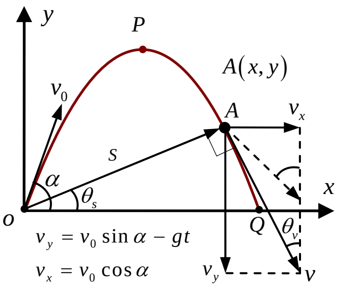
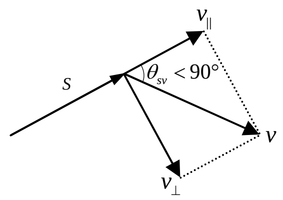
精解物理奥赛中的抛体问题（部分）

求解抛体运动的一般方法：法一，把抛体运动分解为沿初速度方向的匀速直线运动和竖直向下的自由落体运动来求解；法二，建立以水平方向为 x 轴，竖直方向为 y 轴的直角坐标系，利用抛体运动的轨迹方程求解；法三，建立适当直角坐标系，把抛体运动在两坐标轴上分解后列方程求解；法四，使用运动的相关定性知识点并结合前面三种方法求解。

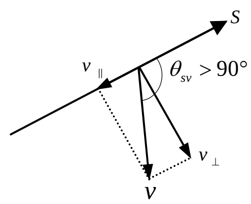
1.《新编高中物理奥赛题典》13 页 16 题：最大与地面成什么角度抛出石子，才能使石子在运动过程中始终远离抛出点？（不计空气影响）



(图 1-1)



(图 1-2)



(图 1-3)

解：(法一) 如图 1-1，设石子被抛出的初速度为 v_0，抛射角(初速度与水平方向的夹角)为 α；如图 1-2 和 1-3，把速度 $\bar{v}$ 分解为垂直于位移和平行于位移的两个分速度，其中，

a.当位移 $\vec{S}$ 与速度 $\bar{v}$ 的夹角小于 90° 时，平行于位移的分速度与位移同向，故位移大小将会进一步增大，如图 1-2；

b.当位移 $\vec{S}$ 与速度 $\bar{v}$ 的夹角大于 90° 时，平行于位移的分速度与位移反向，故位移大小将会进一步减小，如图 1-3；

c.当位移 $\vec{S}$ 与速度 $\bar{v}$ 的夹角等于 90° 时，平行于位移的分速度为零，这一时刻是位移由大变小的**临界点**.

由以上 a、b 和 c 的讨论可知，当位移 $\vec{S}$ 与速度 $\bar{v}$ 的夹角 $\theta_{sv} \le 90^\circ$ 时，石子始终远离抛出点；在小球从抛出点 o 运动到顶点 P 的过程中，显然，$\theta_{sv} \le 90^\circ$ 恒成立，即小球始终远离抛出点；在小球从顶点 P 开始以后的运动过程中，要使 $\theta_{sv} \le 90^\circ$ 成立，则要求 $\theta_v \ge \theta_s$（从图 1-1 可推知），

即有 $\tan\theta_v \ge \tan\theta_s$，也即是

$$\left(\tan\theta_v = \frac{v_x}{|v_y|} = \frac{v_0\cos\alpha}{gt - v_0\sin\alpha}\right) \ge \left(\tan\theta_s = \frac{y}{x} = \frac{v_{y0}t - gt^2/2}{v_x t} = \frac{v_0 t\sin\alpha - gt^2/2}{v_0 t\cos\alpha}\right),$$

即 $\dfrac{v_0\cos\alpha}{gt - v_0\sin\alpha} \ge \dfrac{v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2}{v_0 t\cos\alpha} \Rightarrow \dfrac{v_0\cos\alpha}{gt - v_0\sin\alpha} \ge \dfrac{v_0\sin\alpha - \frac{1}{2}gt}{v_0\cos\alpha} \Rightarrow g^2t^2 - 3gv_0 t\sin\alpha + 2v_0^2 \ge 0$，(1)

(1)式是关于 t 的一元二次不等式，其成立的条件是关于 t 的一元二次方程 $g^2t^2 - 3gv_0 t\sin\alpha + 2v_0^2 = 0$ 的判别式 $\Delta \le 0$，即 $9g^2v_0^2\sin^2\alpha - 8g^2v_0^2 \le 0 \Rightarrow \sin^2\alpha \le 8/9$，又因 α 为锐角，故 $\alpha \le \arcsin\sqrt{8/9}$.

解：(法二)以抛出点为原点 o，水平方向为 x 轴，竖直向上为 y 轴建立笛卡尔坐标系（即直角坐标系）；因石子在水平方向上不受外力作用，故石子在水平方向上做匀速直线运动，即在 x 上有 $x = v_x t$，即是

$$x = v_0 t\cos\alpha\,, \qquad (1)$$

因石子在竖直方向上只受重力作用，故石子在该方向做竖直上抛运动，即在 y 上有 $y=v_{y0}t+\frac{1}{2}a_y t^2$，即

$$y=v_0 t\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2 \text{(显然是以 } y \text{ 轴正向为正方向)}, \qquad (2)$$

联解(1)和(2)可得到石子斜抛的轨迹方程为

$$y=x\tan\alpha-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2, \qquad (3)$$

