第 32 届全国中学生物理竞赛复赛模拟训练(6)

第一届 UPhO 邀请赛

满分 160 分　命题人 蔡子星

考试说明：

1、本次比赛邀请各重点中学物理竞赛选手参加，旨在加强校际交流，帮助同学进入考试状态，锻炼考试做新题的心态。

3、请只在答题纸上填写最终结果，所有答案除特殊说明外，为三位有效数字的科学计数。答题纸后可另附解题过程，但仅作评分参考。可以使用非编程计算器独立作答。

题一

经过长期的观测，人类又确定一颗距离地球$l = 1520$光年的行星的存在，并将其所属恒星命名为 CZ 星。这样遥远的恒星对于人类最精密的望远镜来说，也是模糊的一团，不能分辨内部结构，但是通过对于光的强度和频率的仔细测量，人们还是能对推测出这样行星的存在，并推测行星的属性。

（1）假设恒星表面满足黑体辐射定律。已知太阳表面温度约$T_S = 5.5\times10^3\,\mathrm{K}$，太阳光辐射的峰值波长约为$\lambda_S = 550\mathrm{nm}$。CZ 星的星光辐射峰值波长约为$\lambda_C = 400\mathrm{nm}$，由此估算 CZ 星表面温度$T_C$为多少?

（2）不考虑星际尘埃的影响，测量得到该星光在太阳系内的能流密度平均值为$S_C = 5.17\times10^{-13}\,\mathrm{Wm^{-2}}$，斯特藩为$\sigma = 5.67\times10^{-8}\,\mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}$，由此估算恒星的半径$r_C$为多少？

（3）当行星、CZ 星、地球位于一条直线上的时候，星光会被行星挡住一部分，从而变弱，形成凌日现象，我们可以由此推断行星的存在。我们观测到的凌日现象时，光强大约变弱了0.01%，由此推算行星半径和恒星半径的比值r_P / r_C为多少？

（4）我们发现凌日现象的持续时间为$T_L = 10$小时，出现的周期为$T_P = 568$天。并发现星光的频率随时间有周期性的波动，周期与T_P相同。这种现象产生的原因是恒星受到行星的影响，来回摆动，从而引起多普勒效应。观察到氢的谱线最高频率和最低频率相对差值为$\Delta\nu / \nu = 6.9\times10^{-10}$。我们由恒星的半径和温度估算得到恒星的质量为$M_C = 2.6\times10^{30}\,\mathrm{kg}$。

由行星半径可以知道这是一颗固态行星，推测其密度为$\rho = 5.0\times10^{3}\mathrm{kgm^{-3}}$。万有引力常数$G = 6.67\times10^{-11}\mathrm{Nkg^{-2}m^{2}}$，计算行星运动的速度$v_P$为多少？

（5）计算行星运动的轨道半径R_P为多少？

（6）计算行星表面的重力加速度g_P；

（7）假设行星表面对恒星光线的反射率为$r = 0.1$，而行星辐射在红外区域，其辐射可以近似使用黑体辐射公式。估算行星表面温度T_O；

（8）计算行星运动和黄道面和恒星到我们的连线之间的夹角θ（用弧度制表达）；

（9）假设宇宙中文明均匀的分布且非常多，则有可能看到 CZ 星星系中行星凌日现象的文明占全体文明的比例η为多少？

【分析】

（1）考察维恩位移定律；（2）利用黑体辐射定律即可；（3）行星遮挡了恒星发出的部分光，因此总亮度会降低。（4）考察多普勒效应；（7）平衡时吸收和辐射的能量相同；（8）其黄道面与到太阳系的夹角非零，导致凌日时间比在 CZ 星赤道中的更短；（9）行星凌日所扫出的立体角内的空间是可能发现凌日现象的。

【解答】

（1）由维恩位移定律可知黑体辐射峰值波长与温度之乘积为常量，因此有：

$$T_S\lambda_S = T_C\lambda_C$$

得到

$$T_C = 7.562\times10^{3}\mathrm{K}$$

（2）能流密度为 CZ 星总能量除以到太阳系所对应的总球面积，因此由黑体辐射公式可得：

$$S_C = \frac{\sigma T_C^4\cdot 4\pi r_C^2}{4\pi l^2}$$

解得：

$$r_C = \sqrt{\frac{S_C}{\sigma T_C^4}}\cdot l = 7.598\times10^{8}\mathrm{m}$$

（3）遮住的面积与恒星总面积之比正比于光亮度之比：

$$\frac{\pi r_P^2}{\pi r_C^2} = 0.01\%$$

解得：

$$r_P / r_C = 0.01$$

（4）由于频率改变极小，可知恒星运动速度v_C远小于光速，可用经典多普勒效应：

$$\frac{\Delta\nu}{\nu}=\frac{c}{c-v_C}-\frac{c}{c+v_C}$$

保留到一阶小量可解得：

$$v_C=3.45\times10^{-10}c=1.035\times10^{-1}\text{m/s}$$

因此有行星速度：

$$v_P=\frac{M_C v_C}{\frac{4}{3}\pi r_P^3\rho}=2.929\times10^4\text{m/s}$$

（5）轨道半径满足：

$$v_P=\frac{2\pi R_P}{T}$$

得到

$$R_P=\frac{v_P T}{2\pi}=2.288\times10^{11}\text{m}$$

（6）重力加速度为：

$$g_P=\frac{G\frac{4}{3}\pi r_P^3\rho}{r_P^2}=\frac{4}{3}\pi r_P\rho G=10.61\text{m/s}^2$$

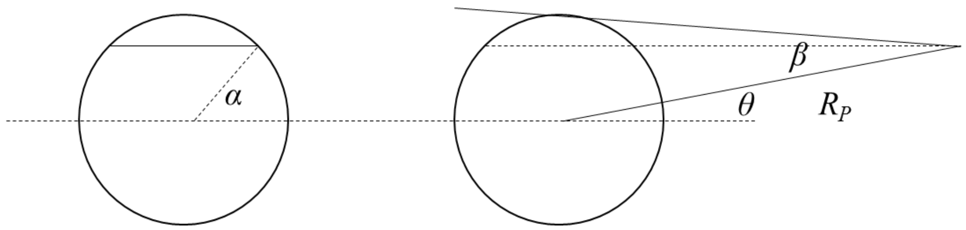
（7）行星单位时间内吸收、辐射的能量相同：

$$(1-r)\frac{\sigma T_C^4\cdot4\pi r_C^2\cdot\pi r_P^2}{4\pi R_P^2}=\sigma T_O^4\cdot4\pi r_P^2$$

