第 32 届全国中学生物理竞赛复赛模拟训练(2)

满分 160 分　命题人 蔡子星

题一

假设体系偏离平衡位置Δl，即两边绳长分别为$l+\Delta l$和$l-\Delta l$，此时两小球的角速度分别为ω_1和ω_2，则因两者仅受有心力作用，角动量守恒

$$\omega l^2=\omega_1(l+\Delta l)^2=\omega_2(l-\Delta l)^2$$

设绳子张力为T，则由沿绳方向的加速度关联有

$$F=T-m\omega_1^2(l+\Delta l)=m\omega_2^2(l-\Delta l)-T$$

此处F为系统回复平衡位置的回复力。

于是

$$\begin{aligned}F&=\frac{1}{2}(m\omega_2^2(l-\Delta l)-m\omega_1^2(l+\Delta l))\\&=\frac{m\omega^2 l}{2}\left(\frac{l^3}{(l-\Delta l)^3}-\frac{l^3}{(l+\Delta l)^3}\right)\\&\approx 3m\omega^2\Delta l\end{aligned}$$

体系径向振动的圆频率为$\omega'=\sqrt{\dfrac{F}{m\Delta l}}=\sqrt{3}\omega$

题二

在真空中，圆盘向外辐射光子，因反冲获得动量，从而获得动能，显然最大动能在辐射完所有热量$Q=CT$时获得。

由于圆盘两面的辐射本领不同，所以黑体和反射系数为r的反射面辐射的热量分别为$\dfrac{Q}{2-r}$和$\dfrac{(1-r)Q}{2-r}$。

取圆盘半径为单位半径，考虑环绕圆盘的单位球面，记球面上垂直圆盘方向的单位面积上辐射的热量为q，则圆盘的这一面辐射的总热量为

$$\int_0^{\pi/2}q\cos\theta\times(2\pi\sin\theta)d\theta=\pi q$$

而圆盘因反冲获得的动量为

$$\int_0^{\pi/2}\frac{q}{c}\cos^2\theta\times(2\pi\sin\theta)d\theta=\frac{2}{3c}\pi q$$

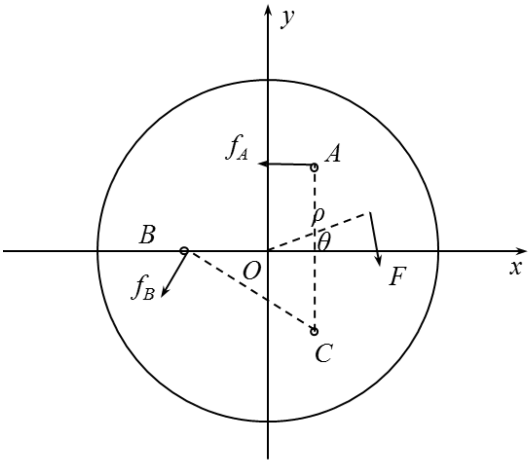
考虑正反两面的辐射，可求得圆盘的动量为

$$\frac{2}{3c}\left(\frac{Q}{2-r}-\frac{(1-r)Q}{2-r}\right)=\frac{2r}{3(2-r)}\frac{CT}{c}$$

相应的动能为

$$\frac{\left(\dfrac{2r}{3(2-r)}\dfrac{CT}{c}\right)^2}{2m}=\frac{4r^2C^2T^2}{18(2-r)^2mc^2}$$

题三



如果滑动，至少两个脚发生滑动，先考虑C不动，A,B两个脚滑动的情况。

设三条腿受到的正压力分别为N_A,N_B,N_C，由x轴和y轴力矩平衡可以得到

$$N_A=N_B=N_C=N \quad (1)$$

因此在临界情况下，三条腿的摩擦力应满足

$$f_A=f_B=\mu N=f_0，\quad f_C<f_0 \quad (2)$$

以C为矩心力矩平衡：

$$f_A\cdot\sqrt{3}l+f_B\cdot\sqrt{3}l=F\rho+Fl\sin\left(\theta-30^\circ\right) \quad (3)$$

