竞赛之窗

2009年北京市中学生数学竞赛(初二)

中图分类号: G424.79　　文献标识码: A　　文章编号: 1005-6416(2010)01-0024-03

一、选择题(每小题5分,共25分)

1. 当 $m=-\frac{1}{6}$ 时,代数式

$$\frac{21-5m}{m^2-9}-\frac{m}{m^2-9}\div\frac{m}{m+3}-\frac{m-3}{m+3}$$

的值是(　　).

(A) -1　(B) $-\frac{1}{2}$　(C) $\frac{1}{2}$　(D) 1

2. 已知一个正八边形中最长的对角线等于 a, 最短的对角线等于 b. 则这个正八边形的面积等于(　　).

(A) a^2+b^2　(B) a^2-b^2

(C) $a+b$　(D) ab

3. 计算 $\frac{1}{6\times11}+\frac{1}{11\times16}+\frac{1}{16\times21}+\frac{1}{21\times26}+\frac{1}{26\times31}+\frac{1}{31\times36}$ 的值是(　　).

(A) $\frac{1}{18}$　(B) $\frac{1}{36}$　(C) $\frac{1}{33}$　(D) $\frac{1}{66}$

4. 已知 n 为正整数,记 $1\times2\times\cdots\times n=n!$ (如 $1!=1$, $4!=1\times2\times3\times4=24$ 等). 若 $M=1!\times2!\times\cdots\times9!$, 则 M 的约数中是完全平方数的共有(　　)个.

(A) 504　(B) 672　(C) 864　(D) 936

5. 将2 009表示成两个整数的平方差的形式. 则不同的表示法有(　　)种.

(A) 16　(B) 14　(C) 12　(D) 10

二、填空题(每小题7分,共35分)

1. 计算 $\frac{45.1^3-13.9^3}{31.2}+45.1\times13.9$ 的值等于______.

2. 已知 $0<a<1$, 且

$$\left[a+\frac{1}{30}\right]+\left[a+\frac{2}{30}\right]+\cdots+\left[a+\frac{29}{30}\right]=18.$$

则 $[10a]$ 等于______($[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数).

3. 如图1,在▱$ABCD$ 中, $AD=a$, $CD=b$, 过点 B 分别作边 AD、CD 上的高 h_a、h_b. 已知 $h_a\geqslant a$, $h_b\geqslant b$, 对角线 $AC=20$. 则▱$ABCD$ 的面积为______.

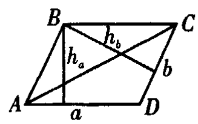

图1

4. 已知△ABC, $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的外角度数之比为 $\alpha:\beta:\gamma$ (α、β、γ 均为正数). 则 $\angle A:\angle B:\angle C$ 等于______(用含 α、β、γ 的式子之比表示).

5. 当 $1\leqslant x\leqslant2$ 时,化简

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\_\_\_\_\_\_.$$

三、(10分)设 $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=1$.

(1)求 $ab+bc+ca$ 的值;

(2)求 $a^4+b^4+c^4$ 的值.

四、(15分)如图2,在六边形 $ABCDEF$ 中,

$AB=BC=CD=DE=EF=FA$,

且 $\angle A+\angle C+\angle E=\angle B+\angle D+\angle F$.

求证:

$\angle A=\angle D$, $\angle B=\angle E$, $\angle C=\angle F$.

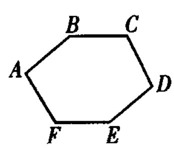

图2

五、(15分)(1)证明:由2 009个1和任意个0组成的自然数不是完全平方数;

(2)试说明,存在最左边2 009位都是1的形如 $\underbrace{11\cdots1}_{2\,009个}*\cdots**$ 的自然数($*$ 代表阿拉伯数码)是完全平方数.

参考答案

1. A.

当 $m\neq\pm3$ 时，题设代数式有意义. 则

$$\frac{21-5m}{m^2-9}-\frac{m}{m^2-9}\div\frac{m}{m+3}-\frac{m-3}{m+3}$$

$$=\frac{21-5m}{m^2-9}-\frac{m+3}{m^2-9}-\frac{m-3}{m+3}$$

$$=\frac{21-5m-m-3-m^2+6m-9}{m^2-9}$$

$$=\frac{9-m^2}{m^2-9}=-1.$$

由于 $m=-\frac{1}{6}$ 在该代数式的允许值范围之内，故代入结果等于 -1.