得到：

$$T_O=\left((1-r)\frac{r_C^2}{R_P^2}\right)^{1/4}T_C=300.1\text{K}$$

（8）



其黄道面与到太阳系的夹角非零，导致凌日时间比在 CZ 星赤道中的更短，α如图所示，有：

$$T_L=\frac{2r_C\cos\alpha}{v_P}$$

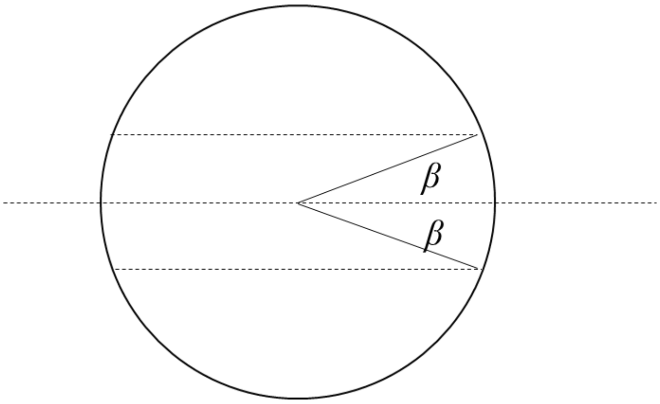
因此θ满足：

$$\sin\theta = \frac{r_C \sin\alpha}{R_P}$$

得到：

$$\theta = \arcsin\frac{\sqrt{r_C^2 - T_L^2 v_P^2 / 4}}{R_P} = 0.1598\text{rad}$$

（9）



只需要求出2β角内扫出的立体角即可，因此有：

$$\sin\beta = \frac{r_C}{R_P}$$

$$\eta = 1 - \frac{2\cdot 2\pi\left(1-\cos\left(\pi/2-\beta\right)\right)}{4\pi}$$

得到：

$$\eta = \frac{r_C}{R_P} = 3.321\times 10^{-3}$$

题二

宇宙这么大，于是我们想去看一看 1520 光年远的 CZ 星。鉴于曲率推进技术并不成熟，我们决定使用反物质推进的方案，即将正反物质湮灭为光子，让光子沿着与航线相反方向发射，利用光的动量推进飞船，或者沿着航线方向发射，用来减速。推进器和飞船自重为m_0。方案一：让飞船携带总质量为$M = Zm_0$的正反物质燃料（质量比为 1∶1）。方案二：只携带$M/2$的正物质，飞船一边收集反物质一边将其和正物质湮灭为光子推进。

（1）将全部燃料用于加速，飞船最终到达的速度$v_{\max}/c$为多少？

（2）假设在飞船参照中，推进器单位时间能消耗的燃料质量为α，则当总消耗燃料质量达

到λM时（$\lambda < 1/2$），在地面参照系中，方案一的速度v_1/c为多少？

（3）方案二的速度v_2/c为多少？

（4）接（2）问，在地面系中方案一的飞船加速度为a_1，$\frac{a_1 m_0}{c\alpha}$为多少？

（5）接（3）问，在地面系中方案二的飞船加速度为a_2，$\frac{a_2 m_0}{c\alpha}$为多少？

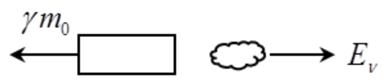
(取$Z=3.63$，$\lambda=0.423$）

【分析】

包含喷出的光子在内，整体能、动量守恒即可。在计算加速度时要考虑到加速度变换，通常不会去记，所以需要现推……

【解答】

（1）包含被喷出去的光子，两种方案的初态和末态条件是一样，所以结论相同。假设有能量为E_ν的光子被喷出去。如图，令$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-(v_{\max}/c)^2}}$



由动量守恒(由质能关系$E^2=(m_0c^2)^2+p^2c^2$可以得到飞船动量为$\sqrt{\gamma^2-1}m_0c$)

$$\sqrt{\gamma^2-1}m_0c-\frac{E_\nu}{c}=0$$

由能量守恒

$$\gamma m_0c^2+E_\nu=Zm_0c^2+m_0c^2$$

解得

$$\gamma=\frac{Z^2+2Z+2}{2Z+2}$$

于是

$$\frac{v_{\max}}{c}=\frac{(\mathrm{Z}+1)^2-1}{(\mathrm{Z}+1)^2+1}=0.911$$

（2)同上一问计算,注意在飞船系消耗的λZm_0的物质,在地面系中并不产生能量为λZm_0c^2的光子。只需要把初态和末态的质量比由$(Z+1):1$变为$(Z+1):((1-\lambda)Z+1)$即可

$$\frac{v_1}{c}=\frac{((Z+1)/(Z-\lambda Z+1))^2-1}{((Z+1)/(Z-\lambda Z+1))^2+1}=\frac{\left(Z+1\right)^2-\left(Z+1-\lambda Z\right)^2}{\left(Z+1\right)^2+\left(Z+1-\lambda Z\right)^2}=0.382$$

（3）初态有 $m_0(1+Z/2)$ 在船上，有 $m_0\lambda Z/2$ 反物质等待被接受。

末态有 $m_0(1+\frac{1}{2}(1-\lambda)Z)$ 在船上，剩下的是光子，设能量为 E_ν'

设速度对应的 $\gamma=(1-\frac{{v_2}^2}{c^2})^{-1/2}$

由动量守恒

$$\sqrt{\gamma^2-1}m_0(1+\frac{1}{2}(1-\lambda)Z)c-\frac{E_\nu'}{c}=0$$

由能量守恒

$$\gamma m_0(1+\frac{1}{2}(1-\lambda)Z)c^2+E_\nu'=m_0c^2(1+\frac{1}{2}(1+\lambda)Z)$$

