2006 年北京市中学生数学竞赛(初二)

一、选择题(每小题 5 分,共 25 分)

1. 在直角三角形中,斜边的平方恰等于两条直角边乘积的 2 倍. 那么,这个三角形的三边长之比为(　　).

(A) $3:4:5$　　(B) $1:1:1$

(C) $2:3:4$　　(D) $1:1:\sqrt{2}$

2. 满足不等式 $|x-2006|+|x|\leqslant 9999$ 的整数 x 共有(　　)个.

(A) 9 998　　(B) 9 999

(C) 10 000　　(D) 10 001

3. 从 1,2,…,14 共 14 个自然数中取出 k 个数,确保其中有两个数,满足一个是另一个的 2 倍. 则 k 的最小值是(　　).

(A) 8　　(B) 9　　(C) 10　　(D) 11

4. 一个自然数 q,任意取出 2 个数字,如果左边的数字比右边的数字大,则称这个数有一个逆序. 用 $NX(q)$ 表示 q 的逆序的个数(如 $NX(3\ 214)=3$, $NX(12\ 344)=0$). 则 $NX(324\ 167\ 895)$ 被 4 除的余数是(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

5. 如图 1, P 是函数 $y=\frac{1}{2x}(x>0)$ 图像上一点,直线 $y=-x+1$ 分别交 x 轴、y 轴于点 A、B,作 $PM\perp x$ 轴于点 M,交 AB 于点 E,作 $PN\perp y$ 轴于点 N,交 AB 于点 F. 则 $AF\cdot BE$ 的值为(　　).

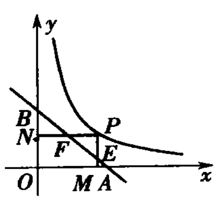

图 1

(A) 2　　(B) $\sqrt{2}$　　(C) 1　　(D) $\frac{1}{2}$

二、填空题(每小题 7 分,共 35 分)

6. 若连续的 5 个自然数每一个都是合数,则称这一组数为"孪生 5 合数". 那么,在不超过 100 的自然数中共有孪生 5 合数______组.

7. 在 $\triangle ABC$ 中, $AC=BC$, $\angle ACB=90°$, D、E 是边 AB 上的两点, $AD=3$, $BE=4$, $\angle DCE=45°$. 则 $\triangle ABC$ 的面积 =______.

8. 某人从住地外出有两种方案:一种是骑自行车去,另一种是乘公共汽车去. 公共汽车的速度比自行车的速度快,但要等候(候车时间可看作固定不变的),在任何情况下,他总是选择用时最少的方案. 表 1 表示他到达 A、B、C 三地采用最佳方案所需时间.

表 1

目的地	目的地离住地距离	最佳方案所需时间
A	2 km	12 min
B	3 km	15.5 min
C	4 km	18 min

为了到达离住地 8 km 的地方,他最少需要______ min.

9. 如图 2,在长方形 $ABCD$ 中, $AB=7$, $AD=24$, P 为边 BC 上一个动点,作 $PE\perp AC$ 于点 E, $PF\perp BD$ 于点 F. 则 $PE+PF=$______.

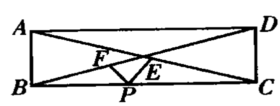

图 2

10. 有大小一样、张数相同的黑白两种颜色的正方形纸片. 小张先用白色纸片拼成中间没有缝隙的长方形,然后用黑色纸片围绕已经拼成的白色长方形继续拼成更大的长方形后,又用白色纸片拼下去. 这样重复拼,当小张用黑色纸片拼过 5 次以后,黑、白纸片正好用完. 那么,黑色纸片至少有______张.

三、(15 分) 在五角星形 $ABCDE$ 中,相交线段的交点字母如图 3 所示. 已知

$AQ = QC$,

$BR = RD$,

$CR = RE$,

$DS = SA$.

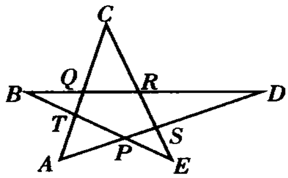

图 3

求证:$BT = TP = PE$.