如图 1-1，"石子始终远离抛出点"这一条件等价于"轨迹上任意点 $A(x,y)$ 到原点 $o(0,0)$ 的距离 l 是关于 x 或 y 的增函数"，即是 $l=\sqrt{x^2+y^2}$ 是关于 x 或 y 的增函数，考虑到(3)式可以得到

$$l=\sqrt{x^2+\left(x\tan\alpha-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2\right)^2}\Rightarrow l^2=\frac{1}{\cos^2\alpha}x^2-\frac{g\sin\alpha}{v_0^2\cos^3\alpha}x^3+\frac{g^2}{4v_0^4\cos^4\alpha}x^4,$$

$$\Rightarrow L(x)=l^2(x)=\left(1+\tan^2\alpha\right)x^2-\frac{g\sin\alpha}{v_0^2\cos\alpha}\left(1+\tan^2\alpha\right)x^3+\frac{g^2}{4v_0^4}\left(1+\tan^2\alpha\right)^2x^4, \qquad (4)$$

在(4)式中，应用了 $\frac{1}{\cos^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=1+\tan^2\alpha$；在(4)式中，$L(x)$ 是增函数的条件是：函数 $L(x)$ 对 x 的一阶导数大于等于零（等于零是临界点），即是

$$L'(x)=\frac{d}{dx}L(x)=2\left(1+\tan^2\alpha\right)x-\frac{3g\sin\alpha}{v_0^2\cos\alpha}\left(1+\tan^2\alpha\right)x^2+\frac{g^2}{v_0^4}\left(1+\tan^2\alpha\right)^2x^3\geq 0,$$

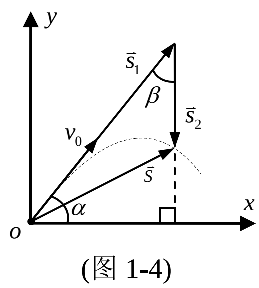
即有: $\left(1+\tan^2\alpha\right)x\left[2-\frac{3g\sin\alpha}{v_0^2\cos\alpha}x+\frac{g^2}{v_0^4}\left(1+\tan^2\alpha\right)x^2\right]\geq 0$，在该问题中，$x$ 恒大于零，故有

$$\frac{g^2}{v_0^4}\left(1+\tan^2\alpha\right)x^2-\frac{3g\sin\alpha}{v_0^2\cos\alpha}x+2\geq 0\Rightarrow\frac{g^2}{v_0^4\cos^2\alpha}x^2-\frac{3g\sin\alpha}{v_0^2\cos\alpha}x+2\geq 0, \qquad (5)$$

(5)式成立的条件是关于 x 的一元二次方程 $\frac{g^2}{v_0^4\cos^2\alpha}x^2-\frac{3g\sin\alpha}{v_0^2\cos\alpha}x+2=0$ 的判别式小于等于零，即是

$\Delta=b^2-4ac=\left(\frac{3g\sin\alpha}{v_0^2\cos\alpha}\right)^2-\frac{8g^2}{v_0^4\cos^2\alpha}\leq 0$，即是 $\sin^2\alpha\leq 8/9$，又因 α 为锐角，故 $\alpha\leq\arcsin\sqrt{8/9}$.

解：(法三)如图 1-1，设石子被抛出的初速度为 v_0，抛射角为 α，把石子的运动分解为沿初速度方向的匀速直线运动和竖直向下的自由落体运动，如图 1-4，因 $s_1=v_0t$，$s_2=gt^2/2$，由余弦定理可得 $s^2=s_1^2+s_2^2-2s_1s_2\cos\beta$，即是



(图 1-4)

$$s^2=v_0^2t^2+g^2t^4/4-2(v_0t)\cdot\left(gt^2/2\right)\cos\left(90^\circ-\alpha\right)$$

即得 $s^2=g^2t^4/4-gv_0t^3\cos\left(90^\circ-\alpha\right)+v_0^2t^2$，"石子始终远离抛出点"这一条

件等价于函数 $L(t)=\frac{1}{4}g^2t^4-gv_0t^3\cos(90°-\alpha)+v_0^2t^2$ 是增函数，即是要求 $L'(t)\ge 0$，即是

$g^2t^3-3gv_0t^2\cos(90°-\alpha)+2v_0^2t\ge 0\Rightarrow t\left(g^2t^2-3gv_0t\cos(90°-\alpha)+2v_0^2\right)\ge 0$，因 $t>0$，故有

$g^2t^2-3gv_0t\cos(90°-\alpha)+2v_0^2\ge 0\Rightarrow \Delta=b^2-4ac\le 0\Rightarrow 9g^2v_0^2\cos^2(90°-\alpha)-8g^2v_0^2\le 0$，即是

$\cos^2(90°-\alpha)\le 8/9\Rightarrow \sin^2\alpha\le 8/9$，又因 α 为锐角，故 $\alpha\le\arcsin\sqrt{8/9}$.

2.《新编高中物理奥赛题典》15 页 19 题：一枪从同一地点发出两颗子弹，发射的时间间隔为 Δt，若两子弹在同一平面内运动，证明两子弹相遇的条件是

$$\frac{\sin\left[(\alpha_1-\alpha_2)/2\right]}{\cos\left[(\alpha_1+\alpha_2)/2\right]}=\frac{g\Delta t}{2v_0},$$

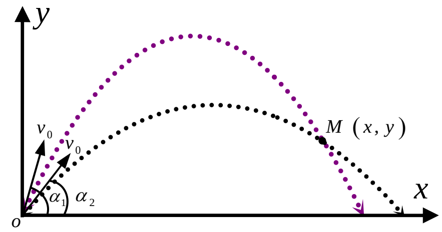


图 2-1

其中，α_1、α_2 是两次发射子弹的仰角，v_0 是发射的初速度，如图 2-1。

证：(法一)依题意，仰角为 α_1 的子弹先发射，仰角为 α_2 的子弹后发射，从以仰角 α_1 发射子弹时开始计时，当两子弹相遇时，两子弹在水平方向上和竖直方向上的位移分别相等，即是

