

四川省内江市资中县 2018-2019 学年九年级（上）期中数学试卷

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分）

1. 计算 $\sqrt{3^2}$ 的结果是（ ）

- A. 3 B. -3 C. ± 3 D. $\sqrt{3}$

【分析】直接根据 $\sqrt{a^2}=|a|$ 化简即可.解： $\sqrt{3^2}=|3|=3$.

故选：A.

【点评】本题考查了二次根式的性质与化简： $\sqrt{a^2}=|a|$.

2. 下列代数式能作为二次根式被开方数的是（ ）

- A. $3 - \pi$ B. a C. a^2+1 D. $2x+4$

【分析】直接利用二次根式的定义分别分析得出答案.

解： A 、 $3 - \pi < 0$ ，则 $3 - a$ 不能作为二次根式被开方数，故此选项错误； B 、 a 的符号不能确定，则 a 不能作为二次根式被开方数，故此选项错误； C 、 a^2+1 一定大于 0，能作为二次根式被开方数，故此选项正确； D 、 $2x+4$ 的符号不能确定，则 a 不能作为二次根式被开方数，故此选项错误；

故选：C.

【点评】此题主要考查了二次根式的定义，正确把握二次根式的定义是解题关键.

3. 已知关于 x 的一元二次方程 $3x^2+4x-5=0$ ，下列说法正确的是（ ）

- A. 方程有两个相等的实数根
B. 方程有两个不相等的实数根
C. 没有实数根
D. 无法确定

【分析】先求出 Δ 的值，再判断出其符号即可.解： $\because \Delta = 4^2 - 4 \times 3 \times (-5) = 76 > 0$, $\therefore$ 方程有两个不相等的实数根.

故选：B.

【点评】本题考查的是根的判别式，熟知一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 的

根与 Δ 的关系是解答此题的关键.

4. 计算 $\sqrt{18}-\sqrt{2}$ 的结果为 ()

A. 4

B. $3\sqrt{2}$

C. $2\sqrt{2}$

D. 16

【分析】二次根式加减时, 可以先将二次根式化成最简二次根式, 再将被开方数相同的二次根式进行合并. 注意 $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

解: $\sqrt{18}-\sqrt{2}=3\sqrt{2}-\sqrt{2}=2\sqrt{2}$. 故选 C.

【点评】考查二次根式的加减运算, 注意只有被开方数相同的二次根式才能合并.

5. 在比例尺是 1: 40000 的地图上, 若某条道路长约为 5cm, 则它的实际长度约为 ()

A. 0.2km

B. 2km

C. 20km

D. 200km

【分析】根据比例尺=图上距离: 实际距离, 依题意列比例式直接求解即可.

解: 设这条道路的实际长度为 x , 则: $\frac{1}{40000}=\frac{5}{x}$,

解得 $x=200000\text{cm}=2\text{km}$.

$\therefore$ 这条道路的实际长度为 2km.

故选: B.

【点评】本题考查比例线段问题, 解题的关键是能够根据比例尺的定义构建方程, 注意单位的转换.

6. 若矩形的长和宽是方程 $x^2 - 7x + 12 = 0$ 的两根, 则矩形的对角线长度为 ()

A. 5

B. 7

C. 8

D. 10

【分析】设矩形的长和宽分别为 a 、 b , 根据根与系数的关系得到 $a+b=7$, $ab=12$, 利用勾股定理得到矩形的对角线长 $=\sqrt{a^2+b^2}$, 再利用完全平方公式和整体代入的方法可计算出矩形的对角线长为 5.

解: 设矩形的长和宽分别为 a 、 b ,

则 $a+b=7$, $ab=12$,

所以矩形的对角线长 $=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(a+b)^2-2ab}=\sqrt{7^2-2\times 12}=5$,

故选: A.

【点评】本题考查了根与系数的关系: 若 x_1, x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 的两根时, $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1x_2=\frac{c}{a}$. 也考查了矩形的性质.

7. 如果 x^2+ax+1 是一个完全平方式, 那么 a 的值是 ()

- A. 2 B. -2 C. ± 2 D. ± 1

【分析】完全平方式有两个: $a^2+2ab+b^2$ 和 $a^2-2ab+b^2$, 根据以上内容得出 $ax=\pm 2x$, 求出即可.