四、(15 分) 三个互不相同的正整数,如果任何两个的乘积与 1 的和都恰被第三个数整除,则称这样的三个正整数为“玲珑三数组”.

(1) 求证:玲珑三数组中的三个正整数两两互质;

(2) 求出所有的玲珑三数组.

五、(10 分) 如图 4,在一个 $\triangle ABC$ 内部有 m 个点,在这些点之间及这些点与 A、B、C 三点之间联结一些线段,这些线段在三角形内部没有这 m 个点以外的公共点,并恰将 $\triangle ABC$ 分成的小区域全部都是小三角形. 请你证明:

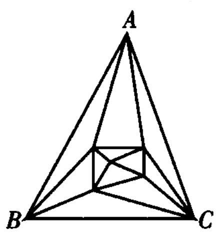

图 4

(1) 分成的小三角形区域的总个数必为奇数;

(2) 位于 $\triangle ABC$ 内部的所联结线段的条数是 3 的倍数.

参 考 答 案

一、**1.** D.

设两条直角边为 a、b. 则 $a^2 + b^2 = 2ab \Rightarrow a = b$.

故此直角三角形的三边长之比为 $1:1:\sqrt{2}$.

2. B.

当 $x \geq 2006$ 时,有 $x - 2006 + x \leq 9999$,即 $x \leq \frac{2006 + 9999}{2}$,亦即 $x \leq 6002$;

当 $0 \leq x < 2006$ 时,有 $2006 - x + x \leq 9999$,显然成立;

当 $x < 0$ 时,有 $2006 - x - x \leq 9999$,即 $x \geq \frac{2006 - 9999}{2}$,亦即 $x \geq -3996$.

综上,$-3996 \leq x \leq 6002$.

故满足不等式的整数 x 共有 9 999 个.

3. C.

将{1,2,…,14}分成

{1,2},{3,6},{4,8},{5,10},{7,14},{9,11,12,13}.

若从{1,2,…,14}中取出 10 个数,则在前 5 组中至少取出 6 个数,即在同一组中的两个数被取出,满足题设要求.

显然,{1,3,4,5,7,9,11,12,13}不满足要求.

故 $k_{\min} = 10$.

4. A.

$NX(324\,167\,895) = NX(32\,416\,785) + 1$

$= NX(32\,415) + 4 = NX(3\,241) + 4 = 4 + 4 = 8$.

5. C.

设 $P(x, y)$.

由 $FN \parallel OA$,得 $\frac{AF}{AB} = \frac{ON}{OB}$,即 $AF = \sqrt{2}y$.

同理,$BE = \sqrt{2}x$.

故 $AF \cdot BE = 2xy = 1$.

二、**6.** 10.

易知,不超过 100 的质数为

2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97.

孪生 5 合数共有 10 组,即

24,25,26,27,28;32,33,34,35,36;

48,49,50,51,52;54,55,56,57,58;

62,63,64,65,66;74,75,76,77,78;

84,85,86,87,88;90,91,92,93,94;

91,92,93,94,95;92,93,94,95,96.

7. 36.

如图 5,将 $\triangle CEB$ 顺时针旋转 90°,得到 $\triangle CE'A$. 联结 $E'D$.

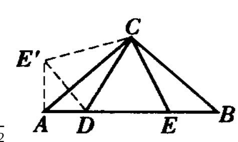

图 5

易知 $AE' = BE = 4$,$\angle E'AD = 90°$,故

$E'D = \sqrt{AE'^2 + AD^2}$

$= \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

由 $\angle DCE = 45° = \angle DCE'$,知

$\triangle DCE \cong \triangle DCE'$.

故 $DE = ED' = 5$, $AB = 12$.

所以, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{4} AB^2 = 36$.

8. 28.

设自行车速度为 v_0, 公共汽车速度为 v_1, 候车时间为 t_0.

易知, 当距离 $S < \frac{t_0}{\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v_1}}$ 时, 此人骑自行车;

当距离 $S \geq \frac{t_0}{\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v_1}}$ 时, 此人乘公共汽车.

又 $\frac{15.5 - 12}{3 - 2} \neq \frac{18 - 15.5}{4 - 3}$, 故此人到 A、B、C 三地选择的不是同一种方案, 即到 A 地骑自行车, 到 C 地乘公共汽车.