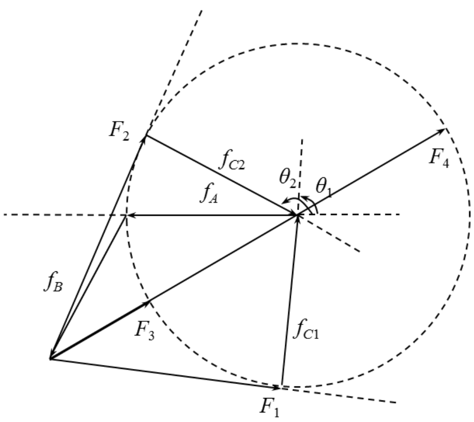
得到：

$$F=\frac{2\sqrt{3}f_0 l}{\rho+l\sin\left(\theta-30^\circ\right)} \quad (4)$$

水平方向力平衡：

$$\vec{f}_A+\vec{f}_B+\vec{F}=-\vec{f}_C \quad (5)$$

做出矢量图：



图中的F_1,F_2标记了使这种情况下外力方向的范围，F_3,F_4则标记了这种情况下外力大小的范围。从几何条件可以得到此时ρ方向的最小值为：

$$\theta_1=30°+\arccos\frac{f_0}{\sqrt{3}f_0}=84.7° \quad (6)$$

此时的外力为：

$$F_1=\sqrt{\left(\sqrt{3}f_0\right)^2-f_0^2}=\sqrt{2}f_0 \quad (7)$$

带入F的表达式得到此时对应的ρ为：

$$\rho_1=\frac{2\sqrt{3}f_0l}{\sqrt{2}f_0}-l\sin\left(\theta_1-30°\right)=\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)l \quad (8)$$

ρ方向的最大值为：

$$\theta_2=180°-\arccos\frac{f_0}{\sqrt{3}f_0}+30°=155.3° \quad (9)$$

此时的外力为：

$$F_1=F_2=\sqrt{2}f_0 \quad (10)$$

对应的ρ为：

$$\rho_2=\rho_1=\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)l \quad (11)$$

F_3,F_4分别为：

$$\begin{cases}F_3=\sqrt{3}f_0-f_0\\F_4=\sqrt{3}f_0+f_0\end{cases} \quad (12)$$

此时的角度为：

$$\theta_3=\theta_4=120° \quad (13)$$

对应的ρ为：

$$\begin{cases}\rho_3=\dfrac{2\sqrt{3}l}{\sqrt{3}-1}-l=\left(2+\sqrt{3}\right)l\\[2ex]\rho_4=\dfrac{2\sqrt{3}l}{\sqrt{3}+1}-l=\left(2-\sqrt{3}\right)l\end{cases} \quad (14)$$

而对于任意角度$\theta_1\le\theta\le\theta_2$，$F$的最小值为：

$$F_{\theta\min}=\sqrt{3}f_0\sin\left(\theta-30°\right)-\sqrt{f_0^2-\left(\sqrt{3}f_0\cos\left(\theta-30°\right)\right)^2} \quad (15)$$

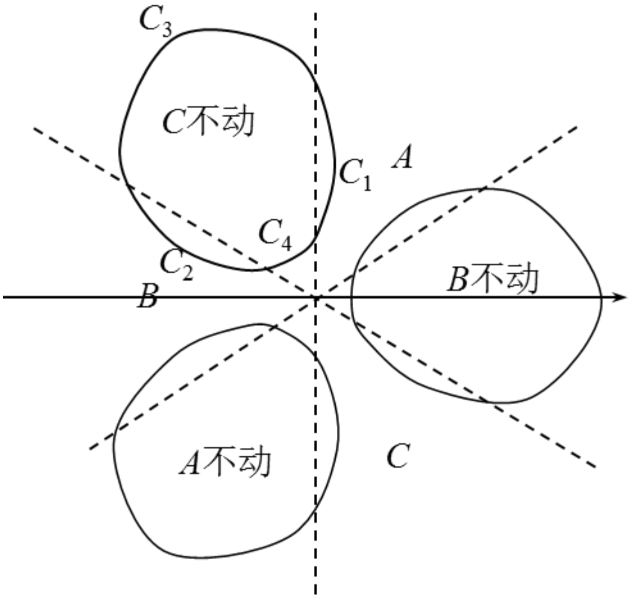
最大值为：

$$F_{\theta\max}=\sqrt{3}f_0\sin\left(\theta-30°\right)+\sqrt{f_0^2-\left(\sqrt{3}f_0\cos\left(\theta-30°\right)\right)^2} \quad (16)$$