解得

$$\gamma=\frac{(1+\frac{Z}{2})^2+(\frac{\lambda Z}{2})^2}{(1+\frac{Z}{2})^2-(\frac{\lambda Z}{2})^2}$$

$$\frac{v_2}{c}=\frac{(1+\frac{Z}{2})\lambda Z}{(1+\frac{Z}{2})^2+(\frac{\lambda Z}{2})^2}=0.508$$

（4）在飞船系中，此时静质量为 $m_0(1+(1-\lambda)Z)$，在 $d\tau$ 的时间内喷出 $\alpha d\tau$ 的光子，飞船获得速度 dv'，由于动量守恒，得到

$$m_0(1+(1-\lambda)Z)dv'=\alpha d\tau c$$

由速度变换，在地面系中

$$v+dv=\frac{v+dv'}{1+\frac{v}{c}\frac{dv'}{c}}$$

保留到一阶小量化简得到

$$dv=(1-\frac{v^2}{c^2})dv'$$

由钟慢效应

$$dt=\gamma d\tau$$

这样加速度满足

$$a=\frac{dv}{dt}=\gamma^{-3}\frac{dv'}{d\tau}=\gamma^{-3}\frac{\alpha c}{m_0(1+(1-\lambda)Z)}$$

$$\frac{a_1 m_0}{\alpha c}=\gamma^{-3}\frac{1}{1+(1-\lambda)Z}=\frac{1}{1+(1-\lambda)Z}\left(\frac{(Z+1)^2+(1+(1-\lambda)Z)^2}{2(Z+1)(1+(1-\lambda)Z)}\right)^{-3}=0.255$$

（5）在飞船系中，此时静质量为$m_0(1+(1-\lambda)\frac{Z}{2})$，有$d\tau\frac{\alpha}{2}$的反物质在$d\tau$时间内以速度$v$飞入，有$d\tau\alpha$的光子飞出，由动量守恒：

$$m_0(1+(1-\lambda)\frac{Z}{2})dv'=\alpha d\tau c-\alpha d\tau\sqrt{\gamma^2-1}c/2$$

这样飞船系中加速度满足

$$\frac{dv'}{d\tau}=\frac{\alpha d\tau c(1-\sqrt{\gamma^2-1}/2)}{m_0(1+(1-\lambda)\frac{Z}{2})}$$

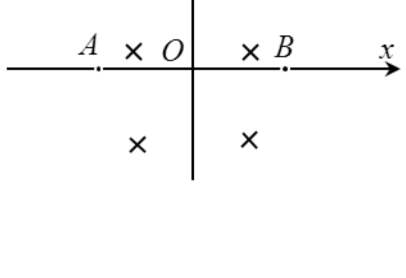
其他的部分和前一问相同

$$\frac{am_0}{\alpha c}=\frac{(1-\sqrt{\gamma^2-1}/2)}{(1+(1-\lambda)\frac{Z}{2})}\gamma^{-3}=0.220$$

其中$\gamma=\dfrac{(1+\frac{Z}{2})^2+(\frac{\lambda Z}{2})^2}{(1+\frac{Z}{2})^2-(\frac{\lambda Z}{2})^2}$

题三

如图在匀强磁场B中，有两个质量为m的点电荷A、B，间距为l，电量均为$+q$，初态静止。考虑静电作用，静电常数为K，不考虑相对论效应。



（1）求此后两个粒子运动的最大间距；

（2）将 B 的电量由 $+q$ 改为 $-q$，要求两个粒子不要发生碰撞，则磁场最小值 B_0 为多少？

（3）若磁场为大于上一问的最小值 B_0 的 B_1 时，求出粒子之后运动中的最近距离 l_0。

（取 $B=0.0295\text{T}$，$l=5.12\text{m}$，$m=1.88\times10^{-11}\text{kg}$，$B_1=1.75\text{T}$）

【分析】

两种情形下都有静电能和动能之和守恒，在第一种情形，考虑体系角动量的变化，第二种情形考虑体系沿竖直方向的动量的变化，各可得一方程，联立能量守恒方程可求解最大间距和最小间距。

【解答】

（1）由体系能量守恒有

$$2\times\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2+2\times\frac{1}{2}m\rho^2\dot{\theta}^2+\frac{Kq^2}{2\rho}=\frac{Kq^2}{l}$$

其中 ρ 为电荷到中心的距离，θ 为它和水平方向的夹角。

由于体系具有旋转不变性，所以考虑可能出现正则角动量守恒。由角动量定理得到：

$$\frac{dL}{dt}=2q\frac{d\rho}{dt}B\rho$$

于是

$$d(L-q\rho^2B)=0$$

即 $L-q\rho^2B=c$ 为常量，考虑初始位置可得

$$L-q\rho^2B=2m\rho^2\dot{\theta}-q\rho^2B=-q\left(\frac{l}{2}\right)^2B$$

代入能量守恒方程可得

$$2\times\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2+2\times\frac{1}{2}mq^2B^2\frac{(\rho^2-l^2/4)^2}{4m^2\rho^2}+\frac{Kq^2}{2\rho}-\frac{Kq^2}{l}=0$$

当两个粒子运动的间距最大时 $\dot{\rho}=0$，于是

$$B^2\frac{(\rho^2-l^2/4)^2}{4m\rho^2}+\frac{K}{2\rho}-\frac{K}{l}=0$$

记 $\dfrac{\rho}{l}=\lambda$，$\dfrac{B^2l^3}{4mK}=a$，

$$2a\left(\lambda-\frac{1}{4\lambda}\right)^2+\lambda-2=0$$

的第一个大于 1 的正根为λ_1，则$2\rho=2\lambda_1 l$即为所求最大距离。

利用数值求解可以得到最大距离为$d=2\lambda_1 l=38.7\mathrm{m}$

（2）类似（1），由于体系具有 y 方向平移不变性，所以可能有正则动量守恒。由动量定理

$$2m\dot{y}-2qBx=c=-qBl$$

另有能量守恒方程

$$2\times\frac{1}{2}m\dot{y}^2+2\times\frac{1}{2}m\dot{x}^2=\frac{Kq^2}{2x}-\frac{Kq^2}{l}$$