在 x 上：$x_1=x_2\Leftrightarrow(v_0\cos\alpha_1)t=(v_0\cos\alpha_2)(t-\Delta t)$，

$$\Rightarrow t=\frac{\Delta t\cos\alpha_2}{\cos\alpha_2-\cos\alpha_1};\quad t-\Delta t=\frac{\Delta t\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2-\cos\alpha_1}\qquad(1)$$

在 y 上：$y_1=y_2\Leftrightarrow(v_0\sin\alpha_1)t-\frac{1}{2}gt^2=(v_0\sin\alpha_2)(t-\Delta t)-\frac{1}{2}g(t-\Delta t)^2$，(2)

把(1)式代入(2)式计算得到

$$(v_0\sin\alpha_1)\frac{\Delta t\cos\alpha_2}{\cos\alpha_2-\cos\alpha_1}-\frac{g}{2}\left(\frac{\Delta t\cos\alpha_2}{\cos\alpha_2-\cos\alpha_1}\right)^2=(v_0\sin\alpha_2)\frac{\Delta t\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2-\cos\alpha_1}-\frac{g}{2}\left(\frac{\Delta t\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2-\cos\alpha_1}\right)^2,$$

$$\Rightarrow (v_0\sin\alpha_1)\Delta t\cos\alpha_2-\frac{1}{2}g\frac{\Delta t^2\cos^2\alpha_2}{\cos\alpha_2-\cos\alpha_1}=(v_0\sin\alpha_2)\Delta t\cos\alpha_1-\frac{1}{2}g\frac{\Delta t^2\cos^2\alpha_1}{\cos\alpha_2-\cos\alpha_1},$$

$$\Rightarrow v_0\Delta t(\sin\alpha_1\cos\alpha_2-\sin\alpha_2\cos\alpha_1)=\frac{1}{2}g\Delta t^2\frac{\cos^2\alpha_2-\cos^2\alpha_1}{\cos\alpha_2-\cos\alpha_1},$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha_1-\alpha_2)=\frac{g\Delta t}{2v_0}(\cos\alpha_1+\cos\alpha_2)\Rightarrow\frac{\sin(\alpha_1-\alpha_2)}{\cos\alpha_1+\cos\alpha_2}=\frac{g\Delta t}{2v_0},$$

$$\Rightarrow \frac{2\sin\left[(\alpha_1-\alpha_2)/2\right]\cos\left[(\alpha_1-\alpha_2)/2\right]}{2\cos\left[(\alpha_1+\alpha_2)/2\right]\cos\left[(\alpha_1-\alpha_2)/2\right]}=\frac{g\Delta t}{2v_0}\Rightarrow\frac{\sin\left[(\alpha_1-\alpha_2)/2\right]}{\cos\left[(\alpha_1+\alpha_2)/2\right]}=\frac{g\Delta t}{2v_0},\text{证毕.}$$

证：(法二)依题意，仰角为 α_1 的子弹先发射，仰角为 α_2 的子弹后发射，从以仰角 α_1 发射子弹时开始计时，当两子弹相遇时，两子弹在水平方向上和竖直方向上的位移分别相等，即是

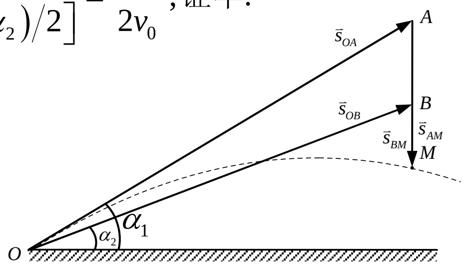


图 2-2

在 x 上: $x_1 = x_2 \Rightarrow (v_0\cos\alpha_1)t = (v_0\cos\alpha_2)(t-\Delta t) \Rightarrow t = \dfrac{\Delta t\cos\alpha_2}{\cos\alpha_2-\cos\alpha_1}, t-\Delta t = \dfrac{\Delta t\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2-\cos\alpha_1}$. (1)

斜抛运动可以被分解为沿初速度方向的匀速直线运动和沿竖直向下方向的自由落体运动，如图 2-2，当第一颗子弹到达相遇点 $M(x,y)$ 时，它的实际位移（合位移）$\vec{s}_{OM} = \vec{s}_{OA} + \vec{s}_{AM}$，显然，$\vec{s}_{OA} = v_0 t$，$\vec{s}_{AM} = \dfrac{1}{2}gt^2$；当第二颗子弹到达相遇点 $M(x,y)$ 时，它的实际位移（合位移）$\vec{s}_{OM} = \vec{s}_{OB} + \vec{s}_{BM}$，显然，$\vec{s}_{OB} = v_0(t-\Delta t)$，$\vec{s}_{BM} = \dfrac{1}{2}g(t-\Delta t)^2$.