解: $\because x^2+ax+1$ 是一个完全平方式,

$$\therefore ax=\pm 2\cdot x\cdot 1,$$

解得: $a=\pm 2$,

故选: C.

【点评】本题考查了对完全平方公式的应用, 能根据题意得出 $ax=\pm 2\cdot x\cdot 1$ 是解此题的关键, 注意: 完全平方式有两个: $a^2+2ab+b^2$ 和 $a^2-2ab+b^2$.

8. 若 $2-\sqrt{3}$ 是方程 $x^2-4x+c=0$ 的一个根, 则 c 的值是 ()

- A. 1 B. $3-\sqrt{3}$ C. $1+\sqrt{3}$ D. $2+\sqrt{3}$

【分析】把 $2-\sqrt{3}$ 代入方程 $x^2-4x+c=0$ 就得到关于 c 的方程, 就可以解得 c 的值.

解: 把 $2-\sqrt{3}$ 代入方程 $x^2-4x+c=0$, 得 $(2-\sqrt{3})^2-4(2-\sqrt{3})+c=0$,

解得 $c=1$;

故选: A.

【点评】本题考查的是一元二次方程的根即方程的解的定义. 能使一元二次方程左右两边相等的未知数的值是一元二次方程的解. 又因为只含有一个未知数的方程的解也叫做这个方程的根, 所以, 一元二次方程的解也称为一元二次方程的根.

9. 已知 $\sqrt{a-3}+\sqrt{2-b}=0$, 则 $\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{b}}$ 的值为 ()

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

【分析】根据 $\sqrt{a-3}+\sqrt{2-b}=0$, 可以求得 a 、 b 的值, 从而可以求得所求式子的值, 本题得以解决.

解: $\because \sqrt{a-3}+\sqrt{2-b}=0$,

$$\therefore a-3=0, 2-b=0,$$

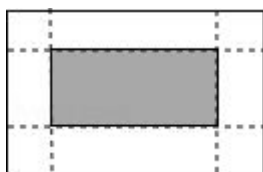
解得, $a=3$, $b=2$,

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

故选：D.

【点评】本题考查二次根式的化简求值、非负数的性质，解答本题的关键是明确题意，求出 a 、 b 的值.

10. 如图，有一张矩形纸片，长 10cm ，宽 6cm ，在它的四角各剪去一个同样的小正方形，然后折叠成一个无盖的长方体纸盒. 若纸盒的底面（图中阴影部分）面积是 32cm^2 ，求剪去的小正方形的边长. 设剪去的小正方形边长是 $x\text{cm}$ ，根据题意可列方程为（ ）



- A. $10 \times 6 - 4 \times 6x = 32$ B. $(10 - 2x)(6 - 2x) = 32$
C. $(10 - x)(6 - x) = 32$ D. $10 \times 6 - 4x^2 = 32$

【分析】设剪去的小正方形边长是 $x\text{cm}$ ，则纸盒底面的长为 $(10 - 2x)\text{cm}$ ，宽为 $(6 - 2x)\text{cm}$ ，根据长方形的面积公式结合纸盒的底面（图中阴影部分）面积是 32cm^2 ，即可得出关于 x 的一元二次方程，此题得解.

解：设剪去的小正方形边长是 $x\text{cm}$ ，则纸盒底面的长为 $(10 - 2x)\text{cm}$ ，宽为 $(6 - 2x)\text{cm}$ ，

根据题意得： $(10 - 2x)(6 - 2x) = 32$.

故选：B.

【点评】本题考查由实际问题抽象出一元二次方程，找准等量关系，正确列出一元二次方程是解题的关键.

11. 定义：如果一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 满足 $a - b + c = 0$ ，那么我们称这个方程为“蝴蝶”方程. 已知关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 是“蝴蝶”方程，且有两个相等的实数根，则下列结论中正确的是（ ）

- A. $b = c$ B. $a = b$ C. $a = c$ D. $a = b = c$

【分析】根据已知得出方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 有 $x = -1$ ，再判断即可.

把 $x = -1$ 代入方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 得出 $a - b + c = 0$,

$$\therefore b = a + c,$$

∵方程有两个相等的实数根，

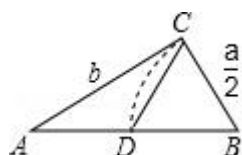
$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (a+c)^2 - 4ac = (a-c)^2 = 0,$$

$$\therefore a=c,$$

故选：C.