联立得

$$m\dot{x}^2+\frac{q^2B^2}{4m}(2x-l)^2=\frac{Kq^2}{2x}-\frac{Kq^2}{l}$$

相距最近时$\dot{x}=0$，于是

$$\frac{B^2}{4m}(2x-l)^2=K\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{l}\right)$$

即

$$\frac{B^2l^3}{4mK}\left(\frac{2x}{l}-1\right)^2-\frac{l}{2x}+1=0$$

记$\frac{2x}{l}=\lambda$，$\frac{B^2l^3}{4mK}=a$，则

$a\left(\lambda-1\right)^2-\frac{1}{\lambda}+1=0$，即$a\lambda^2-a\lambda+1=0$

方程在$0<\lambda<1$有解意味着两个粒子不发生碰撞，此时

$$a=\frac{B^2l^3}{4mK}\geq 4$$

即

$$B\geq B_0=4\sqrt{\frac{mK}{l^3}}=0.142\mathrm{T}$$

（3）对于$B_1\geq B_0$即$a\geq 4$，可解得

$$\lambda=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{a}}$$

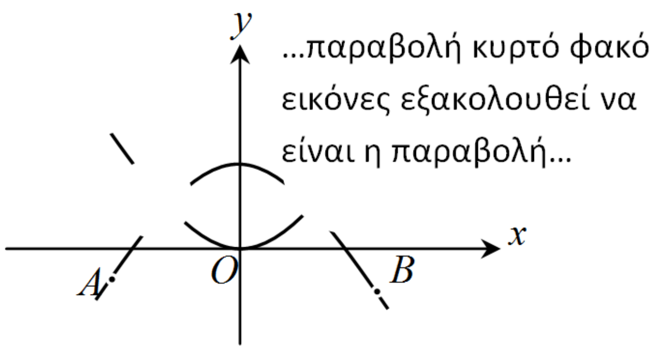
当$\lambda=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{a}}$时，两粒子均已沿竖直方向运动，且此后两者开始分离，故舍去另一根

得最小间距为

$$2x=\frac{l}{2}\left(1+\sqrt{1-\frac{16mK}{B_1^2l^3}}\right)=5.11\mathrm{m}$$

题四

如图，某人在练习理想凸透镜（即对于任意通过透镜的光线都满足成像规律）成像作图，但是由于年代久远，透镜和光心，以及部分物点像点（透镜下方为实物，上方为虚物）已经模糊不清了，只知道物点是一群分布在一条抛物线上的点，这条抛物线顶点在原点，开口向y轴正方向。这些点的像点在另一条抛物线上，这一条抛物线开口向y轴负方向，且通过A、B两个点。A、B点坐标分别为(x_1,y_1)和(x_2,y_2)



（1）求出像点所在抛物线的顶点的y坐标h；

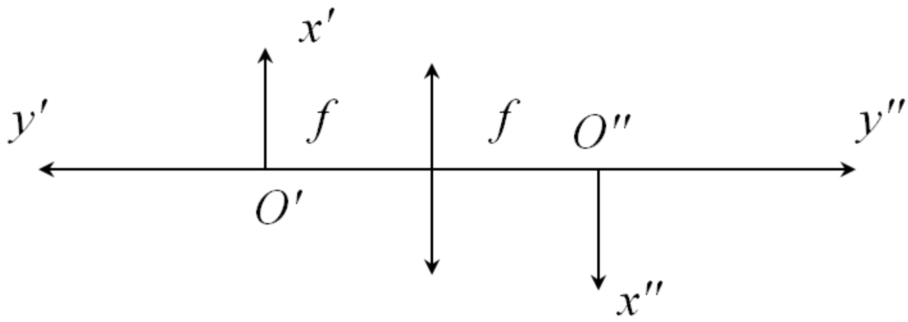
（2）求出透镜光心的纵坐标p；

（3）求出透镜的焦距f。

（取$x_1=-2\mathrm{cm}$，$y_1=0\mathrm{cm}$，$x_2=9\mathrm{cm}$，$y_2=-263\mathrm{cm}$）

【分析】
（1）问直接根据已知点坐标求得抛物线方程;（2）要求抛物线分布的物成像也分布在抛物线上，且对任意的位置的物、像都成立，可由此确定参数之间的关系。

【解答】
（1）
先证明透镜光轴必须沿y轴。



在主光轴上建立物像两个坐标系(x', y')和(x'', y'')，以各自焦点为坐标原点，则由牛顿成像公式可得物像之间关系为：

$$\begin{cases} y' = \dfrac{f^2}{y''} \\ x' = \dfrac{fx''}{y''} \end{cases}$$

物分布在一条抛物线上，其一般方程为：

$$a'y'^2 + b'y' + c'x' + d'x'^2 + e'y'x' + g' = 0$$

于是得到其像的方程为：

$$a'\frac{f^4}{y''^2} + b'\frac{f^2}{y''} + c'\frac{fx''}{y''} + d'\frac{f^2x''^2}{y''^2} + e'\frac{f^3x''}{y''^2} + g' = 0$$

上式两边同时乘以$\dfrac{y''^2}{f^2}$得到：

$$\frac{g'}{f^2}y''^2 + b'y'' + e'fx'' + d'x''^2 + \frac{c'}{f}x''y'' + a' = 0$$

抛物线物点在无穷远处对透镜的张角为零，因此其像位于主光轴上，即$(0,0)$是像点中的一个值，因此有

$$a' = 0$$

同理

$$g' = 0$$

题目已知物点分布在顶点为$(x = 0, y = 0)$的抛物线上，因此其方程可以设为：

$$y = Ax^2$$

如果设y'轴与y轴的旋转角为θ，则有：

$$\begin{cases} x=\left(x'\cos\theta-y'\sin\theta\right) \\ y=\left(x'\sin\theta+y'\cos\theta\right) \end{cases}$$

带入物点的抛物线方程得到：

$$x'\sin\theta+y'\cos\theta=A(\cos^2\theta x'^2+\sin^2\theta y'^2-2\sin\theta\cos\theta x'y')$$