2. D.

如图 3，在正八边形中，最长的对角线为

$AE=BF=CG$

$=DH=a$,

最短的对角线为

$AC=BD=CE$

$=DF=EG=FH$

$=GA=HB=b$.

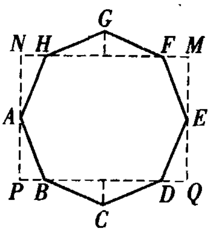

图 3

按图 3 所示进行割补得

$$S_{正八边形ABCDEFGH}=S_{四边形PQMN}=ab.$$

3. B.

$$\frac{1}{6\times11}+\frac{1}{11\times16}+\frac{1}{16\times21}+\frac{1}{21\times26}+\frac{1}{26\times31}+\frac{1}{31\times36}$$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{11}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{21}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{21}-\frac{1}{26}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{26}-\frac{1}{31}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{31}-\frac{1}{36}\right)$$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{36}\right)=\frac{1}{36}.$$

4. B.

注意到

$$M=1!\times2!\times\cdots\times9!$$

$$=2^8\times3^7\times4^6\times5^5\times6^4\times7^3\times8^2\times9$$

$$=2^{30}\times3^{13}\times5^5\times7^3.$$

因为一个完全平方数 n 具有形式

$$n=2^{2x}\times3^{2y}\times5^{2z}\times7^{2w}(x、y、z、w\in\mathbf{N}),$$

且 $2x\leqslant30,2y\leqslant13,2z\leqslant5,2w\leqslant3$,

所以，这样的 n 共有

$$16\times7\times3\times2=672(个).$$

5. C.

设 $x^2-y^2=2\,009$，即

$$(x+y)(x-y)=2\,009=7^2\times41.$$

则 2 009 有 6 个正因数，分别为 1、7、41、49、287 和 2 009.

因此，对应的方程组为

$$\begin{cases}x+y=-1,-7,-41,-49,-287,\\ \qquad -2\,009,1,7,41,49,287,2\,009;\\ x-y=-2\,009,-287,-49,-41,-7,\\ \qquad -1,2\,009,287,49,41,7,1.\end{cases}$$

故 (x,y) 共有 12 组不同的表示.

二、**1.** 3 481.

$$\frac{45.1^3-13.9^3}{31.2}+45.1\times13.9$$

$$=\frac{(45.1-13.9)(45.1^2+45.1\times13.9+13.9^2)}{45.1-13.9}+45.1\times13.9$$

$$=45.1^2+2\times45.1\times13.9+13.9^2$$

$$=(45.1+13.9)^2=59^2=3\,481.$$

2. 6.

由 $0<a+\frac{1}{30}<a+\frac{2}{30}<\cdots<a+\frac{29}{30}<2$，则

$$\left[a+\frac{1}{30}\right],\left[a+\frac{2}{30}\right],\cdots,\left[a+\frac{29}{30}\right]=0\text{ 或 }1.$$

由题设知，其中有 18 个等于 1. 因此，

$$\left[a+\frac{1}{30}\right]=\left[a+\frac{2}{30}\right]=\cdots=\left[a+\frac{11}{30}\right]=0,$$

$$\left[a+\frac{12}{30}\right]=\left[a+\frac{13}{30}\right]=\cdots=\left[a+\frac{29}{30}\right]=1.$$

故 $0<a+\frac{11}{30}<1,1\leqslant a+\frac{12}{30}<2$

$$\Rightarrow18\leqslant30a<19\Rightarrow6\leqslant10a<\frac{19}{3}$$

$$\Rightarrow[10a]=6.$$

3. 200.

由 $h_a\geqslant a,h_b\geqslant b$，此外，$a\geqslant h_b,b\geqslant h_a$，则 $h_a\geqslant a\geqslant h_b\geqslant b\geqslant h_a$，即 $h_a=a=h_b=b$，这意味

着□$ABCD$是个正方形.

因为该正方形的对角线$AC=20$,所以,□$ABCD$的面积等于200.

4. $(\beta+\gamma-\alpha):(\gamma+\alpha-\beta):(\alpha+\beta-\gamma)$.