带入F的表达式可得：

$$\begin{cases}\rho \le \left(\sin(\theta-30°)+\sqrt{9\sin^2(\theta-30°)-6}\right)l \\ \rho \ge \left(\sin(\theta-30°)-\sqrt{9\sin^2(\theta-30°)-6}\right)l\end{cases},85.7° \le \theta \le 155.3 \quad (17)$$

定性作图，并利用对称性得到A,B不动的区域如下图：



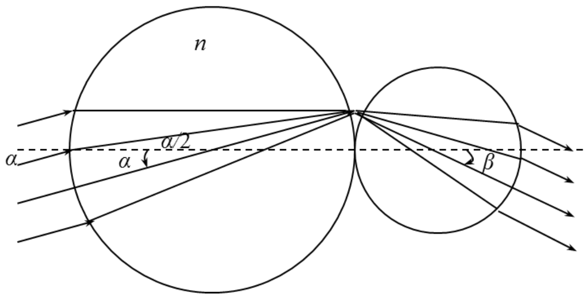
四个极值点的坐标分别为：

$$\begin{cases}C_1:\left(\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)l,84.7°\right) \\ C_2:\left(\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)l,155.3°\right) \\ C_3:\left(\left(2+\sqrt{3}\right)l,120°\right) \\ C_3:\left(\left(2-\sqrt{3}\right)l,120°\right)\end{cases}$$

其余两套极值点类似。

题四

（1）



如图，成像于两球切平面处时，有

$$r_1\alpha = r_2\beta$$

可以得到角放大率为

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{r_1}{r_2}$$

此时折射率n满足：

$$\alpha=n\cdot\frac{\alpha}{2}$$

即

$$n=2$$

（2）物体不在无穷远处时，最后的成像仍然在无穷远，说明经第一个球之后成像于第二个球左侧面处。设将第一球左侧面成像的相距为v_1，右侧面成像的物像距分别为u_2,v_2，则根据单球面折射成像公式得到：