如图 2-2，在三角形 OAB 中，由余弦定理有 $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2\cdot OA\cdot OB\cdot\cos(\alpha_1-\alpha_2)$，因为 $AB = |\vec{s}_{AM} - \vec{s}_{BM}| = \dfrac{1}{2}gt^2 - \dfrac{1}{2}g(t-\Delta t)^2$；$OA = |\vec{s}_{OA}| = v_0 t$；$OB = |\vec{s}_{OB}| = v_0(t-\Delta t)$，所以

$$\left[\frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}g(t-\Delta t)^2\right]^2 = (v_0 t)^2 + \left[v_0(t-\Delta t)\right]^2 - 2(v_0 t)\left[v_0(t-\Delta t)\right]\cos(\alpha_1-\alpha_2), \qquad (2)$$

把(1)式代入(2)式整理得到

$$\left[\frac{1}{2}g\left(\frac{\Delta t\cos\alpha_2}{\cos\alpha_2-\cos\alpha_1}\right)^2 - \frac{1}{2}g\left(\frac{\Delta t\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2-\cos\alpha_1}\right)^2\right]^2$$

$$= \left(\frac{v_0\Delta t\cos\alpha_2}{\cos\alpha_2-\cos\alpha_1}\right)^2 + \left(\frac{v_0\Delta t\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2-\cos\alpha_1}\right)^2 - 2\left(\frac{v_0\Delta t\cos\alpha_2}{\cos\alpha_2-\cos\alpha_1}\right)\left(\frac{v_0\Delta t\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2-\cos\alpha_1}\right)\cos(\alpha_1-\alpha_2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}g^2\left(\frac{\Delta t}{\cos\alpha_2-\cos\alpha_1}\right)^4\left(\cos^2\alpha_2-\cos^2\alpha_1\right)^2$$

$$= \left(\frac{v_0\Delta t\cos\alpha_2}{\cos\alpha_2-\cos\alpha_1}\right)^2 + \left(\frac{v_0\Delta t\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2-\cos\alpha_1}\right)^2 - 2\left(\frac{v_0\Delta t\cos\alpha_2}{\cos\alpha_2-\cos\alpha_1}\right)\left(\frac{v_0\Delta t\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2-\cos\alpha_1}\right)\cos(\alpha_1-\alpha_2)$$

$$\Rightarrow \frac{g^2\Delta t^2}{4v_0^2}\left(\frac{1}{\cos\alpha_2-\cos\alpha_1}\right)^4(\cos\alpha_2+\cos\alpha_1)^2(\cos\alpha_2-\cos\alpha_1)^2$$

$$= \left(\frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_2-\cos\alpha_1}\right)^2 + \left(\frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2-\cos\alpha_1}\right)^2 - 2\left(\frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_2-\cos\alpha_1}\right)\left(\frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2-\cos\alpha_1}\right)\cos(\alpha_1-\alpha_2)$$

$$\Rightarrow \left(g^2\Delta t^2/4v_0^2\right)(\cos\alpha_2+\cos\alpha_1)^2$$

$$= \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_1 - 2\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cos(\alpha_1-\alpha_2)$$

$$= \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_1 - \left[\cos(\alpha_1+\alpha_2)+\cos(\alpha_1-\alpha_2)\right]\cos(\alpha_1-\alpha_2)$$

$$= \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_1 - \cos(\alpha_1+\alpha_2)\cos(\alpha_1-\alpha_2) - \cos^2(\alpha_1-\alpha_2)$$

$$= \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_1 - (\cos2\alpha_1+\cos2\alpha_2)/2 - \cos^2(\alpha_1-\alpha_2)$$

$$= \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_1 - \left[(2\cos^2\alpha_1-1)+(2\cos^2\alpha_2-1)\right]/2 - \cos^2(\alpha_1-\alpha_2)$$

$$= 1-\cos^2(\alpha_1-\alpha_2)$$

$$\Rightarrow \left(g^2\Delta t^2/4v_0^2\right)(\cos\alpha_2+\cos\alpha_1)^2 = \sin^2(\alpha_1-\alpha_2)$$

$$\Rightarrow (g\Delta t/2v_0)(\cos\alpha_2+\cos\alpha_1)=\sin(\alpha_1-\alpha_2)\Rightarrow (g\Delta t/2v_0)=\sin(\alpha_1-\alpha_2)/(\cos\alpha_2+\cos\alpha_1)$$

$$\Rightarrow \frac{g\Delta t}{2v_0}=\frac{2\sin[(\alpha_1-\alpha_2)/2]\cos[(\alpha_1-\alpha_2)/2]}{2\cos[(\alpha_1+\alpha_2)/2]\cos[(\alpha_1-\alpha_2)/2]}\Rightarrow \frac{\sin[(\alpha_1-\alpha_2)/2]}{\cos[(\alpha_1+\alpha_2)/2]}=\frac{g\Delta t}{2v_0}$$,证毕。

3.《新编高中物理奥赛题典》14 页 18 题：如图 3-1 所示，一仓库高 $25\,\mathrm{m}$，宽 $40\,\mathrm{m}$，今在仓库前 $l\,\mathrm{m}$、高 $5\,\mathrm{m}$ 的 A 处抛一石子，使石子抛过屋顶。问 l 多大时，初速度 v_0 的值最小？（不计空气影响，$g=10\,m/s^2$）

解：（法一）用到结论：在水平地面上以初速度 v_0 抛出物体，当抛射角为 $45°$ 时物体被抛出的水平距离最远。或表述为：要把物体从地面上抛出一定的水平距离，当以 $45°$ 的抛射角抛出时初速度 v_0 最小。

如图 3-2，石子经过 B 点时的速度方向与水平方向成 $45°$ 时，石子能以最小的速度 v_B 越过宽为 40m 的仓库顶 BC，则

$s=(v_B\cos45°)t$，$v_t=v_0+at\Rightarrow -v_B\sin45°=v_B\sin45°+(-g)t$

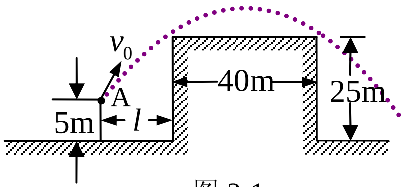


图 3-1

代入数据可得到 $v_B=20\,\mathrm{m/s}$.