设$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的外角分别为αx、βx、γx. 由题意得

$$\alpha x+\beta x+\gamma x=360°$$

$$\Rightarrow x=\frac{360°}{\alpha+\beta+\gamma}$$

$$\Rightarrow\angle A=180°-\frac{\alpha\cdot 360°}{\alpha+\beta+\gamma}$$

$$=\frac{(\alpha+\beta+\gamma-2\alpha)180°}{\alpha+\beta+\gamma}$$

$$=\frac{(\beta+\gamma-\alpha)180°}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

同理,$\angle B=\frac{(\gamma+\alpha-\beta)180°}{\alpha+\beta+\gamma}$,

$\angle C=\frac{(\alpha+\beta-\gamma)180°}{\alpha+\beta+\gamma}$

故$\angle A:\angle B:\angle C$

$=(\beta+\gamma-\alpha):(\gamma+\alpha-\beta):(\alpha+\beta-\gamma)$.

5. 2.

注意到

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$$

$$=\sqrt{(x-1)+2\sqrt{x-1}+1}+\sqrt{(x-1)-2\sqrt{x-1}+1}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}$$

$$=|\sqrt{x-1}+1|+|\sqrt{x-1}-1|.$$

因为$1\leqslant x\leqslant 2$,所以,$\sqrt{x-1}-1\leqslant 0$.

故$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$

$=\sqrt{x-1}+1-(\sqrt{x-1}-1)=2$.

三、(1)因为$a+b+c=0$,所以,

$(a+b+c)^2$

$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=0$.

又$a^2+b^2+c^2=1$,则$ab+bc+ca=-\frac{1}{2}$.

(2) $ab+bc+ca=-\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow(ab+bc+ca)^2=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=\frac{1}{4}.$$

又$a^2+b^2+c^2=1$,平方得

$a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2=1$

$\Rightarrow a^4+b^4+c^4=1-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

$=1-2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

四、如图4,联结AE、EC、CA.

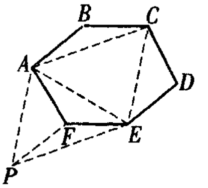

图4

因为六边形内角和为720°,又$\angle A+\angle C+\angle E=\angle B+\angle D+\angle F$,所以,

$\angle BAF+\angle BCD+\angle DEF$

$=\angle ABC+\angle CDE+\angle EFA=360°$.

如图4,作$\triangle EFP\cong\triangle CBA$,联结$AP$. 则

$\angle AFP=360°-\angle EFA-\angle PFE$

$=360°-\angle EFA-\angle ABC$

$=\angle CDE=\angle D$.

于是,$\triangle AFP\cong\triangle CDE\Rightarrow AP=CE$.

故$\triangle ACE\cong\triangle EPA\Rightarrow\angle CAE=\angle PEA$.

又$\angle BAC=\angle BCA=\frac{1}{2}(180°-\angle B)$,

$\angle FAE=\angle FEA=\frac{1}{2}(180°-\angle F)$,

故$\angle BAC+\angle FAE$

$=\frac{1}{2}(180°-\angle B)+\frac{1}{2}(180°-\angle F)$

$=\frac{1}{2}(360°-\angle B-\angle F)=\frac{1}{2}\angle D$.

又$\angle CAE=\angle PEA=\angle PEF+\angle AEF$

$=\angle BAC+\angle FAE=\frac{1}{2}\angle D$,

则$\angle BAF=(\angle BAC+\angle FAE)+\angle CAE$

$=\frac{1}{2}\angle D+\frac{1}{2}\angle D=\angle D$,

即$\angle A=\angle D$.

同理,$\angle B=\angle E$,$\angle C=\angle F$.

(下转第40页)

综上，当 AB 在$\odot O$ 内平移时，总有

$CN > EM$.

二、(1) 易知 a、b、c、t 均不为 0，有

$$\begin{cases} t=\dfrac{a-c}{b}, & ① \\ b=c(1+t+t^2) & ② \end{cases}$$

$$\Rightarrow b=c\left[1+\frac{a-c}{b}+\left(\frac{a-c}{b}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow b^3=b^2c+bc(a-c)+c(a^2-2ac+c^2)$$

$$\Rightarrow ca^2+bca-2c^2a+b^2c-bc^2+c^3-b^3=0 \quad ③$$

$$\Rightarrow ca^2+c(b-2c)a-(b-c)(b^2+c^2)=0.$$

因为 $c\neq 0$，所以，a 是二次方程

$$cx^2+c(b-2c)x-(b-c)(b^2+c^2)=0$$

的根.

