·竞赛园地·

对一道物理竞赛练习题的深究

朱泽斌[1]　孙阿明[1*]　沈隽毅[2]　戴苡芬[3]
(1. 南京师范大学泰州学院信息工程学院,江苏 泰州　225300;2. 江苏大学电气信息工程学院,江苏 镇江　212013;
3. 江苏省中小学教学研究室,江苏 南京　210013)

摘　要:对于一道高中物理竞赛练习题,在解题时无法通过常规方法求解.本文分析了原书中给出的答案,并运用理论力学的思想和一些数学技巧,对题设的模型做了深入探究,求出了对象运动的轨迹方程.最后指出常规方法无法解出轨迹方程的原因.

关键词:物理竞赛;理论力学;数学技巧;轨迹方程

文献[1]中有这样一道题目:[1]

两个小孩站在一个开阔、倾斜的山坡上,山坡可以看成一个平坦的斜面.地面上结了足够的冰,只要小孩受到一点点的作用力就会以恒定的速度滑向山下,如图1.一个小孩与另外一个小孩玩,他背靠在一棵大树上以 $v_0=1\ \mathrm{m/s}$ 的速度水平推了对方一下. 后者滑下了山坡,此间其速度的大小和方向均发生了变化.假定摩擦力与速度无关,被推的小孩最终的速度为多大?

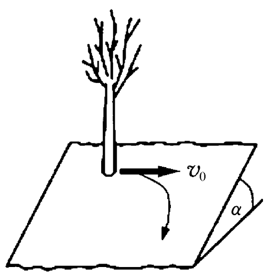

图 1

1　难点分析

当学生拿到这道题目时,常常很自然地假设小孩下滑到任意一点的速度,并考虑重力沿斜面的分力和摩擦力,将它们分解到沿斜面向下和与之垂直的 x 和 y 两个方向,试图求出小孩运动的轨迹方程.在求解的过程中必然会引入时间 t,将位置、速度和受力分别表示成时间的函数.然而在计算时会发现,用这种方法不论怎样变换关系式,总会遇到一个方程无法求出精确解,这也是这个模型的难点所在.在文末将说明,小孩下滑的轨迹方程确实无法用 y 关于 x 的方程来描述,同时也无法表示成 x 和 y 关于时间 t 的参数方程.

2　原解题过程与点评

事实上,这道题目源自于 Peter Gnadig 等人编著的《200 道物理学难题(200 puzzling physics problems)》,书中给出了这道题目的做法如下:[2]

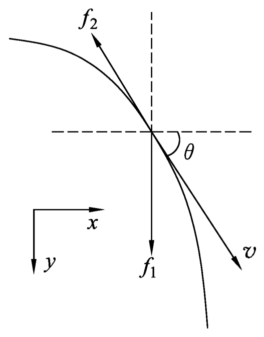

图 2

如图 2,由于只要小孩受到一点点的作用力就会以恒定的速度滑向山下,所以重力沿斜面的分力 f_1 和摩擦力 f_2 必定相等,即 $f_1=f_2$.

速度方向与 x 轴方向的夹角是 θ,则在速度方向和 y 方向上,根据冲量定理有

$$m\Delta v=(-f_2+f_1\sin\theta)\Delta t,$$

$$m\Delta v_y=(f_1-f_2\sin\theta)\Delta t.$$

由于 $f_1=f_2$,可得

$$\Delta v+\Delta v_y=\Delta(v+v_y)=0,$$

即　$v+v_y=$常数.

末速度 $v_{\max}$ 的方向将会沿着斜面向下,这时便有 $v=v_y=v_{\max}$,所以

$$v_{\max}=\frac{v_0}{2}=0.5\ \mathrm{m/s}.$$

这种做法十分巧妙,也很简洁,通过计算速度大小和沿斜面向下的分速度随时间的变化关系,发现两者之和是一个定值,从而很方便地导出了末速度的大小.

3　深入探究

下面分步骤对这个模型作深入的探究,并求

基金项目:江苏省教育科学“十二五”规划立项课题(D/2015/01/147);南京师范大学泰州学院校级科研项目(Q201237)资助.
* 通讯作者:南京师范大学泰州学院信息工程学院,Email:ygsab2008@sina.com

出小孩下滑的轨迹方程.

(1) 分析.

