to\mathbf{Q}_+$，使得

$$f(x)+f(y)+2xyf(xy)=\frac{f(xy)}{f(x+y)},\qquad ①$$

其中，$\mathbf{Q}_+$ 表示正有理数集合.

(李胜宏　供题)

五、设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 $n(n\geq2)$ 个实数，满足 $A=\left|\sum_{i=1}^{n}x_i\right|\neq0$，

$$B=\max_{1\leq i<j\leq n}|x_j-x_i|\neq0.$$

求证：对平面上的任意 n 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，存在 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得

$$\left|\sum_{i=1}^{n}x_{k_i}\boldsymbol{\alpha}_i\right|\geq\frac{AB}{2A+B}\max_{1\leq i\leq n}|\boldsymbol{\alpha}_i|.$$

(朱华伟　供题)

六、设 n 为正整数，$A\subseteq\{1,2,\cdots,n\}$，$A$ 中任两个数的最小公倍数都不超过 n. 求证：

$$|A|\leq1.9\sqrt{n}+5.$$

(陈永高　供题)

参考答案

第一天

一、如图 1，先联结 OM. 由垂径定理易知 $\triangle XES$ 与 $\triangle OMS$ 位似，于是，$\triangle XES$ 是等腰三角形. 故可以 X 为圆心、XE 和 XS 为半径作圆，该圆同时与弦 AB 及直线 CS 相切.

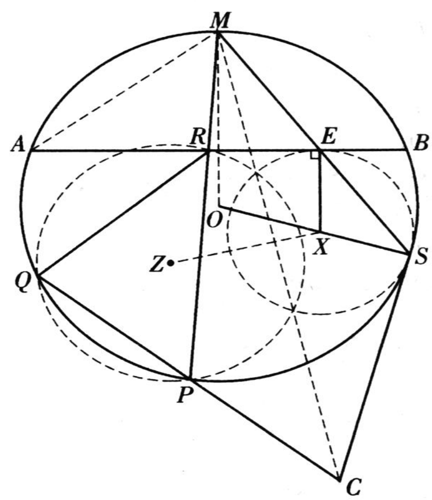

图 1

再作 $\triangle PQR$ 的外接圆，并联结 MA、MC. 易证明

$$MR\cdot MP=MA^2=ME\cdot MS.\qquad ①$$

又由切割线定理得

$$CQ\cdot CP=CS^2.\qquad ②$$

式①、②表明，点 M、C 关于 $\odot Z$、$\odot X$ 的幂都相等. 于是，MC 就是上述两圆的根轴.

因此，$ZX\perp MC$.

同理，$ZY\perp MC$.

所以，X、Y、Z 三点共线.

二、显然，每个大于 1 的整数是好的.

下证每个好的有理数也必是大于 1 的整数.

设 $m_n=[x^{n+1}]-[x^n]$. 当 $n\geq N$ 时，

$$|(x-1)x^n-m_n|=|\{x^{n+1}\}-\{x^n\}|$$

$$\leq|\{x^{n+1}\}-\alpha|+|\{x^n\}-\alpha|\leq\frac{1}{p+q}.$$

注意到,$(x-1)x^n-m_n$ 是一个分母为 q^{n+1} 的最简分数,则 $|(x-1)x^n-m_n|<\frac{1}{p+q}$.

故 $|qm_{n+1}-pm_n|$

$=|q((x-1)x^{n+1}-m_{n+1})-p((x-1)x^n-m_n)|$

$<\frac{q}{p+q}+\frac{p}{p+q}=1$.

所以,$m_{n+1}=\frac{p}{q}m_n$.从而,$m_{n+k}=\frac{p^k}{q^k}m_n$.

又当 n 充分大时,$m_n>(x-1)x^n-1>0$,得到 $q=1$,即 $x>1$ 为整数.

三、设圆周 C 的圆心为 O,内接正 n 边形的边长为 a_n,则 $a_6=10>9$,且

$$a_7<10\times\frac{2\pi}{7}<10\times\frac{2\times3.15}{7}=9.$$

(1)作圆周 C 的内接正六边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$,则 $A_iA_{i+1}=a_6>9$.故可在 $\overset{\frown}{A_iA_{i+1}}$ 内取一点 B_i,使 $B_iA_{i+1}>9$.于是,$\angle B_iOA_{i+1}>\frac{2\pi}{7}$.从而,

$$\angle A_iOB_i=\angle A_iOA_{i+1}-\angle B_iOA_{i+1}<\frac{2\pi}{6}-\frac{2\pi}{7}<\frac{2\pi}{7}.$$

所以,$A_iB_i<9$ $(i=1,2,\cdots,6,A_7=A_1)$.