又 $\frac{12}{2} \neq \frac{15.5}{3}$, 故此人到 B 地不骑自行车, 而乘公共汽车.

所以, 有 $\begin{cases} \frac{2}{v_0} = 12, \\ t_0 + \frac{3}{v_1} = 15.5, \\ t_0 + \frac{4}{v_1} = 18. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} v_0 = \frac{1}{6}, \\ v_1 = \frac{2}{5}, \\ t_0 = 8. \end{cases}$

故此人为了到达离住地 8 km 的地方, 最少需要

$8 + \frac{8}{\frac{2}{5}} = 28$ (min).

9. 6.72.

设对角线 AC、BD 的交点为 O. 联结 OP.

由 $AB = 7$, $AD = 24$, 得 $OB = OC = \frac{25}{2}$.

由 $S_{\triangle OBC} = S_{\triangle OPB} + S_{\triangle OPC}$, 得

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} OB \cdot PF + \frac{1}{2} OC \cdot PE$,

即 $PE + PF = \frac{AB \cdot BC}{2OB} = \frac{7 \times 24}{25} = 6.72$.

10. 350.

设第 1 个白色长方形为 $a \times b$, 则第 1 个黑色长方形为 $(a+2)(b+2)$, 第 2 个白色长方形为 $(a+4) \cdot (b+4)$, ……, 第 5 个黑色长方形为 $(a+18)(b+18)$.

显然, 每个黑色长方形的周长与其内白色长方形的周长(纸片个数)之差为 8.

由黑、白正方形纸片个数相等有

$5 \times 8 = (a-2)(b-2)$.

解得 $(a, b) = (3, 42), (4, 22), (6, 12), (7, 10)$.

因此, 相应的黑色正方形纸片个数为

$\frac{1}{2}(a+18)(b+18) = 630, 440, 360, 350$.

故黑色正方形纸片至少有 350 张.

注: 此题必须强调"每次只能拼加一层纸片(除第 1 个白色长方形外)".

否则, 从最外层依次可取为(黑、白, 黑、白, 白、黑, 白、黑, 白、黑, 黑、白), 最里层的白色长方形为 1×2 (如图 6).

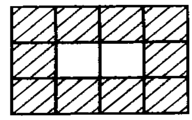

图 6

因此, 黑、白正方形纸片个数之差为

$8 + 8 - 8 - 8 - 8 + 8 = 0$.

此时, 黑色正方形纸片个数为 $\frac{24 \times 23}{2} = 276$.

三、如图 7, 联结 AE、AB、BC、CD、DE、TR、AR, 记 AR 与 BE 的交点为 O.

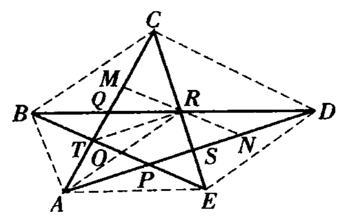

图 7

由 $BR = RD$, $CR = RE$, 所以, 四边形 $BCDE$ 是平行四边形.

因此, $DE \underline{\parallel} BC$.

由 $BR = RD$, $DS = SA$, 根据三角形中位线定理, 得 $RS \parallel BA$.

由 $AQ = QC$, $CR = RE$, 根据三角形中位线定理, 得 $QR \parallel AE$, 即 $BD \parallel AE$. 所以, 四边形 $ABRE$ 为平行四边形.

于是, $AB = ER = RC$, $AB \parallel RC$.

所以, 四边形 $ARCB$ 为平行四边形.

因此, $BQ = QR$.

同理, $RS = SE$.

过点 R 作 $MN \parallel BE$, 分别交 CQ、DS 于点 M、N.

易证 $BT = MR = 2OT$.

所以, $BT = \frac{2}{3} BO = \frac{1}{3} BE$.

同理, $PE = NR = 2OP$.

故 $PE = \frac{2}{3} OE = \frac{1}{3} BE$.

于是, $BT + PE = \frac{2}{3} BE$.

从而, $TP = \frac{1}{3} BE$. 因此, $BT = TP = PE$.