【点评】本题考查了一元二次方程的解，根的判别式，根与系数的关系的应用，主要考查学生的理解能力和计算能力.

12. 欧几里得的《原本》记载，形如 $x^2+ax=b^2$ 的方程的图解法是：画 $\text{Rt}\triangle ABC$ ，使 $\angle ACB=90^\circ$ ， $BC=\frac{a}{2}$ ， $AC=b$ ，再在斜边 AB 上截取 $BD=\frac{a}{2}$ ，则该方程的一个正根是（ ）



- A. AC 的长 B. AD 的长 C. BC 的长 D. CD 的长

【分析】表示出 AD 的长，利用勾股定理求出即可.

解：欧几里得的《原本》记载，形如 $x^2+ax=b^2$ 的方程的图解法是：画 $\text{Rt}\triangle ABC$ ，使 $\angle ACB=90^\circ$ ， $BC=\frac{a}{2}$ ， $AC=b$ ，再在斜边 AB 上截取 $BD=\frac{a}{2}$ ，

设 $AD=x$ ，根据勾股定理得： $(x+\frac{a}{2})^2=b^2+(\frac{a}{2})^2$ ，

整理得： $x^2+ax=b^2$ ，

则该方程的一个正根是 AD 的长，

故选：B.

【点评】此题考查了解一元二次方程 - 配方法，熟练掌握完全平方公式是解本题的关键.

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 请将最后答案直接写在答题卷的相应题中的横线上.）

13. (5 分) 若 $\frac{a}{b}=\frac{2}{9}$ ，则 $\frac{a+b}{b}=\frac{11}{9}$.

【分析】设 $a=2x$ ，则 $b=9x$ ，代入代数式即可求解.

解：设 $a=2x$ ，则 $b=9x$ ，

$$\text{故原式}=\frac{2x+9x}{9x}=\frac{11}{9}.$$

故答案是： $=\frac{11}{9}$.

【点评】本题考查了比例的性质，正确进行设未知数是关键.

14. (5分) 关于 x 的一元二次方程 $x^2+2x+m=0$ 有两个相等的实数根，则 m 的值是 1.

【分析】由于关于 x 的一元二次方程 $x^2+2x+m=0$ 有两个相等的实数根，可知其判别式为 0，据此列出关于 m 的方程，解答即可.

解：∵关于 x 的一元二次方程 $x^2+2x+m=0$ 有两个相等的实数根，

$$\therefore \Delta = 0,$$

$$\therefore 2^2 - 4m = 0,$$

$$\therefore m = 1,$$

故答案为：1.

【点评】本题主要考查了根的判别式的知识，解答本题的关键是掌握一元二次方程有两个相等的实数根，则可得 $\Delta = 0$ ，此题难度不大.

15. (5分) 若 $x = \sqrt{2} - 1$ ，则 $x^2+2x+1 =$ 2.

【分析】首先把所求的式子化成 $(x+1)^2$ 的形式，然后代入求值.

解：原式 $= (x+1)^2$ ，

当 $x = \sqrt{2} - 1$ 时，原式 $= (\sqrt{2})^2 = 2$.

【点评】本题考查了二次根式的化简求值，正确对所求式子进行变形是关键.

16. (5分) 对于任意实数 a 、 b ，定义： $a \blacklozenge b = a^2 + ab + b^2$. 若方程 $(x \blacklozenge 2) - 5 = 0$ 的两根记为 m 、 n ，则 $m^2 + n^2 =$ 6.

【分析】根据新定义可得出 m 、 n 为方程 $x^2+2x-1=0$ 的两个根，利用根与系数的关系可得出 $m+n = -2$ 、 $mn = -1$ ，将其代入 $m^2+n^2 = (m+n)^2 - 2mn$ 中即可得出结论.

解：∵ $(x \blacklozenge 2) - 5 = x^2 + 2x + 4 - 5$ ，

∴ m 、 n 为方程 $x^2+2x-1=0$ 的两个根，

$$\therefore m+n = -2, mn = -1,$$

$$\therefore m^2+n^2 = (m+n)^2 - 2mn = 6.$$

故答案为：6.

【点评】本题考查了根与系数的关系，牢记两根之和等于 $-\frac{b}{a}$ 、两根之积等于 $\frac{c}{a}$

是解题的关键.