对石子从抛出点运动到 B 点的过程，有

在竖直方向上：$(v_B\sin45°)^2-(v_0\sin\theta)^2=2(-g)(H-h)$，(1)

在水平方向上：$l=(v_B\cos45°)[(v_B\sin45°-v_0\sin\theta)/(-g)]$，(2)

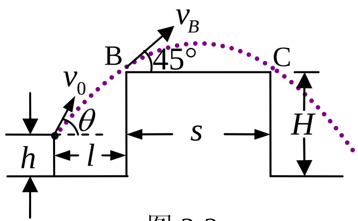


图 3-2

代入数据联解(1)和(2)的可得 $l=20(\sqrt{3}-1)\doteq14.64(\mathrm{m})$

解法一中用到结论的证明：令物体被抛出的初速度为 v_0，抛射角为 α，水平位移为 x，如插图 3-1 有

在竖直方向上: $v_t=v_0+at\Rightarrow -v_0\sin\alpha=v_0\sin\alpha+(-g)t$，(1)

在水平方向上: $x=v_0t\Rightarrow x=(v_0\cos\alpha)t$，(2)

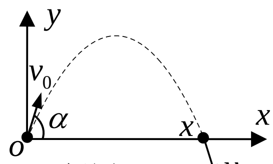


插图 3-1

联解(1)和(2)可得 $x=v_0^2\sin2\alpha/g$，显然，当 $\alpha=45°$ 时，x 取最大值 $x_{\max}=v_0^2/g$，证毕.

解：（法二）以抛出点 A 为原点建立如图 3-3 所示的坐标系，则石子运动的轨迹方程为(参考第 1 题解法二)

$$y=x\tan\theta-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2, \qquad (1)$$

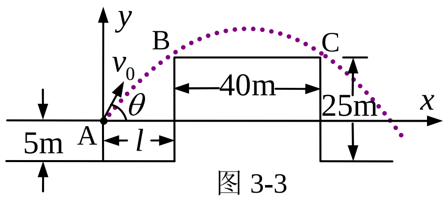


图 3-3

如图 3-3，点 B$(l,20)$ 和点 C$(l+40,20)$ 在物体的轨迹方程上，

(这种方法是不考虑这两点的特殊性，是一般的处理方法,法三考虑了这两点的特殊性,要简单一些)，即有

$$\begin{cases} 20=l\tan\theta-\dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}l^2, & (2)\\ 20=(l+40)\tan\theta-\dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}(l+40)^2, & (3)\end{cases}$$

由(2)和(3)可得$l\tan\theta-\dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}l^2=(l+40)\tan\theta-\dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}(l+40)^2\Rightarrow\sin2\theta=\dfrac{g(2l+40)}{v_0^2}$.

因为$\tan\theta=\dfrac{\sin2\theta}{1+\cos2\theta}=\dfrac{\sin2\theta}{1+\sqrt{1-\sin^2 2\theta}}=\dfrac{g(2l+40)}{v_0^2+\sqrt{v_0^4-g^2(2l+40)^2}}(0<\theta<90^\circ)$, (4)

$$\frac{1}{\cos^2\theta}=\frac{2}{1+\cos2\theta}=\frac{2}{1+\sqrt{1-\sin^2 2\theta}}=\frac{2v_0^2}{v_0^2+\sqrt{v_0^4-g^2(2l+40)^2}}(0<\theta<90^\circ), \quad (5)$$

把(4)式和(5)式代入(2)式可得

$$20=l\frac{g(2l+40)}{v_0^2+\sqrt{v_0^4-g^2(2l+40)^2}}-\frac{g}{2v_0^2}\frac{2v_0^2}{v_0^2+\sqrt{v_0^4-g^2(2l+40)^2}}l^2$$

$$\Rightarrow\sqrt{v_0^4-g^2(2l+40)^2}=\frac{gl^2+40gl}{20}-v_0^2\Rightarrow v_0^4-g^2(2l+40)^2=\left(\frac{gl^2+40gl}{20}\right)^2+v_0^4-\frac{gl^2+40gl}{10}v_0^2$$

$$\Rightarrow v_0^2=\left(\frac{l+40}{20}\right)^2\frac{10gl}{l+40}+(2l+40)^2\frac{10g}{l^2+40l}\Rightarrow v_0^2=\frac{(l+40)gl}{40}+\frac{40g(l+20)^2}{l^2+40l}$$

$$\Rightarrow v_0^2=\frac{(l+40)l}{4}+\frac{400(l+20)^2}{l^2+40l}\Rightarrow v_0^2=\frac{(l^2+40l)^2+2\times800(l^2+40l)+800^2}{4(l^2+40l)}$$

$$\Rightarrow v_0^2=\frac{l^2+40l}{4}+\frac{400^2}{l^2+40l}+400\ge2\sqrt{\frac{l^2+40l}{4}\frac{400^2}{l^2+40l}}+400\Rightarrow v_0\ge20\sqrt{2}$$