故 $\overset{\frown}{A_iB_i}$ 上任意两点的距离小于9.

又 $63=6\times10+3$,则可在 $\overset{\frown}{A_1B_1}$、$\overset{\frown}{A_2B_2}$、$\overset{\frown}{A_3B_3}$ 每段弧内任取11个点,在 $\overset{\frown}{A_4B_4}$、$\overset{\frown}{A_5B_5}$、$\overset{\frown}{A_6B_6}$ 每段弧内任取10个点,将取出的这63个点组成集 M.于是,M 内位于6条弧 $\overset{\frown}{A_iB_i}$ $(i=1,2,\cdots,6)$ 中同一条弧上任意两点的距离小于9,而位于不同弧上任意两点的距离大于9.故以 M 中的点为顶点且三边长都大于9的三角形个数为

$$\begin{aligned}S_0=&\mathrm{C}_3^3\times11^3+\mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_3^1\times11^2\times10+\\&\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_3^2\times11\times10^2+\mathrm{C}_3^3\times10^3\\=&23\,121.\end{aligned}$$

于是,所求 S 的最大值大于或等于 S_0.

(2)接下来证明:所求的最大值等于 S_0.

为此,用到下面三个引理.

引理1 在圆周 C 上任给 n 个点,以圆周 C 上一点 P 为中心、长度等于圆周长的 $\frac{2}{7}$ 的弧 $\overset{\frown}{BPC}$(含点 B、C)称为点 P 的 $\frac{2}{7}$ 圆弧.则给定的 n 个点中必存在一点 P,它的 $\frac{2}{7}$ 圆弧至少覆盖给定点中的 $\left[\frac{n+5}{6}\right]$ 个点.

引理1的证明:如图2,取一个给定的点 A,它的 $\frac{2}{7}$ 圆弧为 $\overset{\frown}{A_1AA_6}$.以 A_1、A_6 为端点不含 A 的另一段弧记为 $\overset{\frown}{A_1BA_6}$,并将 $\overset{\frown}{A_1BA_6}$ 五等分,分点依次为 A_2、A_3、A_4、A_5.于是,$\overset{\frown}{A_iA_{i+1}}$ 恰是整个圆周 C 的 $\frac{1}{7}$ $(i=1,2,\cdots,5)$.

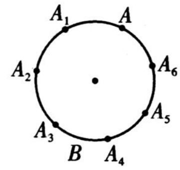

图2

因为 $\overset{\frown}{A_1AA_6}$ 上的给定点都被点 A 的 $\frac{2}{7}$ 圆弧覆盖,若 $\overset{\frown}{A_iA_{i+1}}$ $(i=1,2,\cdots,5)$ 上有给定点 P_i,则 $\overset{\frown}{A_iA_{i+1}}$ 上的所有给定点都被点 P_i 的 $\frac{2}{7}$ 圆弧覆盖,所以,所有 n 个给定点至多被其中6个给定点的 $\frac{2}{7}$ 圆弧覆盖.

由抽屉原理知,其中必有一个给定点的 $\frac{2}{7}$ 圆弧至少覆盖 $\left[\frac{n-1}{6}\right]+1=\left[\frac{n+5}{6}\right]$ 个给定点.

引理2 在半径为10的圆周 C 上任取一条长度等于圆周长的 $\frac{5}{7}$ 的弧 $\overset{\frown}{A_1BA_6}$.在 $\overset{\frown}{A_1BA_6}$ 上任给 $5m+r$(m、r 为非负整数,且 $0\leqslant r<5$)个点,则以给定点为端点、长度大于9的线段数至多为

$$10m^2+4rm+\frac{1}{2}r(r-1).$$

引理2的证明:如图2,将 $\overset{\frown}{A_1BA_6}$ 五等分,分点依次为 A_2,A_3,A_4,A_5,则 $\overset{\frown}{A_iA_{i+1}}$ $(i=1,2,\cdots,5)$ 恰为整个圆周长的 $\frac{1}{7}$.于是,同一弧 $\overset{\frown}{A_iA_{i+1}}$ 上任意两点的距离不超过 $a_7<9$.

设 $\overset{\frown}{A_iA_{i+1}}$ 上有 m_i 个已知点,则以已知点为端点且距离大于9的线段至多为

$$l=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant5}m_im_j, \qquad ①$$

其中,$m_1+m_2+\cdots+m_5=5m+r$.