三、解答题(本大题共5小题,共44分)

17. (9分) 计算下列各题:

(1) $\sqrt{24} \div \sqrt{8} \times \sqrt{3}$;

(2) $(\sqrt{3} - 1)^2 + \sqrt{12}$;

(3) $(-\sqrt{3}) \times (-\sqrt{6}) + |\sqrt{2} - 1| + (5 - 2\pi)^0$.

【分析】(1) 根据二次根式的乘除法则运算;

(2) 利用完全平方公式计算;

(3) 根据二次根式的乘法法则、绝对值的意义和零指数幂的意义运算;

解: (1) 原式 $= \sqrt{24 \div 8 \times 3}$

$= 3$;

(2) 原式 $= 3 - 2\sqrt{3} + 1 + 2\sqrt{3}$

$= 4$;

(3) 原式 $= \sqrt{3 \times 6} + \sqrt{2} - 1 + 1$

$= 3\sqrt{2} + \sqrt{2}$

$= 4\sqrt{2}$.

【点评】本题考查了二次根式的混合运算: 先把各二次根式化简为最简二次根式, 然后进行二次根式的乘除运算, 再合并即可. 在二次根式的混合运算中, 如能结合题目特点, 灵活运用二次根式的性质, 选择恰当的解题途径, 往往能事半功倍.

18. (9分) 用指定的方法解下列一元二次方程:

(1) $x^2 - 2x - 2 = 0$ (公式法);

(2) $2(x - 3) = 3x(x - 3)$ (因式分解法);

(3) $2x^2 - 4x + 1 = 0$ (配方法)

【分析】(1) 利用公式法即可求解;

(2) 利用因式分解法即可求解;

(3) 利用配方法解方程即可求解.

解: (1) $\because a = 1, b = -2, c = -2$,

$\therefore \Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 4 + 8 = 12 > 0$,

$$\text{则 } x = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3},$$

$$\therefore x_1 = 1 + \sqrt{3}, \quad x_2 = 1 - \sqrt{3};$$

$$(2) \because 2(x-3) = 3x(x-3),$$

$$\therefore 2(x-3) - 3x(x-3) = 0,$$

$$\text{则 } (2-3x)(x-3) = 0,$$

$$\therefore 2-3x=0 \text{ 或 } x-3=0,$$

$$\text{解得: } x_1 = \frac{2}{3}, \quad x_2 = 3;$$

$$(3) \because 2x^2 - 4x + 1 = 0,$$

$$\therefore 2x^2 - 4x = -1,$$

$$\therefore x^2 - 2x = -\frac{1}{2},$$

$$\text{则 } x^2 - 2x + 1 = -\frac{1}{2} + 1, \text{ 即 } (x-1)^2 = \frac{1}{2},$$

$$\therefore x-1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{则 } x_1 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

【点评】此题分别考查了一元二次方程的几种解法，解题的关键是根据不同方程的形式选择最佳方法解决问题。

19. (8分) 已知线段 $a=0.3m$, $b=60cm$, $c=12dm$.

(1) 求线段 a 与线段 b 的比.

(2) 如果线段 a 、 b 、 c 、 d 成比例，求线段 d 的长.

(3) b 是 a 和 c 的比例中项吗？为什么？

【分析】(1) 根据 $a=0.3m=30cm$; $b=60cm$ ，即可求得 $a:b$ 的值；

(2) 根据线段 a 、 b 、 c 、 d 是成比例线段，可得 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，再根据 $c=12dm=120cm$ ，

即可得出线段 d 的长；

(3) 根据 $b^2=3600$, $ac=30 \times 120=3600$ ，可得 $b^2=ac$ ，进而得出 b 是 a 和 c 的比例中项.

解：(1) $\because a=0.3m=30cm$; $b=60cm$,

$$\therefore a:b=30:60=1:2;$$

(2) $\because$ 线段 a 、 b 、 c 、 d 是成比例线段,

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

$$\because c=12dm=120cm,$$

$$\therefore \frac{1}{2} = \frac{120}{d},$$

$$\therefore d=240cm;$$

(3) 是, 理由:

$$\because b^2=3600, ac=30 \times 120=3600,$$

$$\therefore b^2=ac,$$

$\therefore b$ 是 a 和 c 的比例中项.

