

全国高中数学联赛模拟试题（三）

第一试

一、选择题：（每小题 6 分，共 36 分）

1、若集合 $S=\{n|n \text{ 是整数, 且 } 22n+2 \text{ 整除 } 2003n+2004\}$, 则 S 为

(A) 空集 (B) 单元集 (C) 二元集 (D) 无穷集

2、若多项式 x^2-x+1 能除尽另一个多项式 x^3+x^2+ax+b (a, b 皆为常数). 则 $a+b$ 等于

(A) 0 (B) -1 (C) 1 (D) 2

3、设 a 是整数, 关于 x 的方程 $x^2+(a-3)x+a^2=0$ 的两个实根为 x_1, x_2 , 且 $\tan(\arctan x_1 + \arctan x_2)$ 也是整数. 则这样的 a 的个数是

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4

4、一个四面体的体积为 V_1 , 它的各条棱的中点构成一个凸多面体, 其体积为 V_2 . 则 $\frac{V_2}{V_1}$ 为

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) 常数, 但不等于 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{2}{3}$ (D) 不确定

5、十进制中, 若一个至少有两位数字的正整数除了最左边的数字外, 其余各个数字都小于其左边的数字时, 则称它为递降正整数. 所有这样的递降正整数的个数为

(A) 1001 (B) 1010 (C) 1011 (D) 1013

6、在正方体的 8 个顶点中, 能构成一个直角三角形的 3 个顶点的直角三点组的个数是

(A) 36 (B) 37 (C) 48 (D) 49

二、填空题：（每小题 9 分，共 54 分）

1、若直线 $x\cos\theta + y\sin\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ ($0 < \theta < \pi$) 与圆 $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ 有公共点, 则 θ 的取值范围是_____.

2、平面直角坐标系 xOy 中, 一个圆经过 $(0, 2)$ 、 $(3, 1)$, 且与 x 轴相切. 此圆的半径等于_____.

3、常数 a 使得关于 x 的方程 $\lg(x^2+20x) - \lg(8x-6a-3) = 0$ 有惟一解. 则 a 的取值范围是_____.

4、 $f(x) = \frac{x^2}{8} + x\cos x + \cos(2x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 的最小值是_____.

5、若 k 是一个正整数, 且 2^k 整除 $C_{4006}^0 + C_{4006}^2 3^1 + \cdots + C_{4006}^{2i} 3^i + \cdots + C_{4006}^{4006} 3^{2003}$, 则 k 的最大值为_____.

6、设 $ABCD$ 为凸四边形, $AB=7, BC=4, CD=5, DA=6$, 其面积 S 的取值范围是 (a, b) . 则 $a+b=_____$.

三、(20分)

设椭圆的左右焦点分别为 F_1 、 F_2 ，左准线为 l ，点 P 在椭圆上。作 $PQ \perp l$ ， Q 为垂足。试问：对于什么样的椭圆，才存在这样的点 P ，使得 PQF_1F_2 为平行四边形？说明理由（答案用关于离心率 e 的等式或不等式来表示）。

四、(20分)

设 $a_0=1$ ， $a_1=2$ ， $a_{n+1}=2a_n+n$ ， $n=1,2,3,\dots$ 。试求出 a_n 的表达式（答案用有限个关于 n 的式子相加的形式表示，且项数与 n 无关）。

五、(20分)

试求出所有的有序整数对 (a, b) ，使得关于 x 的方程 $x^4+(2b-a^2)x^2-2ax+b^2-1=0$ 的各个根均是整数。

第二试

一、(50分)

点 P 在 $\triangle ABC$ 内, 且 $\angle BAP = \angle CAP$, 连结 BP 并延长交 AC 于点 Q . 设 $\angle BAC = 60^\circ$, 且

$$\frac{1}{BP} + \frac{1}{PC} = \frac{1}{PQ}.$$

求证: P 是 $\triangle ABC$ 的内心.

二、(50分)

设正数 a, b 满足 $a > \frac{b}{\sqrt{2}}$ 且使得关于 x 的不等式 $\sqrt{x-1} \geq a\sqrt{x+1} - b$ 总有实数解. 试求 $f(a, b) = a^2 - 3ab + b^2$ 的取值范围.

三、(50分)

试求出正整数 k 的最小可能值, 使得下述命题成立: 对于任意的 k 个整数 a_1, a_2, \dots, a_k (允许相等), 必定存在相应的 k 的整数 x_1, x_2, \dots, x_k (也允许相等), 且 $|x_i| \leq 2 (i=1, 2, \dots, k)$, $|x_1| + |x_2| + \dots + |x_k| \neq 0$, 使得 2003 整除 $x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_k a_k$.

参考答案

第一试

一、选择题:

1、C; 2、C; 3、B; 4、A; 5、D; 6、C

二、填空题:

1、 $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}]$; 2、 $15 \pm 6\sqrt{5}$; 3、 $(-\frac{163}{6}, -\frac{1}{2})$; 4、-1; 5、2004; 6、 $2\sqrt{210}$.

三、 $e \in (\frac{1}{2}, 1)$.

四、 $a_{2n} = 2^{n+2} - 2n - 3$; $a_{2n+1} = 3 \times 2^{n+1} - 2n - 4$.

五、 $(a, b) = (2l - 1, l^2 - l - 1) \quad (\forall l \in \mathbf{Z})$

第二试

一、证略 (提示: 将条件变形为 $\frac{PC}{PA} \cdot \frac{PA}{PB} + 1 = \frac{PC}{PQ}$, 然后应用正弦定理, 进行三角变换, 得

$\angle BPC = 120^\circ$, 利用同一法即证);

二、 $(-\infty, -1)$.

三、 $k_{\min} = 7$.