对比可以发现应该有

$$\sin\theta=0$$

于是物点的抛物线方程为：

$$y'+Ax'^2=0$$

可以得到

$$c'=e'=0$$

即，y' 轴与 y 轴的旋转角为 π，于是可以得到透镜的主光轴在 y 轴上，像点所在抛物线的对称轴也为 y 轴。

由于已知物点所在抛物线顶点在原点且开口向 y 轴正方向，因此物点所在抛物线相对于 y 轴对称。又由于像点所在抛物线开口向 y 轴负方向，因此其抛物线也相对于 y 轴对称，可以设其方程为：

$$y=-ax^2+h$$

其中 a,h 为待确定的正的常量。带入 A,B 两点的坐标有：

$$\begin{cases} y_1=-ax_1^2+h \\ y_2=-ax_2^2+h \end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases} a=\dfrac{y_1-y_2}{x_2^2-x_1^2} \\ h=\dfrac{y_1x_2^2-y_2x_1^2}{x_2^2-x_1^2} \end{cases}$$

根据题目中所给数据算得：

$$h=13.7\text{cm}$$

（2）设某一对物像点的坐标分别是 $\left(x,y\right)$ 和 $\left(x',y'\right)$，则有

$$y'=-ax'^2+h$$

设透镜光心纵坐标和焦距分别为 p 和 f，由成像公式和放大率公式可得：

$$\begin{cases} \dfrac{1}{p-y}+\dfrac{1}{y'-p}=\dfrac{1}{f} \\ \dfrac{x'}{x}=-\dfrac{y'-p}{p-y} \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} y=\dfrac{\left(p-f\right)y'-p^2}{y'-p-f} \\ x=\dfrac{-f}{y'-p-f}x' \end{cases}$$

由于物点分布在抛物线上，因此对任意的$\left(x',y'\right)$都有

$$\frac{x^2}{y}=b$$

其中b为正的常量。因此有：

$$b\left(p-f\right)^2y'^2-\left[b\left(p-f\right)\left(p+f\right)+bp^2-\frac{f^2}{a}\right]y'+b\left(p+f\right)p^2-\frac{f^2h}{a}=0$$

上式对任意y'都成立，因此有：

$$\begin{cases} b\left(p-f\right)^2=0 \\ b\left(p-f\right)\left(p+f\right)+bp^2-\dfrac{f^2}{a}=0 \\ b\left(p+f\right)p^2-\dfrac{f^2h}{a}=0 \end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases} b=\dfrac{1}{a} \\ p=f=\dfrac{h}{2}=\dfrac{y_1x_2^2-y_2x_1^2}{2\left(x_2^2-x_1^2\right)} \end{cases}$$

根据题目中所给数据得到：

$$p=f=6.83\text{cm}$$

题五

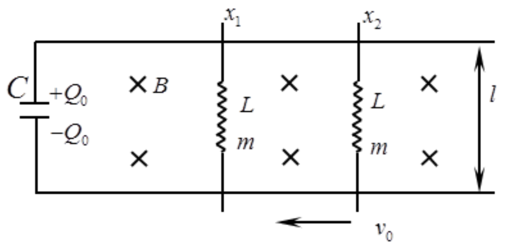
如图在足够长的间距为l的平行光滑金属导轨区域内有匀强磁场B。左端接入电容，大小为

C。两根带有电感的棒子垂直于导轨放置在导轨上，质量均为m，电感均为L。不记摩擦和电阻，不记棒子之外的电感。初态电容电量为Q_0，初态右边棒子向左的速度为v_0，并且满足：$v_0=\dfrac{Q_0Bl}{m}$，初始回路中电流为零，不考虑两根棒子相碰的情况。

（1）求当时间为t_1的时刻，两根棒子的质心相对于初态的位移x_C（向右为正）；

（2）求当时间为t_2的时刻，左边棒子相对于初态的位移x_1（向右为正）。

（取$Q_0=98.8\mathrm{C}$，$B=2.79\times10^{-1}\mathrm{T}$，$l=1.71\mathrm{m}$，$m=8.21\times10^{-3}\mathrm{kg}$，$L=4.23\times10^{-4}\mathrm{H}$，$C=9.89\times10^{-4}\mathrm{F}$，$t_1=18\mathrm{s}$，$t_2=17\mathrm{s}$ ）



【分析】
列出动力学微分方程，与简谐振动方程进行对比可得。

【解答】

（1）设某时刻电容电量为q，上正下负；导轨中电流为i，两棒子中的电流分别为i_1和i_2，逆时针方向为正；两棒和质心的速度分别为v_1，v_2和v_c，向右为正。则有质心系动力学方程：

$$2m\mathrm{d}v_c=-iBl\mathrm{d}t \quad (1)$$

电容、左棒子组成回路的基尔霍夫第二定律：

$$\frac{q}{C}-v_1Bl-\left(-L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}\right)=0 \quad (2)$$

电容、右棒子组成回路的基尔霍夫第二定律：

$$\frac{q}{C}-v_2Bl-\left(-L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\right)=0 \quad (3)$$

基尔霍夫第一定律：

$$i=i_1+i_2 \quad (4)$$

质心速度：

$$v_c=\frac{v_1+v_2}{2}\text{（5）}$$

由以上四式可以得到：

$$\frac{2q}{C}-2v_cBl+L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=0\text{（6）}$$

由于电流为：

$$i=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\text{（7）}$$

因此由动力学方程可以得到：

$$2m\mathrm{d}v_c=-Bl\mathrm{d}q\text{（8）}$$

从初始到任意时刻积分得到：

$$2m\left(v_c+\frac{v_0}{2}\right)=-Bl\left(q-Q_0\right)\text{（9）}$$

对动力学求时间的微分还能得到：

$$2m\frac{\mathrm{d}^2v_c}{\mathrm{d}t^2}=-Bl\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\text{（10）}$$

将（9）（10）带入方程（6）得到：

$$\frac{\mathrm{d}^2v_c}{\mathrm{d}t^2}+\frac{2m+CB^2l^2}{mCL}\cdot v_c-\frac{Q_0Bl-mv_0}{mCL}=0\text{（11）}$$

根据题意，左边的最后一项正好为零。即：

$$\frac{\mathrm{d}^2v_c}{\mathrm{d}t^2}+\frac{2m+CB^2l^2}{mCL}\cdot v_c=0\text{（12）}$$