【点评】 本题主要考查了成比例线段, 判断四条线段是否成比例, 只要把四条线段按大小顺序排列好, 判断前两条线段之比与后两条线段之比是否相等即可; 求线段之比时, 要先统一线段的长度单位.

20. (9 分) 某公司今年 1 月份的生产成本是 400 万元, 由于改进技术, 生产成本逐月下降, 3 月份的生产成本是 361 万元.

假设该公司 2、3、4 月每个月生产成本的下降率都相同.

(1) 求每个月生产成本的下降率;

(2) 请你预测 4 月份该公司的生产成本.

【分析】 (1) 设每个月生产成本的下降率为 x , 根据 2 月份、3 月份的生产成本, 即可得出关于 x 的一元二次方程, 解之取其较小值即可得出结论;

(2) 由 4 月份该公司的生产成本 = 3 月份该公司的生产成本 $\times$ (1 - 下降率), 即可得出结论.

解: (1) 设每个月生产成本的下降率为 x ,

$$\text{根据题意得: } 400(1-x)^2=361,$$

$$\text{解得: } x_1=0.05=5\%, x_2=1.95 \text{ (不合题意, 舍去).}$$

答: 每个月生产成本的下降率为 5%.

$$(2) 361 \times (1-5\%) = 342.95 \text{ (万元).}$$

答：预测 4 月份该公司的生产成本为 342.95 万元.

【点评】 本题考查了一元二次方程的应用，解题的关键是：（1）找准等量关系，正确列出一元二次方程；（2）根据数量关系，列式计算.

21. (9 分) 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (2m+1)x + m^2 - 2 = 0$.

(1) 若该方程有两个实数根，求 m 的最小整数值；

(2) 若方程的两个实数根为 x_1, x_2 ，且 $(x_1 - x_2)^2 + m^2 = 21$ ，求 m 的值.

【分析】 (1) 利用判别式的意义得到 $\Delta = (2m+1)^2 - 4(m^2 - 2) \geq 0$ ，然后解不等式得到 m 的范围，再在此范围内找出最小整数值即可；
(2) 利用根与系数的关系得到 $x_1 + x_2 = -(2m+1)$ ， $x_1 x_2 = m^2 - 2$ ，再利用 $(x_1 - x_2)^2 + m^2 = 21$ 得到 $(2m+1)^2 - 4(m^2 - 2) + m^2 = 21$ ，接着解关于 m 的方程，然后利用 (1) 中 m 的范围确定 m 的值.

解：(1) 根据题意得 $\Delta = (2m+1)^2 - 4(m^2 - 2) \geq 0$,

解得 $m \geq -\frac{9}{4}$,

所以 m 的最小整数值为 -2;

(2) 根据题意得 $x_1 + x_2 = -(2m+1)$ ， $x_1 x_2 = m^2 - 2$,

$$\because (x_1 - x_2)^2 + m^2 = 21,$$

$$\therefore (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 + m^2 = 21,$$

$$\therefore (2m+1)^2 - 4(m^2 - 2) + m^2 = 21,$$

整理得 $m^2 + 4m - 12 = 0$ ，解得 $m_1 = 2$ ， $m_2 = -6$ ，

$$\because m \geq -\frac{9}{4},$$

$\therefore m$ 的值为 2.

【点评】 本题考查了根与系数的关系：若 x_1, x_2 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的两根时， $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ， $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$. 也考查了根的判别式.

四、填空题 (本大题共 4 小题，每小题 6 分，共 24 分. 请将最后答案直接写在答题卷的相应题中的横线上.)

22. (6 分) 如果 $\frac{a+1}{20} = \frac{b+1}{21} = \frac{a+b}{17}$ ，那么 $\frac{a}{b} = \frac{8}{9}$.

【分析】 设 $\frac{a+1}{20} = \frac{b+1}{21} = \frac{a+b}{17} = \frac{t}{1}$ ，然后根据比例的性质解三元一次方程组，最后将 a, b 的值代入所求解答即可.

解：设 $\frac{a+1}{20} = \frac{b+1}{21} = \frac{a+b}{17} = \frac{t}{1}$ ，则

$$\begin{cases} a+1=20t \\ b+1=21t, \\ a+b=17t \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} t=\frac{1}{12} \\ a=\frac{2}{3}, \\ b=\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{8}{9}.$$

【点评】本题集中考查了比例的基本性质、代数式求值及三元一次方程组的解法.