因满足式①的非负整数组 $(m_1,m_2,\cdots,m_5)$ 的个数有限,所以,l 的最大值必存在.

下面证明:当 l 取最大值时,必有

$|m_i-m_j|\leqslant1$ $(1\leqslant i<j\leqslant5)$.

否则,l 取最大值时,存在 i、$j(1\leqslant i<j\leqslant5)$ 使得 $|m_i-m_j|\geqslant2$.不妨设 $m_1-m_2\geqslant2$,令

$m_1'=m_1-1,m_2'=m_2+1,m_i'=m_i(3\leqslant i\leqslant5)$,

并令对应的整数为 l',则

$m_1'+m_2'=m_1+m_2$,

且 $m_1'+m_2'+\cdots+m_5'=m_1+m_2+\cdots+m_5$.

故 $l'-l=(m_1'm_2'-m_1m_2)+[(m_1'+m_2')-(m_1+m_2)](m_3+m_4+m_5)$

$=m_1-m_2-1\geqslant1$.

这与 l 为最大值矛盾.

因此,当 l 取最大值时,$m_1,m_2,\cdots,m_5$ 中有 r

个 $m+1$,5 - r 个 m.

所以,以给定点为端点且长度大于 9 的线段数不超过

$$C_r^2(m+1)^2+C_r^1C_{5-r}^1(m+1)m+C_{5-r}^2m^2$$

$$=10m^2+4rm+\frac{1}{2}r(r-1).$$

引理 3　在半径为 10 的圆周 C 上任给 n 个点组成点集 M,且 $n=6m+r$(m、r 为非负整数,$0\le r<6$).设以 M 中的点为顶点、三边长都大于 9 的三角形个数为 S_n.则

$$S_n\le 20m^3+10rm^2+2r(r-1)m+\frac{1}{6}r(r-1)(r-2).$$

引理 3 的证明:对 n 用数学归纳法.

当 $n=1$ 或 2 时,$S_n=0$,结论显然成立.

设当 $n=k(k\ge 2)$ 时,结论成立,并设 $k=6m+r$ (m、r 为非负整数,且 $0\le r<6$),则

$$S_k\le 20m^3+10rm^2+2r(r-1)m+\frac{1}{6}r(r-1)(r-2).$$

当 $n=k+1$ 时,由引理 1 知,给定的 $k+1$ 个点中必存在一点 P,它的 $\frac{2}{7}$ 圆弧 $\widehat{A_1PA_6}$ 至少覆盖给定点中的 $\left[\frac{k+1+5}{6}\right]=m+1$ 个点.显然,这些点到 P 的最大距离 $d\le PA_1=PA_6=a_7<9$.

故给定点中至多有

$$(k+1)-(m+1)=5m+r$$

个点到 P 的距离大于 9,且这些点全在以 A_1、A_6 为端点但不含 P 的另一段弧 $\widehat{A_1BA_6}$ 上,而这段弧的长度为整个圆周长的 $\frac{5}{7}$.

由引理 2 知,以这些点为端点、长度大于 9 的线段至多为 $10m^2+4rm+\frac{1}{2}r(r-1)$ (当 $r=5$ 时,由引理 2 知,至多有 $10(m+1)^2$,结论也成立),即以给定点为顶点的三角形中其三边长都大于 9,且有一个顶点为 P 的三角形个数不多于

$$S_P=10m^2+4rm+\frac{1}{2}r(r-1).$$

去掉点 P,还剩 $k=6m+r$ 个点.

设以这 k 个点为顶点,且三边长都大于 9 的三角形个数为 S_k,则由归纳假设有

$$S_k\le 20m^3+10rm^2+2r(r-1)m+\frac{1}{6}r(r-1)(r-2).$$

故 $S_{k+1}=S_k+S_P$

$$\le 20m^3+10rm^2+2r(r-1)m+\frac{1}{6}r(r-1)(r-2)+10m^2+4rm+\frac{1}{2}r(r-1)$$

$$=20m^3+10(r+1)m^2+2(r+1)rm+\frac{1}{6}r(r+1)(r-1).$$

因此,当 $n=k+1=6m+(r+1)$ 时,结论成立.

此外,当 $r=5$ 时,$m=k+1=6(m+1)$,上式化为 $S_{k+1}=20(m+1)^3$,结论也成立.

回到原题.

