全国高中数学联赛模拟试题（七）

第一试

一、选择题：（每小题 6 分，共 36 分）

1、a、b 是异面直线，直线 c 与 a 所成的角等于 c 与 b 所成的角，则这样的直线 c 有

（A）1 条　（B）2 条　（C）3 条　（D）无数条

2、已知 $f(x)$是 **R** 上的奇函数，$g(x)$是 **R** 上的偶函数，若 $f(x)-g(x)=x^2+2x+3$，则 $f(x)+g(x)=$

（A）$-x^2+2x-3$　（B）x^2+2x-3　（C）$-x^2-2x+3$　（D）x^2-2x+3

3、知△ABC，O 为△ABC 内一点，$\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=\dfrac{2\pi}{3}$，则使 $AB+BC+CA\geqslant m(AO+BO+CO)$成立的 m 的最大值是

（A）2　（B）$\dfrac{5}{3}$　（C）$\sqrt{3}$　（D）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

4、设 $x=0.82^{0.5}$，$y=\sin 1$，$z=\log_3\sqrt{7}$ 则 x、y、z 的大小关系是

（A）$x<y<z$　（B）$y<z<x$　（C）$z<x<y$　（D）$z<y<x$

5、整数$\left[\dfrac{10^{1995}}{10^{95}+3}\right]$的末尾两位数字是

（A）10　（B）01　（C）00　（D）20

6、设(a,b)表示两自然数 a、b 的最大公约数．设$(a,b)=1$，则(a^2+b^2,a^3+b^3)为

（A）1　（B）2　（C）1 或 2　（D）可能大于 2

二、填空题：（每小题 9 分，共 54 分）

1、若 $f(x)=x^{10}+2x^9-2x^8-2x^7+x^6+3x^2+6x+1$，则 $f(\sqrt{2}-1)=$_____.

2、设 F_1、F_2 是双曲线 $x^2-y^2=4$ 的两个焦点，P 是双曲线上任意一点，从 F_1 引$\angle F_1PF_2$ 平分线的垂线，垂足为 M，则点 M 的轨迹方程是_____.

3、给定数列$\{x_n\}$，$x_1=1$，且 $x_{n+1}=\dfrac{\sqrt{3}x_n+1}{\sqrt{3}-x_n}$，则 $x_{1999}-x_{601}=$______.

4、正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，E 是 CD 中点，F 是 BB_1 中点，则四面体 AD_1EF 的体积是_____.

5、在坐标平面上，由条件$\begin{cases} y\geq -|x|-1 \\ y\leq -2|x|+3 \end{cases}$所限定的平面区域的面积是_____.

6、12 个朋友每周聚餐一次，每周他们分成三组，每组 4 人，不同组坐不同的桌子．若要求这些朋友中任意两个人至少有一次同坐一张桌子，则至少需要_____周．

三、（20 分）

已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 过定点 $A(1,0)$，且焦点在 x 轴上，椭圆与曲线$|y|=x$ 的交点为 B、C．现

有以 A 为焦点，过 B、C 且开口向左的抛物线，抛物线的顶点坐标 $M(m,0)$．当椭圆的离心率 e 满足 $\frac{2}{3}<e^2<1$，求实数 m 的取值范围．

四、（20 分）

a、b、c 均为实数，$a\neq b$，$b\neq c$，$c\neq a$．

证明：$\frac{3}{2}\leqslant\frac{|a+b-2c|+|b+c-2a|+|c+a-2b|}{|a-b|+|b-c|+|c-a|}<2$．

五、（20 分）

已知 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx$，满足

（i）a、b、c、d 均大于 0；

（ii）对于任一个 $x\in\{-2,-1,0,1,2\}$，$f(x)$为整数；

（iii）$f(1)=1,f(5)=70$．

试说明，对于每个整数 x，$f(x)$是否为整数．

第二试

一、（50 分）

设 K 为△ABC 的内心，点 C_1、B_1 分别为边 AB、AC 的中点，直线 AC 与 C_1K 交于点 B_2，直线 AB 于 B_1K 交于点 C_2．若△AB_2C_2 于△ABC 的面积相等，试求∠CAB．

二、（50 分）

设 $w=\cos\frac{\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{5}$，$f(x)=(x-w)(x-w^3)(x-w^7)(x-w^9)$．

求证：$f(x)$为一整系数多项式，且 $f(x)$不能分解为两个至少为一次的整系数多项式之积．

三、（50 分）

在圆上有 21 个点．求在以这些点为端点组成的所有的弧中，不超过 120° 的弧的条数的最小值．

参考答案

第一试

一、选择题：

1、D；2、A；3、C；4、B；5、C；6、C

二、填空题：

1、4；2、$x^2+y^2=4$；3、0；4、$\frac{5}{24}$；5、16；6、5.

三、$(1,\frac{3+\sqrt{2}}{4})$.

四、证略.

五、是.

第二试

一、60°；

二、证略.

三、100.