23. (6分) 如果恰好只有一个实数 a 是方程 $(k^2 - 9)x^2 - 2(k+1)x + 1 = 0$ 的根，
则 k 的值为 ± 3 或 -5 .

【分析】分原方程是一元一次方程和一元二次方程两种情况讨论即可得到答案.

解：当原方程是一个一元一次方程时，方程只有一个实数根，

则 $k^2 - 9 = 0$,

解得 $k = \pm 3$,

当原方程是一元二次方程时，

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0,$$

$$\text{即：} 4(k+1)^2 - 4(k^2 - 9) = 0$$

解得： $k = -5$.

故答案为 ± 3 或 -5 .

【点评】本题考查了根的判别式，同时还考查了分类讨论思想，是一道好题.

24. (6分) 若 a, b, c 是实数，且 $a = 2b + \sqrt{2}$ ， $ab + \frac{\sqrt{3}}{2}c^2 + \frac{1}{4} = 0$ ，那么 $\frac{b+c}{a}$ 的值为 $-\frac{1}{2}$.

【分析】将 $a = 2b + \sqrt{2}$ 代入 $ab + \frac{\sqrt{3}}{2}c^2 + \frac{1}{4} = 0$ 中，利用配方法将等式变形为两个非负数的和为 0 的形式，利用几个非负数的和为 0，这几个非负数都为 0，据此解答本题.

解：将 $a = 2b + \sqrt{2}$ 代入 $ab + \frac{\sqrt{3}}{2}c^2 + \frac{1}{4} = 0$,

$$\text{得: } (2b + \sqrt{2})b + \frac{\sqrt{3}}{2}c^2 + \frac{1}{4} = 0,$$

$$\text{整理, 得: } (\sqrt{2}b + \frac{1}{2})^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}c^2 = 0,$$

$$\therefore \sqrt{2}b + \frac{1}{2} = 0 \text{ 且 } c = 0,$$

$$\text{解得: } b = -\frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$\text{则 } a = 2 \times (-\frac{\sqrt{2}}{4}) + \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore \frac{b+c}{a} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4} + 0}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{1}{2},$$

$$\text{故答案为: } -\frac{1}{2}.$$

【点评】 本题主要考查二次根式的化简求值, 解题的关键是利用配方法将原式变形为几个非负数的和的形式, 并熟练掌握二次根式的运算顺序和运算法则.

25. (6分) 已知关于 x 的方程 $x^2 + 2kx + k^2 + k + 3 = 0$ 的两根分别是 x_1 、 x_2 , 则 $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2$ 的最小值是 8.

【分析】 利用根与系数的关系得 $x_1 + x_2 = -2k$, $x_1 \cdot x_2 = k^2 + k + 3$, $k \leq -3$, 再将 $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2$ 化简为 $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 2(x_1 + x_2)$, 代入即可求解.

解: $\because$ 关于 x 的方程 $x^2 + 2kx + k^2 + k + 3 = 0$ 的两根分别是 x_1 、 x_2 ,

$$\therefore x_1 + x_2 = -2k, \quad x_1 \cdot x_2 = k^2 + k + 3,$$

$$\because \Delta = 4k^2 - 4(k^2 + k + 3) = -4k - 12 \geq 0, \text{ 解得 } k \leq -3,$$

$$\therefore (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2$$

$$= x_1^2 - 2x_1 + 1 + x_2^2 - 2x_2 + 1$$

$$= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 2$$

$$= (-2k)^2 - 2(k^2 + k + 3) - 2(-2k) + 2$$

$$= 2k^2 + 2k - 4$$

$$= 2(k + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{2},$$

$$\because k \leq -3, \quad 2 \times (-3 + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{2} = 8,$$

$$\therefore 2(k + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{2} \geq 8,$$

故 $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2$ 的最小值是 8.

故答案为：8.

【点评】 本题考查了一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 的根与系数的关系： x_1 ， x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 的两根时， $x_1+x_2 = -\frac{b}{a}$ ， $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. 同时考查了配方法的应用.

