2008 年全国高中数学联赛（吉林赛区）预赛暨 2008 年吉林省高中数学竞赛试题

（2008 年 5 月 25 日星期日上午 8：30—11：00　满分 190 分）

一、选择题（本题满分 36 分，每小题 6 分）

1．为了得到函数 $y=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$ 的图象，可以将函数 $y=\cos 2x$ 的图象（　　）

(A)向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度　　(B)向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

(C)向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度　　(D)向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

2．2008 年中国北京奥运会吉祥物由 5 个“中国福娃”组成，分别叫贝贝、晶晶、欢欢、迎迎、妮妮，现有两套不同大小的福娃（共 10 个福娃）．从两套福娃中任意选出 5 个福娃，恰好缺一个组成完整“奥运会吉祥物”的选法有（　　）

（A）160 种　　（B）320 种　　（C）32 种　　（D）120 种

3．已知 A、B、C 是平面上不共线的三点，O 是三角形 ABC 的重心，动点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}\right)$，则点 P 一定为三角形 ABC 的（　　）

（A）AB 边中线的中点　　（B）AB 边中线的三等分点（非重心）

（C）重心　　（D）AB 边的中点

4．若存在钝角 α，使得 $\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha=\log_2(x^2-x+2)$ 成立，则实数 x 的取值范围是（　　）

(A) $\{x|-1\le x<0或1<x\le 2\}$　　(B) $\{x|-1<x<0或1<x<2\}$

(C) $\{x|0\le x<1\}$　　(D) $\{x|-1<x<2\}$

5．对于集合 M、N，定义 $M-N=\{x\,|\,x\in M,且x\notin N\}$，$M\oplus N=(M-N)\cup(N-M)$，设 $A=\{y\,|\,y=x^2-3x,x\in R\},B=\{y\,|\,y=-2^x,x\in R\}$，则 $A\oplus B=$（　　）

(A) $(-\frac{9}{4},0]$　　(B) $[-\frac{9}{4},0)$　　(C) $(-\infty,-\frac{9}{4})\cup[0,+\infty)$　　(D) $(-\infty,-\frac{9}{4})\cup(0,+\infty)$

6．已知数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-1\right]$，则下列表述正确的是（　　）

（A）最大项为 a_1，最小项为 a_4　　（B）最大项为 a_1，最小项不存在

（C）最大项不存在，最小项为 a_3　　（D）最大项为 a_1，最小项为 a_3

二、填空题（本题满分 54 分，每小题 9 分）

7．已知多项式 $(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\cdots+(1+x)^n=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n$，且满足 $b_1+b_2+\cdots+b_n=26$，则正整数 n 的一个可能值为________；

8． 已知 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是单位正方体，黑白两个蚂蚁从点 A 出发沿棱向前爬行，橙子奥数工作室欢迎您，每走完一条棱称为“走完一段”．白蚂蚁的爬行路线是 $AA_1\to A_1D_1\to\cdots\cdots$，黑蚂蚁的爬行路线是 $AB\to BB_1\to\cdots\cdots$，它们都依照如下规则：所爬行的第 $n+2$ 段与第 n 段所在直线必须是异面直线，设黑白两个蚂蚁都走完 2008 段后各停止在正方体的某个顶点处，这时黑白两个蚂蚁的距离是_______；

9．已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R，满足：(1) $f(x)$ 是偶函数；(2) 对于任意的 $x\in R$ 都有 $f(x+4)=f(x)$，且 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=x+2$． 则直线 $y=4$ 与函数 $f(x)$ 的图象交点中最近的两点之间的距离为_________；

10．有六根细木棒，其中较长的两根分别为 $\sqrt{3}a$、$\sqrt{2}a$，其余四根均为 a，用它们搭成三棱锥，则其中两条较长的棱所在的直线的夹角的余弦值为________；

11．设 $f(x)=x^2+ax$，$\{x|f(x)=0,x\in\mathrm{R}\}=\{x|f(f(x))=0,x\in\mathrm{R}\}\neq\varnothing$，则满足条件的所有实数 a 的取值范围为________；

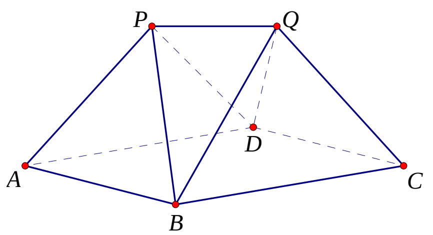
12．若集合 A_1,A_2 满足 $A_1\cup A_2=A$，则记 $[A_1,A_2]$ 是 A 的一组双子集拆分．规定：$[A_1,A_2]$ 和 $[A_2,A_1]$ 是 A 的同一组双子集拆分．已知集合 $A=\{1,2,3\}$，那么 A 的不同双子集拆分共有__________组．

三、解答题（本题共 5 道大题，每题 20 分，满分 100 分）

13．如图，某建筑物的基本单元可近似地按以下方法构作：先在地平面 α 内作菱形 $ABCD$，边长为 1，$\angle BAD=60°$，再在 α 的上方，分别以△ABD 与△CBD 为底面安装上相同的正棱锥 P-ABD 与 Q-CBD，$\angle APB=90°$．

（Ⅰ）求二面角 P-BD-Q 的余弦值；

（Ⅱ）求点 P 到平面 QBD 的距离．



14．已知长度为 6 的线段 CD 的中点为 M，现以 CD 为一边在同一侧作两个周长均为 16 的 $\Delta ACD,\Delta BCD$，且满足 $\angle AMB=90°$，求 ΔAMB 的面积的最小值．

15．设函数 $f(x)=x^2+ax+b$（其中 a,b 为实常数），已知不等式 $|f(x)|\le|2x^2+4x-30|$ 对任意实数 x 均成立，定义数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 为：$a_1=\dfrac{1}{2}$，$2a_n=f(a_{n-1})+15$（$n=2,3,4\cdots$），$b_n=\dfrac{1}{2+a_n}$（$n=1,2,3,\cdots$），数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项的和记为 S_n，其前 n 项的乘积记为 T_n．

（1）求证：$a=2$，且$b=-15$；

（2）证明：对任意正整数n，$2^{n+1}T_n+S_n$为定值.

16．在四维空间中，定义点$A(a_1,a_2,a_3,a_4)$与点$B(b_1,b_2,b_3,b_4)$之间的距离为$AB=\sqrt{\sum_{i=1}^{4}(a_i-b_i)^2}$，考察点集$I=\{P(c_1,c_2,c_3,c_4)\,|\,c_i=0或1,i=1,2,3,4\}$，如果对$I$的任意一个$n$元子集$Q=\{P_1,P_2,\cdots,P_n\}$，都能找到$P_i,P_j,P_k\in Q$，使得$\Delta P_iP_jP_k$为正三角形，即$P_iP_j=P_jP_k=P_kP_i$，求$n$的最小值.

17．已知正数a,b,c满足：$2a+4b+7c\le 2abc$，求$a+b+c$的最小值.

参考答案：

一、BABACD

二、7．4　8．$\sqrt{2}$　9．4　10．$\frac{\sqrt{6}}{3}$　11．$\{a\,|\,0\le a<4\}$　12．14

三、13．(2) $\cos\alpha=\frac{1}{3}$　(3)$\frac{\sqrt{2}}{3}$

14．$\frac{400}{41}$

15．为定值 2

16．n的最小值为 9

17．当$a=3,b=\frac{5}{2},c=2$时，$a+b+c$取最小值为$\frac{15}{2}$