(以上用到不等式$(a-b)^2\ge0\Rightarrow a^2+b^2-2ab\ge0\Rightarrow a^2+b^2\ge2ab\Rightarrow c+d\ge2\sqrt{cd}\,(c>0,d>0)$，当$c=d$时，不等式取等号。)

当$\dfrac{l^2+40l}{4}=\dfrac{400^2}{l^2+40l}$时，不等式$v_0^2=\dfrac{(l^2+40l)}{4}+\dfrac{400^2}{(l^2+40l)}+400\ge2\sqrt{\dfrac{(l^2+40l)}{4}\dfrac{400^2}{(l^2+40l)}}+400$取等号，这时 v_0取最小值$v_{0\min}=20\sqrt{2}(\mathrm{m}/s)$。此时，由方程$\dfrac{l^2+40l}{4}=\dfrac{400^2}{l^2+40l}$可得$l=20(\sqrt{3}-1)(\mathrm{m})$。

解：（法三）以抛出点 A 为原点建立如图 3-3 所示的坐标系，则石子运动的轨迹方程为(参考第 1 题解法二)

$$y=x\tan\theta-\left(g/2v_0^2\cos^2\theta\right)x^2, \quad (1)$$

如图 3-3，点 B$(l,20)$和点 C$(l+40,20)$在物体的轨迹方程上，因这两点的纵坐标相同，故可知$x_1=l$和$x_2=l+40$是关于x的一元二次方程$20=x\tan\theta-\left(g/2v_0^2\cos^2\theta\right)x^2$的两个根，所以，由韦达定理可得

$$\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}\Rightarrow2l+40=-\dfrac{-\tan\theta}{g/(2v_0^2\cos^2\theta)}\Rightarrow l+20=\dfrac{v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}, & (2)\\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}\Rightarrow l(l+40)=\dfrac{40v_0^2\cos^2\theta}{g}, & (3)\end{cases}$$

由(3)÷(2)可得 $\tan\theta=\dfrac{40(l+20)}{l(l+40)}$；由 $\tan\theta$ 的关系式可推出 $\dfrac{1}{\cos^2\theta}=\dfrac{l^2(l+40)^2+40^2(l+20)^2}{l^2(l+40)^2}$.

把点 $\mathrm{B}(l,20)$ 代入(1)可得 $20=l\tan\theta-\dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}l^2$，再把 $\tan\theta$ 和 $\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ 的关系式代入后可得

$$20=\frac{40(l+20)}{l+40}-\frac{gl^2(l+40)^2+40^2g(l+20)^2}{2v_0^2(l+40)^2}\Rightarrow 2=\frac{4(l+20)}{l+40}-\frac{l^2(l+40)^2+40^2(l+20)^2}{2v_0^2(l+40)^2}$$

$$\Rightarrow v_0^2=\frac{l^2(l+40)^2+40^2(l+20)^2}{4l(l+40)}=\frac{(l^2+40l)^2+2\times800(l^2+40l)+800^2}{4(l^2+40l)}$$

$$\Rightarrow v_0^2=\frac{l^2+40l}{4}+\frac{400^2}{l^2+40l}+400\geq 2\sqrt{\frac{l^2+40l}{4}\frac{400^2}{l^2+40l}}+400\Rightarrow v_0\geq 20\sqrt{2}$$

当 $\dfrac{l^2+40l}{4}=\dfrac{400^2}{l^2+40l}$ 时，不等式 $v_0^2=\dfrac{(l^2+40l)}{4}+\dfrac{400^2}{(l^2+40l)}+400\geq 2\sqrt{\dfrac{(l^2+40l)}{4}\dfrac{400^2}{(l^2+40l)}}+400$ 取等号，这时 v_0 取最小值 $v_{0\min}=20\sqrt{2}\,(\mathrm{m/s})$。此时，由方程 $\dfrac{l^2+40l}{4}=\dfrac{400^2}{l^2+40l}$ 可得 $l=20(\sqrt{3}-1)(\mathrm{m})$。

4.《新编高中物理奥赛题典》13 页 17 题：如图 4-1 所示，一个斜面体的倾角分别为 θ 和 φ，一个小球从倾角为 θ 的斜面底角处做斜上抛运动，为了使小球能够从斜面体的顶端切过并落在倾角为 φ 的斜面底角处，则物体的抛射角 α 与倾角 θ 和 φ 应满足什么关系？

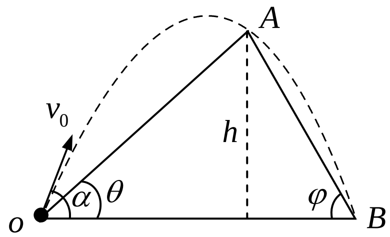


图 4-1

解：建立如图 4-2 所示的 $o-xy$ 坐标系，显然，点 $A(h\cot\theta,h)$ 和点 $B(h\cot\theta+h\cot\varphi,0)$ 在抛物线上，即点 A 与点 B 满足该抛物线的轨迹方程，而抛物线的轨迹方程写为（参考第 1 题解法二）