五、解答题 (本大题共 3 小题，每小题 12 分，共 36 分. 解答时必须写出必要的文字说明、证明过程或推演步骤)

26. (12 分) 能力拓展： $A_1: \sqrt{2}-\sqrt{1}=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}$ ； $A_2: \sqrt{3}-\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ ； $A_3: \sqrt{4}-\sqrt{3}=\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}$ ； $A_4: \sqrt{5}-\sqrt{4}=\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}}$ ； $\cdots$ ； $A_n: \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

(1) 请观察 A_1 ， A_2 ， A_3 的规律，按照规律完成填空；

(2) 请比较下列代数式的大小：

① $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{2}-\sqrt{1}$ ； ② $\sqrt{7}-\sqrt{6}$ 和 $\sqrt{5}-\sqrt{4}$ ；

(3) 请直接写出 $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ 与 $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$ 的大小关系.

【分析】 (1) 观察 A_1 ， A_2 ， A_3 的规律可知，即可得到结论；

(2) 根据 (1) 的结论即可得到结果；

(3) 利用 (1) 的结论进行填空即可.

解：(1) 观察 A_1 ， A_2 ， A_3 的规律可知， $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ ，

故答案为： $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ ；

(2) $\because \sqrt{2}-\sqrt{1}=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}$ ； $\sqrt{3}-\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ ； $\frac{1}{\sqrt{2}+1} > \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ ，

$\therefore \sqrt{3}-\sqrt{2} < \sqrt{2}-\sqrt{1}$ ；

$\because \sqrt{7}-\sqrt{6}=\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$ ， $\sqrt{5}-\sqrt{4}=\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}}$ ； $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}} < \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}}$ ，

$\therefore \sqrt{7}-\sqrt{6} < \sqrt{5}-\sqrt{4}$ ；

(3) $\because \sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ ， $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$ ， $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$ ，

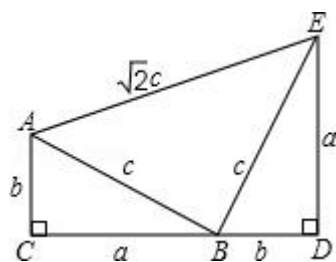
$\therefore \sqrt{n+1}-\sqrt{n} < \sqrt{n}-\sqrt{n-1}$.

【点评】 主要考查二次根式的有理化. 根据二次根式的乘除法法则进行二次根式有理化. 二次根式有理化主要利用了平方差公式，所以一般二次根式的有理化因式是符合平方差公式的特点的式子. 即一项符号和绝对值相同，另一项符号相反绝对值相同.

27. (12分) 如图, 四边形 $ACDE$ 是证明勾股定理时用到的一个图形, a, b, c 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 和 $\text{Rt}\triangle BED$ 边长, 易知 $AE=\sqrt{2}c$, 这时我们把关于 x 的形如 $ax^2+\sqrt{2}cx+b=0$ 的一元二次方程称为“勾系一元二次方程”.

请解决下列问题:

- (1) 写出一个“勾系一元二次方程”;
- (2) 求证: 关于 x 的“勾系一元二次方程” $ax^2+\sqrt{2}cx+b=0$ 必有实数根;
- (3) 若 $x=-1$ 是“勾系一元二次方程” $ax^2+\sqrt{2}cx+b=0$ 的一个根, 且四边形 $ACDE$ 的周长是 $6\sqrt{2}$, 求 $\triangle ABC$ 面积.



【分析】(1) 直接找一组勾股数代入方程即可;

(2) 通过判断根的判别式 Δ 的正负来证明结论;

(3) 利用根的意义和勾股定理作为相等关系先求得 c 的值, 根据完全平方公式求得 ab 的值, 从而可求得面积.

(1) 解: 当 $a=3, b=4, c=5$ 时

勾系一元二次方程为 $3x^2+5\sqrt{2}x+4=0$;

(2) 证明: 根据题意, 得

$$\Delta = (\sqrt{2}c)^2 - 4ab = 2c^2 - 4ab$$

$$\because a^2+b^2=c^2$$

$$\therefore 2c^2 - 4ab = 2(a^2+b^2) - 4ab = 2(a-b)^2 \geq 0$$

$$\text{即 } \Delta \geq 0$$

$\therefore$ 勾系一元二次方程 $ax^2+\sqrt{2}cx+b=0$ 必有实数根;

(3) 解: 当 $x=-1$ 时, 有 $a - \sqrt{2}c + b = 0$, 即 $a+b=\sqrt{2}c$

$$\because 2a+2b+\sqrt{2}c=6\sqrt{2}, \text{ 即 } 2(a+b) + \sqrt{2}c = 6\sqrt{2}$$

$$\therefore 3\sqrt{2}c = 6\sqrt{2}$$

$$\therefore c = 2$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2 = 4, \quad a + b = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$\therefore ab = 2$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab = 1.$$

【点评】此类题目要读懂题意，根据题目中所给的材料结合勾股定理和根的判别式解题.