当 $n=63=6\times10+3$ 时,由引理 3 得

$$S\le 20\times10^3+10\times3\times10^2+2\times3\times2\times10+\frac{1}{6}\times3\times2\times1$$

$$=23\ 121.$$

故 $S_{\max}=23\ 121$.

第 二 天

四、(1) 证明: $f(1)=1$.

一方面,在式 ①中,令 $y=1$,记 $f(1)=a$,则

$$f(x)+a+2xf(x)=\frac{f(x)}{f(x+1)},$$

即

$$f(x+1)=\frac{f(x)}{(1+2x)f(x)+a}.\qquad ②$$

则 $f(2)=\frac{a}{4a}=\frac{1}{4}$,$f(3)=\frac{1}{5+4a}$,

$$f(4)=\frac{1}{7+5a+4a^2}.$$

另一方面,在式 ①中取 $x=y=2$,则

$$2f(2)+8f(4)=\frac{f(4)}{f(4)}=1.$$

从而, $\frac{1}{2}+\frac{8}{7+5a+4a^2}=1$.

解得 $a=1$.

(2) 用数学归纳法证明:

$$f(x+n)=\frac{f(x)}{(n^2+2nx)f(x)+1}\ (n=1,2,\cdots).\qquad ③$$

由式 ②得 $f(x+1)=\frac{f(x)}{(1+2x)f(x)+1}$.

假设 $f(x+k)=\frac{f(x)}{(k^2+2kx)f(x)+1}$,**则**

$$f(x+k+1)=\frac{f(x+k)}{[1+2(x+k)]f(x+k)+1}$$

$$=\frac{f(x)}{[(k+1)^2+2(k+1)x]f(x)+1}.$$

在式 ③中令 $x=1$,由 $f(1)=1$,有

$$f(1+n)=\frac{1}{n^2+2n+1}=\frac{1}{(n+1)^2},$$

即

$$f(n)=\frac{1}{n^2}\ (n=1,2,\cdots).$$

(3) 证明:

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=n^2=\frac{1}{\left(\frac{1}{n^2}\right)^2}\ (n=1,2,\cdots).\qquad ④$$

事实上,在式 ③中取 $x=\frac{1}{n}$,有

$$f\left(n+\frac{1}{n}\right)=\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{(n^2+2)f\left(\frac{1}{n}\right)+1}.$$

另一方面,在式①中取 $y=\frac{1}{x}$,有

$$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)+2=\frac{1}{f\left(x+\frac{1}{x}\right)}.$$

从而,

$$f(n)+f\left(\frac{1}{n}\right)+2=\frac{1}{f\left(n+\frac{1}{n}\right)}=n^2+2+\frac{1}{f\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^2}+f\left(\frac{1}{n}\right)=n^2+\frac{1}{f\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\Rightarrow f^2\left(\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n^2}-n^2\right)f\left(\frac{1}{n}\right)-1=0$$

$$\Rightarrow \left[f\left(\frac{1}{n}\right)-n^2\right]\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n^2}\right]=0.$$

所以,$f\left(\frac{1}{n}\right)=n^2=\frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)^2}$.

(4)证明:若 $q=\frac{n}{m}$,$(n,m)=1$,则 $f(q)=\frac{1}{q^2}$.

对正整数 m、n,$(n,m)=1$. 在式①中取 $x=n$,$y=\frac{1}{m}$,有

$$f\left(\frac{1}{m}\right)+f(n)+\frac{2n}{m}f\left(\frac{n}{m}\right)=\frac{f\left(\frac{n}{m}\right)}{f\left(n+\frac{1}{m}\right)}.$$

在式③中取 $x=\frac{1}{m}$,有

$$f\left(n+\frac{1}{m}\right)=\frac{f\left(\frac{1}{m}\right)}{\left(n^2+\frac{2n}{m}\right)f\left(\frac{1}{m}\right)+1}$$

$$=\frac{1}{n^2+2\times\frac{n}{m}+\frac{1}{m^2}}.$$

因此,$\frac{1}{n^2}+m^2+\frac{2n}{m}f\left(\frac{n}{m}\right)=\left(n+\frac{1}{m}\right)^2 f\left(\frac{n}{m}\right)$,

即 $\frac{1}{n^2}+m^2=\left(n^2+\frac{1}{m^2}\right)f\left(\frac{n}{m}\right)$.