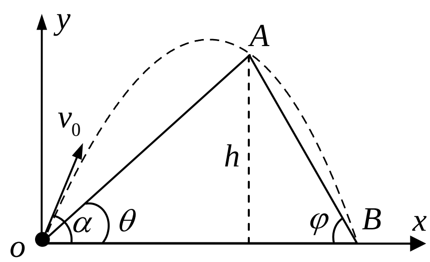


图 4-2

$$y=x\tan\alpha-\left(g/2v_0^2\cos^2\alpha\right)x^2,\qquad(1)$$

故把点 $A(h\cot\theta,h)$ 和点 $B(h\cot\theta+h\cot\varphi,0)$ 代入 (1) 式可得

$$\begin{cases}h=h\cot\theta\tan\alpha-\left(g/2v_0^2\cos^2\alpha\right)(h\cot\theta)^2, & (2)\\ 0=(h\cot\theta+h\cot\varphi)\tan\alpha-\left(g/2v_0^2\cos^2\alpha\right)(h\cot\theta+h\cot\varphi)^2. & (3)\end{cases}$$

由 $(2)-(3)$ 可得 $\dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}=\dfrac{1+\tan\alpha\cot\varphi}{h\cot^2\varphi+2h\cot\theta\cot\varphi}$,　　(4)

把(4)式代入(2)式可得

$$h=h\cot\theta\tan\alpha-\frac{1+\tan\alpha\cot\varphi}{h\cot^2\varphi+2h\cot\theta\cot\varphi}(h\cot\theta)^2,$$

$$\Rightarrow 1+\frac{(1+\tan\alpha\cot\varphi)\cot^2\theta}{\cot^2\varphi+2\cot\theta\cot\varphi}=\tan\alpha\cot\theta,$$

$$\Rightarrow \frac{\cot^2\varphi+2\cot\theta\cot\varphi+\left(\cot^2\theta+\tan\alpha\cot^2\theta\cot\varphi\right)}{\cot^2\varphi+2\cot\theta\cot\varphi}=\tan\alpha\cot\theta,$$

$$\Rightarrow \cot^2\varphi+2\cot\theta\cot\varphi+\cot^2\theta+\tan\alpha\cot^2\theta\cot\varphi=\tan\alpha\left(\cot\theta\cot^2\varphi+2\cot^2\theta\cot\varphi\right),$$

$$\Rightarrow \cot^2\varphi+2\cot\theta\cot\varphi+\cot^2\theta=\tan\alpha\left(\cot\theta\cot^2\varphi+\cot^2\theta\cot\varphi\right),$$

$$\Rightarrow \frac{\cot^2\varphi+2\cot\theta\cot\varphi+\cot^2\theta}{\cot\theta\cot^2\varphi+\cot^2\theta\cot\varphi}=\tan\alpha\Rightarrow\frac{(\cot\varphi+\cot\theta)^2}{\cot\theta\cot\varphi(\cot\varphi+\cot\theta)}=\tan\alpha,$$

$$\Rightarrow \frac{\cot\varphi+\cot\theta}{\cot\theta\cot\varphi}=\tan\alpha\Rightarrow\tan\theta+\tan\varphi=\tan\alpha.$$

5.在投掷铅球时，若铅球离开手时的高度为h，速度为v_0，则铅球的最远射程是多少？对应的抛射角θ是多少？

解：（**法一**）把铅球的运动分解为沿初速度方向的匀速直线运动和竖直向下的自由落体运动来求解。设抛射角为θ，依题意，如图 5-1 可得

$$s_{oo'}^2=(v_0t)^2-\left(\frac{1}{2}gt^2-h\right)^2，即\ s_{oo'}^2=-\frac{1}{4}g^2t^4+\left(v_0^2+gh\right)t^2-h^2.$$

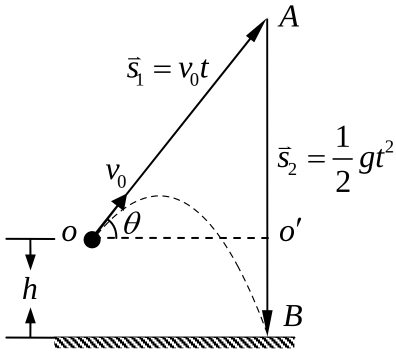


图 5-1

显然，当$t^2=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{2\left(v_0^2+gh\right)}{g^2}$时，$s_{oo'}^2$取最大值，即得

$$s_{oo'\max}=v_0\sqrt{v_0^2+2gh}\Big/g\ .$$

$s_{oo'}$取最大时，如图 5-1 可得

$$\cos\theta=\frac{s_{oo'\max}}{v_0t}=\frac{v_0\sqrt{v_0^2+2gh}\Big/g}{v_0\sqrt{2\left(v_0^2+gh\right)}\Big/g}=\frac{\sqrt{v_0^2+2gh}}{\sqrt{2v_0^2+2gh}}，故\ \theta=arc\cos\frac{\sqrt{v_0^2+2gh}}{\sqrt{2v_0^2+2gh}}.$$

解：（**法二**）用抛体的轨迹方程求解。以抛出点为原点，建立如图 5-2 所示的直角坐标系，显然，铅球运动的轨迹方程写为

$y=x\tan\theta-\dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2$，显然，落地点$P(x,-h)$在铅球的轨迹方程上，

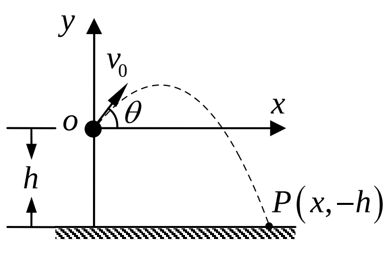


图 5-2

故有

$$\frac{g\left(1+\tan^2\theta\right)}{2v_0^2}x^2-x\tan\theta-h=0\ ,\qquad (1)$$

即是　$gx^2\tan^2\theta-2v_0^2x\tan\theta+gx^2-2v_0^2h=0\left(\tan\theta>0\right)$，　(2)