$$\frac{1}{u-r_1}+\frac{n}{v_1}=\frac{n-1}{r_1}$$

$$\frac{n}{u_2}+\frac{1}{v_2}=\frac{1-n}{-r_1}$$

根据几何条件，有

$$u_2=2r_1-v_1$$

解得：

$$v_2=\frac{2r_1^2}{u-r_1}$$

时其成像于第二个球左侧面，因此应将第二个玻璃球向右平移

$$\Delta=v_2=\frac{2r_1^2}{r_1-u}$$

题五

（1）不移动控制杆时，外电阻始终接入电路，易知此时的加热功率为：

$$P_1=\left(\frac{\varepsilon}{r+R/2}\cdot\frac{1}{2}\right)^2R=25\text{W}$$

因此平衡时的温度T_1满足：

$$Q=T_1-T_0=P_1$$

得到温度为：

$$T_1=325\text{K}$$

（2）设向下移动x_1时，温度会发生变化，临界时控制杆与触控开关之间的作用力为零。设此时气体压强为P_1，则有控制杆和活塞受力平衡：

$$P_0S_0+kx_1=P_1S_0$$

气体状态方程：

$$\frac{P_1\left(V_0-S_0x_1\right)}{T_1}=\frac{P_0V_0}{T_0}$$

化简：

$$\left(1.2+100x_1\right)\left(1-1.2x_1\right)=1.2\cdot\frac{T_1}{T_0}$$

忽略掉方程左边第二个括号中对 1 的微小偏移量，得到：

$$x_1=1.2\cdot\frac{T_1-T_0}{100T_0}=0.1\text{cm}$$

（3）不接通电路时，加热功率为：

$$P_2=\left(\frac{\varepsilon}{r+R}\right)^2R=36\text{W}$$

可知330K 时的散热功率介于接通和不接通电路的加热功率，有可能实现恒温：当温度略高于330K 时，接通电路，散热功率大于加热功率，降温；当温度略低于330K 时，不接通电路，散热功率小于加热功率，升温；如此循环达到恒温。因此要求控制杆和接触开关之间的作用力为零，此情况与（2）问中的临界情况一致，因此方程一致，只需要将（2）问中 x_1 表达式中的 T_1 换成330K 即可。得到应将控制杆下移的距离为：

$$x_2=1.2\cdot\frac{330-300}{30000}\text{m}=0.12\text{cm}$$

题六

初始时刻，电子受到的洛仑兹力提供向心力，所以

$$r_0=\frac{mv_0}{qB_0}$$

此处为 q 电子电量。

考虑磁场增强、电子运行一周，此时感生电场对电子做的功为

$$\frac{q\pi r^2\Delta B}{2\pi r/v}=\frac{1}{2}m\Delta v^2=\frac{1}{2m}\Delta(mv)^2=\frac{q^2}{2m}\Delta(B^2r^2)$$

代入 $v=\dfrac{qBr}{m}$ 整理得

$$r^2\Delta(B^2)=2\Delta(B^2r^2)$$

即

$$\frac{\Delta(B^2)}{B^2}+2\frac{\Delta(r^2)}{r^2}=0$$

于是

$$B^2r^4=\text{常数}$$

磁场增强成为原来的2倍，电子运动的半径为原来的$\frac{1}{\sqrt{2}}$。

题七

考虑向相邻节点AB中的A节点注入电流I，由对称性AB支路上的电流为$I/4$，重新考虑从B节点流出电流I，由对称性AB支路上的电流为$I/4$，两者叠加可知AB间的电压为

$$U=\frac{IR}{2}$$

等效电流为I，于是等效电阻为$R/2$。

类似可知次相邻节点的等效电阻为

$$2\left(\frac{R}{4}+\frac{R}{12}\right)=\frac{2}{3}R$$

题八

在地面参考系中$\phi=\phi_0$的波面满足的方程为：

$$\omega t-k_x x-k_y y+\phi_0=\phi_0$$

即：

$$y=-\frac{k_x}{k_y}x+\frac{\omega t}{k_y}=-\cot\theta\cdot x+\frac{ct}{\sin\theta}$$

利用洛伦兹变换，有

$$\begin{cases}x=\gamma\left(x'+ut'\right)\\ y=y'\\ t=\gamma\left(t'+\dfrac{ux'}{c^2}\right)\end{cases}$$

带入上式得：

$$y'=-\cot\theta\Big(\gamma\left(x'+ut'\right)\Big)+\frac{c}{\sin\theta}\cdot\gamma\left(t'+\frac{ux'}{c^2}\right)$$

化简得到：

$$y'=-\frac{\gamma\left(c\cos\theta-u\right)}{c\sin\theta}x'+\frac{\gamma t'\left(c-u\cos\theta\right)}{\sin\theta}$$

利用洛伦兹速度变换得到光速为：

$$\begin{cases} c_x' = \dfrac{c\cos\theta - u}{1-\dfrac{u\cos\theta}{c}} \\ c_y' = \dfrac{c\sin\theta}{\gamma\left(1-\dfrac{u\cos\theta}{c}\right)} \end{cases}$$

得到速度方向与x'轴之间的夹角θ'的正切值为：

$$\tan\theta' = \frac{c_y'}{c_x'} = \frac{c\sin\theta}{\gamma\left(c\cos\theta - u\right)}$$

可知速度方向的斜率与等相位面斜率之积为：

$$-\frac{\gamma\left(c\cos\theta - u\right)}{c\sin\theta}\frac{c\sin\theta}{\gamma\left(c\cos\theta - u\right)} = -1$$

因此等相位面与速度方向垂直。