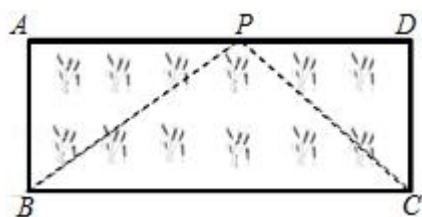
28. (12分) 我们在解决数学问题时，经常采用“转化”(或“化归”)的思想方法，即把待解决的问题，通过转化归结到一类已解决或比较容易解决的问题. 譬如，求解一元二次方程，通常把它转化为两个一元一次方程来解；求解分式方程，通常把它转化为整式方程来解，只是因为分式方程“去分母”时可能产生增根，所以解分式方程必须检验.

请你运用上述把“未知”转化为“已知”的数学思想，解决下列问题.

(1) 解方程： $x^3 + x^2 - 2x = 0$;

(2) 解方程： $\sqrt{2x+3} = x$;

(3) 如图，已知矩形草坪 $ABCD$ 的长 $AD = 8m$ ，宽 $AB = 3m$ ，小华把一根长为 $10m$ 的绳子的一端固定在点 B ，沿草坪边沿 BA 、 AD 走到点 P 处，把长绳 BP 段拉直并固定在点 P ，然后沿草坪边沿 PD 、 DC 走到点 C 处，把长绳剩下的一段拉直，长绳的另一端恰好落在点 C . 求 AP 的长.



【分析】(1) 因式分解多项式，然后得结论；

(2) 两边平方，把无理方程转化为整式方程，求解，注意验根；

(3) 设 AP 的长为 xm ，根据勾股定理和 $BP + CP = 10$ ，可列出方程，由于方程含有根号，两边平方，把无理方程转化为整式方程，求解，

解：(1) $x^3 + x^2 - 2x = 0$,

$$x(x^2+x-2)=0,$$

$$x(x+2)(x-1)=0$$

所以 $x=0$ 或 $x+2=0$ 或 $x-1=0$

$$\therefore x_1=0, x_2=-2, x_3=1;$$

$$(2) \sqrt{2x+3}=x,$$

方程的两边平方, 得 $2x+3=x^2$

$$\text{即 } x^2-2x-3=0$$

$$(x-3)(x+1)=0$$

$$\therefore x-3=0 \text{ 或 } x+1=0$$

$$\therefore x_1=3, x_2=-1,$$

当 $x=-1$ 时, $\sqrt{2x+3}=\sqrt{1}=1 \neq -1$,

所以 -1 不是原方程的解.

所以方程 $\sqrt{2x+3}=x$ 的解是 $x=3$;

(3) 因为四边形 $ABCD$ 是矩形,

所以 $\angle A = \angle D = 90^\circ$, $AB = CD = 3m$

设 $AP = xm$, 则 $PD = (8-x)m$

因为 $BP + CP = 10$,

$$BP = \sqrt{AP^2 + AB^2}, CP = \sqrt{CD^2 + PD^2} \therefore \sqrt{9+x^2} + \sqrt{(8-x)^2 + 9} = 10$$

$$\therefore \sqrt{(8-x)^2 + 9} = 10 - \sqrt{9+x^2},$$

两边平方, 得 $(8-x)^2 + 9 = 100 - 20\sqrt{9+x^2} + 9 + x^2$

整理, 得 $5\sqrt{9+x^2} = 4x+9$

两边平方并整理, 得 $x^2 - 8x + 16 = 0$

$$\text{即 } (x-4)^2 = 0$$

所以 $x=4$.

经检验, $x=4$ 是方程的解.

答: AP 的长为 $4m$.

【点评】 本题考查了转化的思想方法, 一元二次方程的解法. 解无理方程是注意

到验根. 解决 (3) 时, 根据勾股定理和绳长, 列出方程是关键.