设在轨迹上任意一点处的速度为$\boldsymbol{v}$,由于只要小孩受到一点点的作用力就会以恒定的速度滑向山下,所以在小孩匀速下滑时,受到的摩擦力与重力沿冰面的分力抵消,即 $f_1=f_2$,记

$$f=f_1=f_2=mg\sin\alpha. \tag{1}$$

可以列出 f_1 和 f_2 的合力 $\boldsymbol{F}$ 与速度$\boldsymbol{v}$的矢量式:

$$\boldsymbol{F}=-f\cos\theta\boldsymbol{i}+f(1-\sin\theta)\boldsymbol{j}, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{v}=v\cos\theta\boldsymbol{i}+v\sin\theta\boldsymbol{j}, \tag{3}$$

式中 v 是$\boldsymbol{v}$的模.

(2) 运用牛顿第二定律进一步推导.

对(3)式中的 v 求导:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\left(-v\omega\sin\theta+\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\cos\theta\right)\boldsymbol{i}+\left(v\omega\cos\theta+\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\sin\theta\right)\boldsymbol{j}, \tag{4}$$

式中 $\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$. 注意到在 v 方向上可以列牛顿第二定律

$$f_2-f_1\sin\theta=-m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

即

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\frac{f}{m}(1-\sin\theta). \tag{5}$$

把(5)式代入(4)式可得,并在等号两边同时乘以 m,得

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=[-mv\omega\sin\theta-f(1-\sin\theta)\cos\theta]\boldsymbol{i}+[mv\omega\cos\theta-f(1-\sin\theta)\sin\theta]\boldsymbol{j}. \tag{6}$$

由牛顿第二定律,(2)式与(6)式的 x,y 分量分别相等,则可以得到

$$mv\omega=f\cos\theta. \tag{7}$$

(3) 导出速度 v 与角度 θ 的关系.

将(7)式写成

$$mv\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=mv\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=f\cos\theta.$$

把(5)式代入可得

$$-\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}v}{v}.$$

将上式积分,并考虑初始条件 $\theta=0$ 时 $v=v_0$,得

$$v(\theta)=\frac{v_0}{1+\sin\theta}. \tag{8}$$

这就得到了速率 v 关于 θ 的关系式.

将(8)式对时间 t 求导

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\frac{v_0\cos\theta}{(1+\sin\theta)^2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}. \tag{9}$$

(5)、(9)两式相等可得

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta}=\frac{mv_0}{f}\frac{1}{(1+\sin\theta)\cos\theta}. \tag{10}$$

此时可以把 v 的 x 和 y 分量表示为

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\cos\theta, \tag{11}$$

$$v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v\sin\theta. \tag{12}$$

(4) 由速度与 θ 的关系对时间积分得到位置与 θ 的关系.

(11)式可以化为

$$\mathrm{d}x=v_0\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}\mathrm{d}t=v_0\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\theta. \tag{13}$$

把(10)式代入(13)式

$$\mathrm{d}x=\frac{mv_0{}^2}{f}\frac{1}{(1+\sin\theta)^2}\mathrm{d}\theta. \tag{14}$$

根据(11)(12)式,$\mathrm{d}y=\mathrm{d}x\tan\theta$,所以

$$\mathrm{d}y=\frac{mv_0{}^2}{f}\frac{\tan\theta}{(1+\sin\theta)^2}\mathrm{d}\theta. \tag{15}$$

将(14)、(15)两式积分,考虑初始条件 $\theta=0$ 时,x 和 y 均为 0,并将(1)式代入,可得

$$x(\theta)=\frac{v_0{}^2}{3g\sin\alpha}\left[1-\frac{\cos\frac{3\theta}{2}-3\sin\frac{\theta}{2}}{\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)^3}\right], \tag{16}$$

$$y(\theta)=\frac{v_0{}^2}{4g\sin\alpha}\left[\ln\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}-\frac{\sin\theta}{(1+\sin\theta)^2}\right]. \tag{17}$$

这就是小孩在冰面上下滑的轨迹方程,它是一个关于 θ 的参数方程,θ 的取值范围为$[0,\pi/2)$,其图像如图 3 所示.