所以,$f(q)=f\left(\frac{n}{m}\right)=\frac{\frac{1}{n^2}+m^2}{n^2+\frac{1}{m^2}}=\left(\frac{m}{n}\right)^2=\frac{1}{q^2}$.

于是,$f(x)=\frac{1}{x^2}$.

经验证,$f(x)=\frac{1}{x^2}$满足原方程.

故 $f(x)=\frac{1}{x^2}$为原问题的解.

五、设 $|\alpha_k|=\max\limits_{1\le i\le n}|\alpha_i|$ $(k\in\{1,2,\cdots,n\})$.

只须证明:

$$\max_{(k_1,k_2,\cdots,k_n)\in S_n}\left|\sum_{i=1}^{n}x_{k_i}\alpha_i\right|\ge\frac{AB}{2A+B}|\alpha_k|,$$

其中,S_n 为 $1,2,\cdots,n$ 的排列的集合.

不妨设 $|x_n-x_1|=\max\limits_{1\le i<j\le n}|x_j-x_i|=B$,

$|\alpha_n-\alpha_1|=\max\limits_{1\le i<j\le n}|\alpha_j-\alpha_i|$.

一方面,考虑两个向量

$\beta_1=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_{n-1}\alpha_{n-1}+x_n\alpha_n$,

$\beta_2=x_n\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_{n-1}\alpha_{n-1}+x_1\alpha_n$.

则 $\max\limits_{(k_1,k_2,\cdots,k_n)\in S_n}\left|\sum\limits_{i=1}^{n}x_{k_i}\alpha_i\right|\ge\max\{|\beta_1|,|\beta_2|\}$

$\ge\frac{1}{2}(|\beta_1|+|\beta_2|)\ge\frac{1}{2}|\beta_2-\beta_1|$

$=\frac{1}{2}|x_1\alpha_n+x_n\alpha_1-x_1\alpha_1-x_n\alpha_n|$

$=\frac{1}{2}|x_n-x_1|\cdot|\alpha_n-\alpha_1|=\frac{1}{2}B|\alpha_n-\alpha_1|$. ①

设 $|\alpha_n-\alpha_1|=x|\alpha_k|$.

由三角形不等式易知 $0\le x\le 2$.

因此,式①中的不等式可写为

$$\max_{(k_1,k_2,\cdots,k_n)\in S_n}\left|\sum_{i=1}^{n}x_{k_i}\alpha_i\right|\ge\frac{1}{2}Bx|\alpha_k|. \quad ②$$

另一方面,考虑 n 个向量

$\gamma_1=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_{n-1}\alpha_{n-1}+x_n\alpha_n$,

$\gamma_2=x_2\alpha_1+x_3\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_{n-1}+x_1\alpha_n$,

……

$\gamma_n=x_n\alpha_1+x_1\alpha_2+\cdots+x_{n-2}\alpha_{n-1}+x_{n-1}\alpha_n$.

则 $\max\limits_{(k_1,k_2,\cdots,k_n)\in S_n}\left|\sum\limits_{i=1}^{n}x_{k_i}\alpha_i\right|$

$\ge\max\limits_{1\le i\le n}|\gamma_i|\ge\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|\gamma_i|\ge\frac{1}{n}\left|\sum\limits_{i=1}^{n}\gamma_i\right|$

$=\frac{A}{n}\left|\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\right|=\frac{A}{n}\left|n\alpha_k-\sum\limits_{j\ne k}(\alpha_k-\alpha_j)\right|$

$\ge\frac{A}{n}\left(n|\alpha_k|-\sum\limits_{j\ne k}|\alpha_k-\alpha_j|\right)$

$\ge\frac{A}{n}[n|\alpha_k|-(n-1)|\alpha_n-\alpha_1|]$

$=\frac{A}{n}[n|\alpha_k|-(n-1)x|\alpha_k|]$

$=A\left(1-\frac{n-1}{n}x\right)|\alpha_k|$. ③

结合式②、③得

$$\max_{(k_1,k_2,\cdots,k_n)\in S_n}\left|\sum_{i=1}^{n}x_{k_i}\alpha_i\right|$$

$$\ge\max\left\{\frac{Bx}{2},A\left(1-\frac{n-1}{n}x\right)\right\}|\alpha_k|$$

$$\ge\frac{\frac{Bx}{2}\cdot A\cdot\frac{n-1}{n}+A\left(1-\frac{n-1}{n}x\right)\cdot\frac{B}{2}}{A\cdot\frac{n-1}{n}+\frac{B}{2}}|\alpha_k|$$

$$=\frac{AB}{2A+B-\frac{2A}{n}}|\alpha_k|\ge\frac{AB}{2A+B}|\alpha_k|.$$

六、对于 $a\in(\sqrt{n},\sqrt{2n}]$,有

课外训练

数学奥林匹克初中训练题(100)

第 一 试

一、选择题(每小题 7 分,共 42 分)

1. 如图 1,在平面直角坐标系中,二次函数 $y = ax^2 + mc$ ($a \neq 0$) 的图像经过正方形 $ABOC$ 的三个顶点 A、B、C,且 $ac = -2$. 则 m 的值为( ).