四、设三个互不相同的正整数为 a、b、c, 满足 $c \mid (ab+1)$, $b \mid (ca+1)$, $a \mid (bc+1)$.

2006 年广东省初中数学竞赛初赛

说明:每小题 4 分,共 120 分.

1. 直角坐标平面上将二次函数

$$y=-2(x-1)^2-2$$

的图像向左平移 1 **个单位,再向上平移** 1 **个单位.则其顶点为(　　).**

(A) $(0,0)$　　(B) $(1,-2)$

(C) $(0,-1)$　　(D) $(-2,1)$

2. 下列计算正确的是(　　).

(A) $(ab^4)^4=ab^8$

(B) $(-3pq)^2=-6p^2q^2$

(C) $x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

(D) $3(a^2)^3-6a^6=-3a^6$

3. 如图 1 **,记以** Rt $\triangle ABC$ **三边为直径的半圆面积分别为** S_1、S_2、S_3 **,**Rt $\triangle ABC$ **面积为** S**.则它们之间的关系为(　　).**

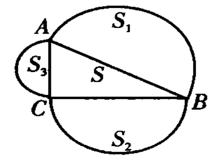

图 1

(A) $S=S_1$

(B) $S_1=S_2+S_3$

(C) $S=S_1+S_2$

(D) $S=S_1+S_2+S_3$

4. 一辆公共汽车从车站开出,加速行驶一段时间后开始匀速行驶.过了一段时间,汽车到达下一车站.乘客上下车后汽车开始加速,一段时间后又开始匀速行驶.图 2 **中近似**

接下来证明:a、b、c 必两两互质.

如若不然,假设 $(a,b)>1 \Rightarrow (ca,b)=d>1$,此时,$ca+1$ 不能被 d 整除,即 $d\nmid(ca+1)$,但 $d|b$,于是,$b\nmid(ca+1)$,这与已知 $b|(ca+1)$ 矛盾.

所以,$(a,b)=1$.

同理,$(b,c)=1$,$(a,c)=1$.

易知,数 $s=ab+bc+ca+1$ 可同时被 a、b、c 整除.

由于已证 a、b、c 两两互质,因此,$abc|s$.

所以,$s\geq abc$. ①

不失一般性,设 $1\leq a<b<c$.

若 $a=1$,则 $c|(b+1)$,$b|(c+1)$,可知 b、c 为两个连续的自然数,有 $c=b+1$.所以,由 $b|(c+1)$,知 $b|(b+2)$.

从而,$b|2$.

但 $b>a=1$,由 $b=2$,得 $c=3$.

因此,$(1,2,3)$ 为一组解.

若 $2\leq a<b<c$,当 $b\geq 4$ 时,可得 $c\geq 5$,故

$abc\geq 2\times 4\times 5=40$.

但 $s=ab+bc+ca+1\leq\frac{abc}{5}+\frac{abc}{2}+\frac{abc}{4}+1$

$=\frac{19}{20}abc+1=abc-\frac{abc}{20}+1\leq abc-\frac{40}{20}+1$

$=abc-1<abc$,

与式①矛盾.

因此,$b<4$.故只能是 $a=2$,$b=3$.

由 $c|(ab+1)=2\times 3+1=7$,知 $c=7$.

因此,$(2,3,7)$ 为另一组解.

所以,所求的玲珑三数组为 $(1,2,3)$ 和 $(2,3,7)$.

五、(1) 设小三角形的总数为 n,这 n 个小三角形的边中有 3 条是原三角形的边 AB、BC、CA,所以,位于内部的小三角形的边数为 $3n-3$.而且这些边每一条属于两个小三角形,即每一条边被计算了两次.设 e 为位于 $\triangle ABC$ 内部的线段的数目,则

$$2e=3n-3=3(n-1).$$

于是,$3(n-1)$ 是偶数,$n-1$ 是偶数.

所以,分成的小三角形的总个数 n 必为奇数.

(2) 显然,$3|2e$.

因为 $(3,2)=1$,所以,$3|e$.

因此,位于三角形内部的所联结线段的条数是 3 的倍数.

(李延林　提供)