令 $\omega=\sqrt{\dfrac{2m+CB^2l^2}{mCL}}$ 。这是关于质心速度 v_c 的二阶微分方程，其形式与简谐振动的方程完全一样，因此其解为：

$$v_c=A\cos\left(\omega t+\varphi_0\right)\text{（13）}$$

其中 A 和 φ_0 为待定常量。

初始，即 $t=0$ 时，有

$$\begin{cases}v_c=A\cos\left(\varphi_0\right)=-\dfrac{v_0}{2}\\ \dfrac{\mathrm{d}v_c}{\mathrm{d}t}=-\omega A\sin\left(\varphi_0\right)=0\end{cases}\text{（14）}$$

有一个式子是由于初始时电流为零。解得：

$$\begin{cases}\varphi_0=\pi\\ A=\dfrac{v_0}{2}\end{cases}$$ （15）

即：

$$v_C=\frac{v_0}{2}\cos\left(\omega t+\pi\right)$$ （16）

因此得到t时刻质心相对于初始位置的位移为：

$$x_c=\frac{v_0}{2\omega}\sin\left(\omega t+\pi\right)$$ （17）

即：

$$x_c=-\frac{Q_0Bl}{2m}\sqrt{\frac{mCL}{2m+CB^2l^2}}\sin\left(\sqrt{\frac{2m+CB^2l^2}{mCL}}\cdot t_1\right)$$ （18）

在题给参数下解得：

$$x_c=-0.959\mathrm{m}$$

（2）

分别列左右棒子的动力学方程：

$$\begin{cases}m\dfrac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}=-i_1Bl\\ m\dfrac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t}=-i_2Bl\end{cases}$$ （19）

上下两式相减可得：

$$m\frac{\mathrm{d}\left(v_1-v_2\right)}{\mathrm{d}t}=-\left(i_1-i_2\right)Bl$$ （20）

（2）（3）两式相减得到：

$$\left(v_1-v_2\right)Bl-L\frac{\mathrm{d}\left(i_1-i_2\right)}{\mathrm{d}t}=0$$ （21）

由上两式得到：

$$\frac{\mathrm{d}^2\left(v_1-v_2\right)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{B^2l^2}{mL}\left(v_1-v_2\right)=0$$ （22）

令$\omega'=\dfrac{Bl}{\sqrt{mL}}$ ，则其解为：

$$v_1-v_2=A'\cos\left(\omega' t+\varphi_0'\right)$$ （23）

初始条件为，$t=0$时：

$$\begin{cases} v_1 - v_2 = A'\cos\left(\varphi_0'\right) = v_0 \\ \dfrac{\mathrm{d}\left(v_1 - v_2\right)}{\mathrm{d}t} = -\omega' A' \sin\left(\varphi_0'\right) = 0 \end{cases} \quad (24)$$

后一个是因为初始时电流都为零。得到：

$$\begin{cases} A' = v_0 \\ \varphi_0' = 0 \end{cases}$$

得到：

$$v_1 - v_2 = v_0 \cos\left(\omega' t\right) \quad (25)$$

于是有：

$$x_1 - x_2 = \frac{v_0}{\omega'}\sin\left(\omega' t\right) \quad (26)$$

得到：

$$x_1 = \frac{x_1 - x_2}{2} + x_C = \frac{v_0}{2\omega'}\sin\left(\omega' t\right) + \frac{v_0}{2\omega}\sin\left(\omega t + \pi\right) \quad (27)$$

即：

$$x_1 = \frac{Q_0}{2}\sqrt{\frac{L}{m}}\sin\left(\frac{Bl}{\sqrt{mL}}\cdot t_2\right) - \frac{Q_0 Bl}{2m}\sqrt{\frac{mCL}{2m + CB^2l^2}}\sin\left(\sqrt{\frac{2m + CB^2l^2}{mCL}}\cdot t_2\right)$$

在题给参数写解得：

$$x_1 = -12.4\mathrm{m}$$

题六

在 CZ 星附近的行星上有稠密的大气，其中生活着一种气球状生物，当有人向它们询问牛顿第二定律的时候，它们会回复嘟嘟嘟的响声，我们暂且将这些生物命名为气球。气球的半径和质量基本稳定，它们通过调节自身气囊内的气体温度，从而改变密度，用来调节自身的飞行高度。这些生物白天由于日照，温度上升，飞行在空中捕食，夜晚温度下降，停落在地面上休息。[详情请阅读《乡村教师》，作者刘慈欣]。

气球的质量为 m_0，半径为 r，地面气温为 T_0，压强为 p_0，密度为 ρ_0。取绝热大气模型，即大气不同地方 $p\rho^{-\gamma}$ 为常数，其中 $\gamma = \dfrac{7}{5}$，大气的定体摩尔热容量为 $C_V = 2.5R$。在高度 h 变化不大的范围内，可以认为大气的温度、密度和压强随高度线性变化。重力加速度为 g。

（1）气球在休息的时候，体内的气体和大气自由交换。清晨它向外深深吐一口气，将体内压降减少到 $p_0 - \Delta p$，于是恰好起飞，能稳定在 h 高度飞行。这个过程很短，热量来不及交

换。求Δp为多少？

（2）飞行了一段时间后，由于日照和气球自身的特殊生理结构能输运热量，气球的压强上升到和周围一样。（于是它舒服的不用忍受压强差了）求此时气球内温度为多少?

