全国高中数学联赛模拟试题（八）

第一试

一、选择题：（每小题 6 分，共 36 分）

1、设 $\log_a b$ 是一个整数，且 $\log_a \frac{1}{b} > \log_a \sqrt{b} > \log_b a^2$，给出下列四个结论

①$\frac{1}{b} > \sqrt{b} > a^2$；②$\log_a b+\log_b a=0$；③$0<a<b<1$；④$ab-1=0$.

其中正确结论的个数是

（A）1（B）2（C）3 （D）4

2、若△ABC 的三边长 a、b、c 满足$\begin{cases} a^2-a-2b-2c=0 \\ a+2b-2c+3=0 \end{cases}$，则它的最大内角度数是

（A）150° （B）120° （C）90° （D）60°

3、定长为 l（$l>\frac{2b^2}{a}$）的线段 AB 的两端点都在双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$），则 AB 中点 M 的横坐标的最小值为

（A）$\frac{al}{2\sqrt{a^2+b^2}}$ （B）$\frac{a+l}{2\sqrt{a^2+b^2}}$ （C）$\frac{a(l-2a)}{2\sqrt{a^2+b^2}}$ （D）$\frac{a(l+2a)}{2\sqrt{a^2+b^2}}$

4、在复平面上，曲线 $z^4+z=1$ 与圆$|z|=1$ 的交点个数为

（A）0（B）1（C）2 （D）3

5、设 $E=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2\}$、$F=\{(x,y)|x\leqslant 10,y\geqslant 2,y\leqslant x-4\}$是直角坐标平面上的两个点集，则集合 $G=\left\{\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)\middle|(x_1,y_1)\in E,(x_2,y_2)\in F\right\}$所组成的图形面积是

（A）6（B）2π（C）6.5（D）7

6、正方形纸片 $ABCD$，沿对角线 AC 对折，使 D 在面 ABC 外，这时 DB 与面 ABC 所成的角一定不等于

（A）30° （B）45° （C）60° （D）90°

二、填空题：（每小题 9 分，共 54 分）

1、已知$\alpha=\frac{\pi}{24}$，则$\frac{\sin\alpha}{\cos 4\alpha\cos 3\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos 3\alpha\cos 2\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos 2\alpha\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$的值等于_____.

2、$1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+2004}=$_____.

3、在 Rt△ABC 中，$AB=AC$，以 C 为一个焦点作一个椭圆，使这个椭圆的另一个焦点在 AB 内，且椭圆过 A、B 点，则这个椭圆的离心率等于_____.

4、$\{1,2,3,\cdots,20\}$中选出三个数，使得没有两个数相邻，有_____种不同的选法.

5、b 均为正数，且存在复数 z 满足$\begin{cases} z+\bar{z}\cdot|z|=a+b\mathrm{i} \\ |z|\leq 1 \end{cases}$，则 ab 的最大值等于_____.

6、使不等式$\frac{8}{15}<\frac{n}{n+k}<\frac{7}{13}$对惟一的一个整数 k 成立的最大正整数 n 为_____.

三、(20 分)

已知实数 x、y 满足 $x^2+y^2\leqslant 5$．求 $f(x,y)=3|x+y|+|4y+9|+|7y-3x-18|$的最大值与最小值.

四、(20 分)

经过点 $M(2,-1)$作抛物线 $y^2=x$ 的四条弦 $P_iQ_i(i=1,2,3,4)$，且 P_1、P_2、P_3、P_4四点的纵坐标依次成等差数列.

求证：$\frac{P_1M}{MQ_1}-\frac{P_2M}{MQ_2}>\frac{P_3M}{MQ_3}-\frac{P_4M}{MQ_4}$.

五、(20 分)

n 为正整数，$r>0$ 为实数．证明：方程 $x^{n+1}+rx^n-r^{n+1}=0$ 没有模为 r 的复数根.

第二试

一、（50 分）

设 $C(I)$是以△ABC 的内心 I 为圆心的一个圆，点 D、E、F 分别是从 I 出发垂直于边 BC、CA 和 AB 的直线 $C(I)$的交点.

求证：AD、BE 和 CF 三线共点.

二、（50 分）

非负实数 x、y、z 满足 $x^2+y^2+z^2=1$.

求证：$1 \leqslant \frac{x}{1+yz}+\frac{y}{1+zx}+\frac{z}{1+xy} \leqslant \sqrt{2}$.

三、（50 分）

对由 n 个 A，n 个 B 和 n 个 C 排成的行，在其下面重新定义一行（比上面一行少一个字母），若其头上的两个字母不同，则在该位置写上第三个字母；若相同，则写上该字母．对新得到的行重复上面的操作，直到变为一个字母为止．下面给出了 n=2 的一个例子.

A　C　B　C　B　A

B　A　A　A　C

C　A　A　B

B　A　C

C　B

A

求所有的正整数 n，使得对任意的初始排列，经上述操作后，所得的大三角形的三个顶点上的字母要么全相同，要么两两不同.

参考答案

第一试

一、选择题：

1、A；2、B；3、D；4、A；5、D；6、D

二、填空题：

1、$\frac{\sqrt{3}}{3}$；2、$\frac{4008}{2005}$；3、$\sqrt{6}-\sqrt{3}$；4、816；5、$\frac{1}{8}$；6、112．

三、最大值 $27+6\sqrt{5}$，最小值 $27-3\sqrt{10}$．

四、证略.

五、证略.

第二试

一、证略；

二、证略.

三、n=1．