方程(2)成立的条件是关于$\tan\theta$的一元二次方程的判别式$\Delta=b^2-4ac\geq0$，即得

$$4v_0^4x^2-4g^2x^4+8gx^2v_0^2h\ge 0 \Rightarrow g^2x^2\le v_0^4+2gv_0^2h \Rightarrow x^2\le\left(v_0^4+2gv_0^2h\right)\Big/g^2 \Rightarrow x\le\left(v_0\sqrt{v_0^2+2gh}\right)\Big/g,$$

所以，铅球的最远射程为 $x_{\max}=\left(v_0\sqrt{v_0^2+2gh}\right)\Big/g$；

当铅球水平射程最远时，把 $x_{\max}$ 的值代入方程(1)计算后可以得到

$\left(v_0^2+2gh\right)\tan^2\theta-2v_0\sqrt{v_0^2+2gh}\tan\theta+v_0^2=0$，即 $\left(\sqrt{v_0^2+2gh}\tan\theta\right)^2-2v_0\left(\sqrt{v_0^2+2gh}\tan\theta\right)+v_0^2=0$，

也即 $\left(\sqrt{v_0^2+2gh}\tan\theta-v_0\right)^2=0$，所以 $\tan\theta=\dfrac{v_0}{\sqrt{v_0^2+2gh}}$，即有 $\theta=arc\tan\dfrac{v_0}{\sqrt{v_0^2+2gh}}$.

（法三）把铅球的运动分解为水平方向的匀速直线运动和竖直上抛运动来求解。如图 5-2 所示，水平方向的位移为 $x=\left(v_0\cos\theta\right)t$，竖直方向的位移为 $-h=\left(v_0\sin\theta\right)t-gt^2/2$，联立两方程化简后可得 $gx^2\tan^2\theta-2v_0^2x\tan\theta+gx^2-2v_0^2h=0$，这个方程与解法二中方程(2)相同，往下同解法二，这里省略。

6.如图 6-1 所示，大炮向倾角为 θ 的山坡上发射炮弹，炮弹离开炮口的速度为 v_0，要使炮弹尽可能打到更高的地方，则大炮的瞄准角（炮筒与水平方向的夹角）α 应为多少？最大射程为多少？（忽略空气的影响）

解：（法一）把炮弹的运动分解为沿初速度方向的匀速直线运动和竖直向下的自由落体运动来求解。设炮弹的瞄准角为 α，依题意，如图 6-2 可得

$$\left(v_0t\right)^2=\left(\frac{1}{2}gt^2+l\sin\theta\right)^2+\left(l\cos\theta\right)^2, \qquad (1)$$

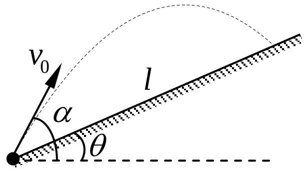


图 6-1

把方程(1)化简后可得

$$g^2t^4+4\left(gl\sin\theta-v_0^2\right)t^2+4l^2=0, \qquad (2)$$

把方程(2)看成是关于 t^2 的一元二次方程，显然，因为方程(2)有解，所以它关于 t^2 的一元二次方程的判别式一定满足

$$\Delta=b^2-4ac=\left(4gl\sin\theta-4v_0^2\right)^2-16g^2l^2\ge 0, \qquad (3)$$

由方程(3)可得

$$\left(gl+gl\sin\theta-v_0^2\right)\left(-gl+gl\sin\theta-v_0^2\right)\ge 0,$$

即是 $$\left[gl\left(1+\sin\theta\right)-v_0^2\right]\left[gl\left(1-\sin\theta\right)+v_0^2\right]\le 0, \qquad (4)$$

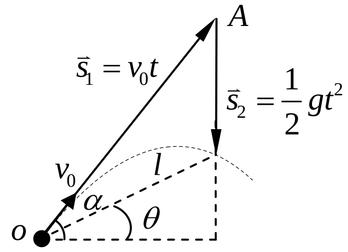


图 6-2

从方程(4)可得 $\dfrac{-v_0^2}{g\left(1-\sin\theta\right)}\le l\le\dfrac{v_0^2}{g\left(1+\sin\theta\right)}$，所以，炮弹的最大射程为 $l_{\max}=v_0^2\big/\left(g+g\sin\theta\right)$.

从方程(2)可得
$$t^2=\left[\frac{2v_0^2}{1+\sin\theta}\pm 2\sqrt{\left(\frac{v_0^2}{1+\sin\theta}\right)^2-g^2l^2}\right]\Bigg/g^2, \qquad (5)$$

当 l 取最大值时，把 $l_{\max}$ 代入方程(5)可得 $t^2=2v_0^2\big/\left(g^2+g^2\sin\theta\right)$；如图 6-2 可得

$\tan\alpha=\left[\dfrac{1}{2}g\dfrac{2v_0^2}{g^2\left(1+\sin\theta\right)}+\dfrac{v_0^2\sin\theta}{g\left(1+\sin\theta\right)}\right]\Bigg/\left[\dfrac{v_0^2\cos\theta}{g\left(1+\sin\theta\right)}\right]=\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\theta}{2}\right)$，所以，当 l 取最大值时，炮弹的瞄准角应为 $\alpha=\pi/4+\theta/2$.