（3）气球皮内外温差为ΔT时，单位时间内单位面积上的的散热本领为$\kappa=\dfrac{\Delta Q}{\Delta S\Delta T\Delta t}$，阳光正入射的时候，单位时间内单位面积提供的热量为$\lambda=\dfrac{\Delta Q}{\Delta S\Delta t}$。则气球为了舒服，单位时间需要搬运给内部气体多少热量，$q=\dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$？

（4）考虑热力学第二定律，气球为了搬运这些热量，单位时间内至少应当做功W为多少？

(取：$h=175\mathrm{m}$，$m_0=202\mathrm{kg}$，$T_0=300\mathrm{K}$，$\rho_0=1.174\mathrm{kg/m^3}$，$r=10\mathrm{m}$，$g=10.6\mathrm{m/s^2}$，

$p_0=1.01\times10^5\mathrm{Pa}$，$\kappa=43\mathrm{J/(m^2\cdot K\cdot s)}$，$\lambda=2040\mathrm{J/(m^2\cdot s)}$，$R=8.31\mathrm{Pa\cdot m^3/(mol\cdot K)}$)

【分析】

由绝热大气模型以及高度h变化不大时压强、温度和密度随高度线性变化，可得三者随高度的变化关系式。

第一问利用绝热过程中$p\rho^{-\gamma}=c$以及气体状态方程可解；第二问由气体状态方程可知温度和压强成正比；第三问由吸收太阳能的功率加气球输送能量的功率等于散热功率可直接得到；第四问由热机搬运热量的公式可求得气球的功率。

【解答】

由于大气的温度、密度和压强随高度线性变化，$p_h=p_0-\rho_0 gh$。

由$p\rho^{-\gamma}=c$得

$$\frac{\Delta\rho}{\rho}=\frac{1}{\gamma}\frac{\Delta p}{p}$$

由于高度差不大，所以可以视为线性关系，由此得

$$\rho_h=\rho_0\left(1-\frac{1}{\gamma}\frac{\Delta p}{p_0}\right)=\rho_0\left(1-\frac{1}{\gamma}\frac{\rho_0 gh}{p_0}\right)$$

类似地，由$pV=\nu RT$及$pV^{\gamma}=c$得$p^{\gamma-1}=CT^{\gamma}$，微分得到

$$\frac{\Delta T}{T}=\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\Delta p}{p}$$

由此得

$$T_h = T_0\left(1-\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\rho_0 gh}{p_0}\right)$$

（1）气球吐气前其体内气体压强和密度分别为 p_0,ρ_0，吐气后体内气体压强和密度分别为 $p_0-\Delta p,\rho$，考虑该绝热过程有

$$\begin{cases} p_0-\Delta p=\dfrac{\rho}{\mu}RT, \\ (p_0-\Delta p)^{\gamma-1}T^{-\gamma}=p_0{}^{\gamma-1}T_0^{-\gamma}, \end{cases}$$

此处 $\mu=\dfrac{RT_0\rho_0}{p_0}=0.029\ \mathrm{kg/mol}$ 由于它能稳定在 h 高度飞行，所以

$$\rho gV+m_0 g=\rho_h gV$$

联立得

$$\begin{cases} T=T_0^{\gamma}\left(\dfrac{R\rho_0(1-a/\gamma-b)}{\mu}\right)^{\gamma-1}p_0{}^{1-\gamma}=\left(1-a/\gamma-b\right)^{\gamma-1}T_0, \\ \Delta p=p_0-(1-a/\gamma-b)^{\gamma}p_0, \end{cases}$$

此处 $a=\dfrac{\rho_0 gh}{p_0},b=\dfrac{m_0}{\rho_0 V}$。

在题给参数下，有：

$$\Delta p=7.89\times10^3\,\mathrm{Pa}$$

（2）由于体积不变，且不漏气，由理想气体状态方程得：$\dfrac{p}{T}=c$，$\dfrac{p_h}{p_0-\Delta p}=\dfrac{T'}{T}$ 即

$$T'=\frac{p_h}{p_0-\Delta p}T=\frac{1-a}{1-a/\gamma-b}T_0$$

在题给参数下，有：

$$T'=3.11\times10^2\,\mathrm{K}$$

（3）气球和周围环境的温差为

$$\Delta T=T'-T_h=T_0\left(\frac{(b-a)\gamma+a}{(1-b)\gamma-a}+\frac{(\gamma-1)a}{\gamma}\right)$$

单位时间内气球需要产生的热量为

$$q=\kappa\Delta T\Delta S-\lambda\Delta S=\pi r^2(4\kappa\Delta T-\lambda)$$

$$=\pi r^2\left(4\kappa T_0\left(\frac{(b-a)\gamma+a}{(1-b)\gamma-a}+\frac{(\gamma-1)a}{\gamma}\right)-\lambda\right)$$

在题给参数下，有：

$$q=5.89\times10^4\,\mathrm{J}$$

（4）由热力学第二定律，气球为了搬运这些热量，单位时间内至少应当做功W满足

$$\frac{q}{T'}=\frac{q-W}{T_h}$$

解得

$$W=\frac{\Delta T}{T'}q=q\left(1-\frac{(\gamma-\gamma a+a)(\gamma-rb-a)}{(1-a)\gamma^2}\right)$$

在题给参数下，有：

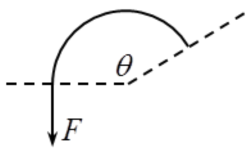
$$W=2.45\times10^3\,\mathrm{W}$$

题七

如图，将一个质量为m，长度为l的均匀无弹性不可伸长的绳子放在摩擦系数为μ的地面上，重力加速度为g。绳子摆成一个圆心角为θ_0的圆弧，用外力F沿着绳子的切线拉绳子。逐渐增大外力F，直到绳子滑动为止。已知$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin(\frac{x}{a})+C$

（1）求让绳子滑动需要的最小外力F；

（2）若绳子摆成的圆弧对应的圆心角为$\theta_1=2\pi/3$，求出绳子上滑动部分和不滑动部分的临界点与有外力的端点之间的弧的角度θ_m（结果用角度制）。



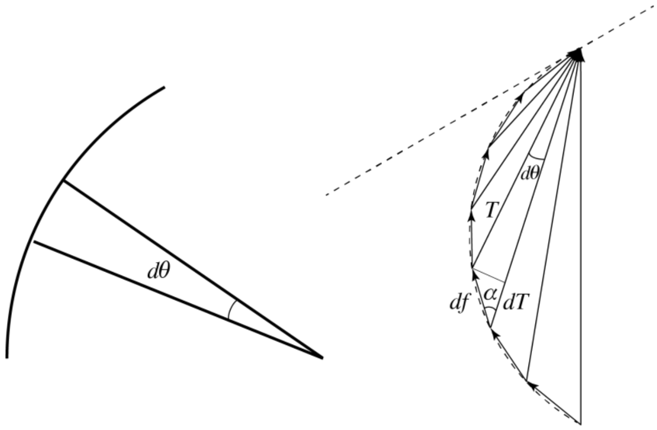
(取$\mu=0.288$, $m=3.9\mathrm{kg}$, $g=10\mathrm{m/s^2}$, θ_0=1.03rad)