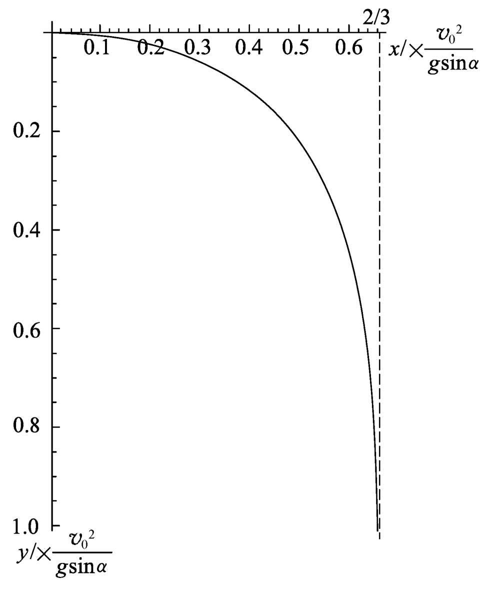

图 3

(上接第 94 页)
让学生去体验船的两个分运动.当学生以分析受力的方法对速度进行正交分解时,就会出现船要“飞天”的现象,这个时候学生思维出现矛盾,陷入混沌状态,需要教师给一步台阶.师生继续探究:那么船的速度到底是怎样分解呢?对绳子缩短的效果学生是容易接受的,再对比两种状态,若绳子不再收缩,就只能靠转动达到最终状态,即实际上绳子实现的运动是:缩短与转动,两个分运动互不干扰.在模拟实验中学生积极参与,教学效果非常好.

案例 6.如图 13 所示,两竖直杆 MN 与 PQ 相距 2 m,一根长 2.4 m 的绳子两端拴在这两杆上,第一次令两拴点等高,第二次令两拴点不等高,用一光滑的铁钩把一重 $G=50$ N 的物体挂在绳子上,问绳中拉力多大?

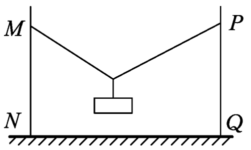

图 13

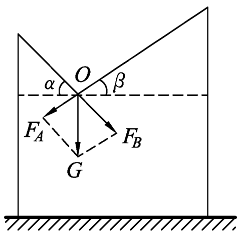

图 14

本题的难点在于绳子两端不等高的时候铁钩两侧绳子与水平方向的夹角始终相等,且保持不变.通过理论探究的形式也可以得到答案,如图 14 受力分析可得.但是理论毕竟是理论,学生还是将信将疑的,因此笔者在课上采用自制实验探究的形式开展教学,取得不错的效果.

实验准备:铁架台(每组两个)、细线一根、钩码、刻度尺和量角器.

实验方式:分组探究,每 4 人一组.把细线两端拴在铁架台上,挂好钩码.先让两个端点 M、P 等高,改变 P 点的高低,观察随着 P 点的缓慢升高,钩码所在位置的变化情况和测量随着 P 点高度变化夹角的变化情况.

通过实验探究学生发现,钩码两侧绳子与水平方向的夹角始终相等,且保持不变,容易得到两侧绳子的张力也相等.之后,教师可以引导学生根据实验观察中得到的结论进行思考:为什么绳子与水平方向的夹角始终相等,如何证明?由于有实验探究的设置,加上教师的引导,学生更明确了问题解决的方向,从而可以达到事半功倍的效果.

笔者发现,当实验研究不仅仅局限于兴趣,而与志趣结缘时,我们发现学生的潜力是无限的,他们的热情也是巨大的.学生在不断探索的过程中,我们在不知不觉中培养了他们的质疑能力、观察能力、思考能力,以及严谨求实的科学精神,是一个社会人在以后的发展中最需要的能力和精神.当学生离开学校离开物理,在他们身上留下的这些品质是最可贵的.

物理学是一门实验科学,也是一门生活科学,养成科学的生活方式、生活思维、生活态度应是物理教学的重要任务.因此,重视中学物理的实验教学,也就是让教育回归生活世界.

(收稿日期:2016-03-13)

通过求极限 $\lim\limits_{\theta\to\pi/2}x(\theta)$ 可以得到轨迹在 x 方向上将收敛于 $\frac{2v_0^2}{3g\sin\alpha}$.将(8)式代入(3)式,并求极限 $\lim\limits_{\theta\to\pi/2}v(\theta)$ 可以得到小孩最终的速度是 $\frac{v_0}{2}\boldsymbol{j}$,因此小孩最终以 $v_0/2$ 的速度匀速下滑.

4 结论

以上的做法运用了大学阶段理论力学的思想,使用了较多的数学技巧,但对于初步了解一些微积分知识的学生来说,理解这种做法并不困难.在这种做法中,在 x 和 y 方向上分别根据牛顿第二定律列出了等式.其中在速度方向上的牛顿第二定律表达式,即(5)式,是一个关键的等式,这个等式得到了速度大小对时间的导数,即加速度大小的表达式.而在计算过程中设法消去了时间而保留夹角 θ,从最后的分析中看到这个思路是正确的,若消去 θ 而保留时间将解不出轨迹方程.

参考文献:

1 张大同.高中物理竞赛考前辅导[M].上海:华东师范大学出版社,2010:377.

2 P Gnadig, G Honyek, K F Riley. 200 puzzling physics problems [M]. Cambridge: Cambridge University Press. 2011:144-145.

(收稿日期:2016-03-14)