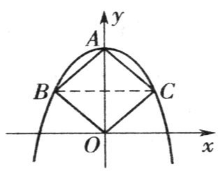

图 1

(A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) -2

2. 投掷红、绿两枚六面编号分别为 1～6(整数)的质地均匀的正方体骰子,将红色和绿色骰子正面朝上的编号分别作为二次函数 $y = x^2 + mx + n$ 的一次项系数和常数项的值. 则二次函数 $y = x^2 + mx + n$ 与 x 轴有两个不同交点的概率是( ).

(A) $\frac{5}{12}$ (B) $\frac{4}{9}$ (C) $\frac{17}{36}$ (D) $\frac{1}{2}$

3. 若一个正整数能表示为两个连续偶数的平方差,则称这个正整数为"神秘数"(如 $4 = 2^2 - 0^2$, $12 = 4^2 - 2^2$, $20 = 6^2 - 4^2$). 下列关于神秘数的叙述,正确的个数为( ).

①2 008 是神秘数;

②任意两个正奇数的平方差是神秘数;

③任意两个正奇数的平方差不是神秘数;

④在 1～100 这 100 个数中,神秘数有 13 个.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

4. 在 $\triangle ABC$ 中,$AB = AC = b$, $BC = a$. 若

$[a, a+1] = a(a+1) > n$.

则 $|A \cap (\sqrt{n}, \sqrt{2n}]| \leq \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)\sqrt{n} + 1$.

对于 $a \in (\sqrt{2n}, \sqrt{3n}]$,有

$[a, a+1] = a(a+1) > n$,

$[a+1, a+2] = (a+1)(a+2) > n$,

$[a, a+2] \geq \frac{1}{2} a(a+2) > n$.

则 $|A \cap (\sqrt{2n}, \sqrt{3n}]| \leq \frac{1}{3}(\sqrt{3} - \sqrt{2})\sqrt{n} + 1$.

同理,$|A \cap (\sqrt{3n}, 2\sqrt{n}]| \leq \frac{1}{4}(\sqrt{4} - \sqrt{3})\sqrt{n} + 1$.

故 $|A \cap [1, 2\sqrt{n}]|$

$$\leq \sqrt{n} + \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)\sqrt{n} + \frac{1}{3}(\sqrt{3} - \sqrt{2})\sqrt{n} + \frac{1}{4}(\sqrt{4} - \sqrt{3})\sqrt{n} + 3$$

$$= \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{12}\right)\sqrt{n} + 3.$$

对于正整数 k,设 a、$b \in \left(\frac{n}{k+1}, \frac{n}{k}\right]$ ($a > b$),并令 $[a, b] = as = bt$. 则 $\frac{a}{(a, b)} s = \frac{b}{(a, b)} t$.

由 $\frac{a}{(a, b)}$ 与 $\frac{b}{(a, b)}$ 互质,知 s 为 $\frac{b}{(a, b)}$ 的倍数. 从而,

$$[a, b] = as \geq \frac{ab}{(a, b)} \geq \frac{ab}{a - b} = b + \frac{b^2}{a - b}$$

$$> \frac{n}{k+1} + \frac{\left(\frac{n}{k+1}\right)^2}{\frac{n}{k} - \frac{n}{k+1}} = n.$$

由此知 $\left|A \cap \left(\frac{n}{k+1}, \frac{n}{k}\right]\right| \leq 1$.

取正整数 T,使 $\frac{n}{T+1} \leq 2\sqrt{n} < \frac{n}{T}$,则

$$|A \cap (2\sqrt{n}, n]| \leq \sum_{k=1}^{T} \left|A \cap \left(\frac{n}{k+1}, \frac{n}{k}\right]\right|$$

$$\leq T < \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

综上有

$$|A| \leq \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{12}\right)\sqrt{n} + 3 < 1.9\sqrt{n} + 5.$$

(朱华伟 提供)