【分析】

分析每一小段绳子所受的最大静摩擦力，用三角形法则将这些静摩擦力合成，画出力的合成图，考虑绳子张力随着这一小段绳子所在位置的变化， 可得张力随受力端的位置的变化关

系。

【解答】



如图，将绳子分成圆心角为$d\theta$的很多小段绳子，每一小段绳子所受最大静摩擦力即为两端所受张力的合力，将这些摩擦力合成即为F。注意到每一小段绳子两端所受张力沿绳子两端的切线方向，有：

$$\sin\alpha=\frac{Td\theta}{df}=\frac{Td\theta}{\mu mgd\theta/\theta_0}$$

记

$$T_0=\frac{\mu mg}{\theta_0}$$

注意到

$$\tan\alpha=\frac{Td\theta}{dT}$$

即得

$$\frac{dT/T_0}{\sqrt{1-(T/T_0)^2}}=d\theta$$

于是

$$T=T_0\sin\theta$$

即

$$F=T_0\sin\theta_0=\frac{\mu mg}{\theta_0}\sin\theta_0$$

于是有：

$$F=9.35\mathrm{N}$$

当$\theta=\pi/2$时，外力达到最大。如果绳子弧度$\theta_1>\pi/2$，有外力一侧$\pi/2$弧度，即$90°$的绳子将因逐渐增大的外力而先发生滑动。

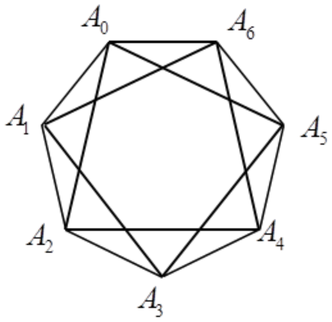
题八

如图 $A_0 \sim A_6$ 是 7 个点，之间连接了 14 个阻值为 1Ω 的电阻。A_i、A_j 之间的等效电阻记为 R_{ij}。计算下面的电阻。

（1）R_{01}

（2）R_{02}

（3）R_{03}



【分析】

利用电流源叠加原理，恢复一些对称性。例如先加入 6 个电流源，用 A_0 输入电流 $I/6$，从 A_i（$i=1,2,\dots,6$）流出电流 $I/6$，设此时 A_0 和 A_i 之间的电压为 U_{0i}，而这样的电流分布对称性较好，容易求解。

【解答】

利用电流源叠加原理，恢复一些对称性。考虑由 A_0 输入电流 I，从其它各点各流出电流 $I/6$，设此时 A_0 和 A_i 之间的电压为 U_{0i}；再考虑从 A_i 流出电流 I，从其它各点各流入电流 $I/6$，由 A_0 和 A_i 的对称性，此时两者之间的电压仍为 U_{0i}。将两者一共 12 个电流源叠加后可知从 A_0 输入电流 $7I/6$，从 A_i 流出电流 $7I/6$，其间电压为 $2U_{0i}$。其比值即位所求。

现考虑叠加之前的情形。记点 A_i 处的电势为 U_i，点 A_i、A_j 间的电流为 I_{ij}，则由相对 A_0 点的对称性，只需考虑 $A_0 \sim A_4$ 之间的连接涉及的六个电流 $I_{01}, I_{02}, I_{12}, I_{13}, I_{23}, I_{24}(=I_{53})$,，对这部分电路考虑流经各节点的电流有：

$I_{01}-I_{12}-I_{13}=I/6,$

$I_{02}+I_{12}-I_{23}-I_{24}=I/6,,$

$I_{13}+I_{23}+I_{24}=I/6,$

另外考虑各点电势有：

$I_{13}\times 1\Omega=\left(I_{12}+I_{23}\right)\times 1\Omega,$

$I_{02}\times 1\Omega=\left(I_{01}+I_{12}\right)\times 1\Omega,$

$I_{23}\times 1\Omega=I_{24}\times 1\Omega,$

联立解得：

$$I_{01}=\frac{19}{78}I, I_{02}=\frac{20}{78}I, I_{12}=\frac{1}{78}I, I_{13}=\frac{5}{78}I, I_{23}=I_{24}=\frac{4}{78}I$$

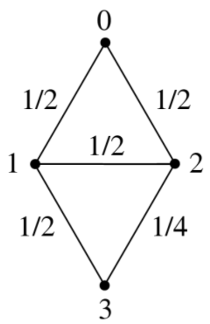
于是$U_{01}=I_{01}R=\frac{19}{78}IR$，

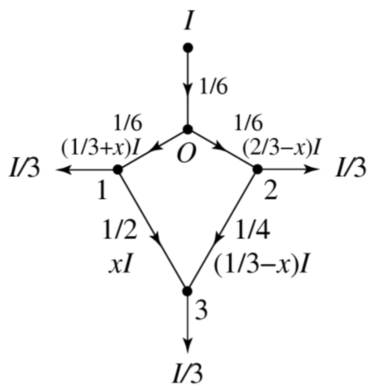
$$R_{01}=\frac{2U_{01}}{7I/6}=\frac{38}{91}R=\frac{38}{91}\Omega,$$

类似可得

$$R_{02}=\frac{40}{91}\Omega, R_{03}=\frac{48}{91}\Omega$$

另解：考虑由A_0输入电流I，从其它各点各流出电流$I/6$，可画出等效电路如下





图中各线段边上标注的为等效电阻（单位为Ω）。左图经$\Delta-\mathrm{Y}$变换得右边的等效电路，设等效后的A_1点和A_3点之间的电流为xI，则其余各点之间的电流如图所示。计算O点和A_3点之间的电压可得方程

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}+x\right)=\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}-x\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-x\right)$$

解得

$$x=\frac{5}{39}$$

由此可求各点之间的电压，得到和前述相同的各R_{0i}。