当方程有重根 a 时，

$$\Delta=c^2(b-2c)^2+4c(b-c)(b^2+c^2)$$

$$=b^2c(4b-3c)=0.$$

但 $bc\neq 0$，得 $4b=3c$，代入式②得

$$3=4(1+t+t^2)\Leftrightarrow(2t+1)^2=0.$$

解得 $t=-\dfrac{1}{2}$.

(2) 把 $a=15$，$b=7$ 代入式③得

$$c^3-37c^2+379c-343=0.$$

由系数和为零，必有一解 $c=1$，则

$$(c-1)(c^2-36c+343)=0,$$

即 $(c-1)[(c-18)^2+19]=0$.

因此，$c=1$ 是唯一的取值.

代入式①得 $t=\dfrac{a-c}{b}=\dfrac{15-1}{7}=2$.

三、由 $\dfrac{m}{n}=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{20\ 090\ 908}$

$$=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{20\ 090\ 908}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{20\ 090\ 907}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10\ 045\ 454}+\frac{1}{10\ 045\ 455}\right)$$

$$=\frac{20\ 090\ 909}{1\times 20\ 090\ 908}+\frac{20\ 090\ 909}{2\times 20\ 090\ 907}+\cdots+\frac{20\ 090\ 909}{10\ 045\ 454\times 10\ 045\ 455}$$

$$=20\ 090\ 909\times\frac{p}{M},$$

其中，$M=1\times 2\times\cdots\times 20\ 090\ 907\times 20\ 090\ 908$，$p$ 为正整数. 故

$$20\ 090\ 909\times n\times p=M\times m.$$

这表明，$20\ 090\ 9091 \mid M\times m$.

但 20 090 909 为质数，不能整除 M.

因此，$20\ 090\ 909 \mid m$.

于是，m 是吉祥数.

（罗增儒　陕西师范大学数学系，710062
罗　衾　广东省惠州市华罗庚中学，516001）

（上接第 26 页）

五、(1) 任意自然数可被表示为 $3k+r$ $(r=0,1,2)$ 的形式，而

$$(3k+r)^2=9k^2+6kr+r^2\ (r^2=0,1,4),$$

即 r^2 被 3 除余 0 或 1，这意味着整数的平方被 3 除的余数为 0 或 1，也就是被 3 除余 2 的数一定不是完全平方数.

设由 2 009 个 1 和任意个 0 组成的自然数为 A，A 的数字和为 2 009，被 3 除余 2. 则 A 被 3 除余 2.

因此，A 不是完全平方数.

(2) 注意到数

$$a=\underbrace{11\cdots1}_{2\,009个}\underbrace{55\cdots5}_{2\,008个}6$$

$$=\underbrace{11\cdots1}_{2\,009个}\times 10^{2\,009}+\underbrace{55\cdots5}_{2\,009个}+1$$

$$=\underbrace{11\cdots1}_{2\,009个}\times 10^{2\,009}+5\times\underbrace{11\cdots1}_{2\,009个}+1$$

$$=\underbrace{11\cdots1}_{2\,009个}\times(9\times\underbrace{11\cdots1}_{2\,009个}+1)+5\times\underbrace{11\cdots1}_{2\,009个}+1$$

$$=9\times(\underbrace{11\cdots1}_{2\,009个})^2+\underbrace{11\cdots1}_{2\,009个}+5\times\underbrace{11\cdots1}_{2\,009个}+1$$

$$=(3\times\underbrace{11\cdots1}_{2\,009个})^2+6\times\underbrace{11\cdots1}_{2\,009个}+1$$

$$=(\underbrace{33\cdots3}_{2\,009个}+1)^2=(\underbrace{33\cdots3}_{2\,008个}4)^2.$$

则 $a=\underbrace{11\cdots1}_{2\,009个}\underbrace{55\cdots5}_{2\,008个}6$ 是最左边 2 009 位都是 1 的完全平方数.

可见，存在最左边 2 009 位都是 1 的完全平方数.

（李延林　提供）