

# 2001 年北京市中学生数学竞赛 初二年级复赛

(2001-04-15)

**一、填空题(满分 40 分,每小题 8 分)**

1. 已知有理数  $x$  满足方程  $\frac{1}{2001 - \frac{x}{x-1}} = \frac{1}{2001}$ .

则  $\frac{x^3 - 2001}{x^4 + 29} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

2. 如图 1, 正方形  $ABCD$  的面积是 64 平方厘米, 正方形  $CEFG$  的面积是 36 平方厘米,  $DF$  与  $BG$  相交于点  $O$ . 则  $DBO$  的面积等于  $\underline{\hspace{2cm}}$  平方厘米.

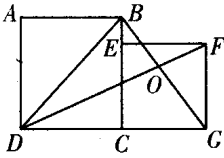


图 1

3. 已知  $a^2 + b^2 = 6ab$  且  $a > b > 0$ . 则  $\frac{a+b}{a-b} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

**4. 化简表达式**

$$\left[ 6 + \frac{a - \sqrt[3]{131 + a^3} - \sqrt{17160}}{a - \sqrt[3]{131 + a^3} - \sqrt{17160}} \right]^4,$$

所得的结果等于  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

5. 在边长为 1 厘米的正  $ABC$  中,  $P_0$  为  $BC$  边上一点, 作  $P_0P_1 \perp CA$  于点  $P_1$ , 作  $P_1P_2 \perp AB$  于点  $P_2$ , 作  $P_2P_3 \perp BC$  于点  $P_3$ . 如果点  $P_3$  恰与点  $P_0$  重合, 则  $P_1P_2P_3$  的面积是  $\underline{\hspace{2cm}}$  平方厘米.

**二、(满分 15 分) 证明恒等式:**

$$a^4 + b^4 + (a+b)^4 = 2(a^2 + ab + b^2)^2.$$

三、(15 分) 在六张纸片的正面分别写上整数 1、2、3、4、5、6, 打乱次序后, 将纸片翻过来, 在它们的反面也随意分别写上 1~6 这六个整数, 然后计算每张纸片正面与反面所写数字之差的绝对值, 得出六个数. 请你证明: 所得的六个数中至少有两个是相同的.

四、(15 分) 如图 2, 在等腰  $ABC$  中, 延长边  $AB$  到点  $D$ , 延长边  $CA$  到点  $E$ , 连结  $DE$ , 恰

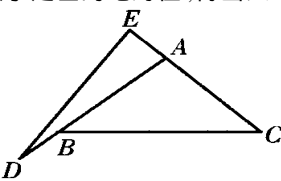


图 2

有  $AD = BC = CE = DE$ . 求证:  $\angle BAC = 100^\circ$ .

五、(15 分) 1 与 0 交替排列, 组成下面形式的一串数

101, 10 101, 1 010 101, 101 010 101, ...

请你回答, 在这串数中有多少个质数? 并请证明你的论断.

## 参 考 答 案

一、1. -69    2.  $24\frac{8}{37}$     3.  $\sqrt{2}$     4. 625    5.  $\frac{\sqrt{3}}{12}$

二、 $a^4 + b^4 + (a+b)^4 - 2(a^2 + ab + b^2)^2$   
 $= (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 + (a^2 + 2ab + b^2)^2$   
 $- 2(a^2 + ab + b^2)^2$   
 $= [(a^2 + b^2)^2 - (a^2 + ab + b^2)^2]$   
 $+ [(a^2 + 2ab + b^2)^2 - (a^2 + ab + b^2)^2]$   
 $- 2a^2b^2$   
 $= (2a^2 + 2b^2 + ab)(-ab) + (2a^2 + 3ab + 2b^2)$   
 $\cdot ab - 2a^2b^2$   
 $= ab(-2a^2 - 2b^2 - ab + 2a^2 + 3ab + 2b^2 - 2ab)$   
 $= 0.$

三、设六张卡片正面写的数是

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6;$$

反面写的数对应为  $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ .

( $a_i, b_i$  分别取值为 1, 2, 3, 4, 5, 6.  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ .)

则这六张卡片正面写的数与反面写的数的绝对值分别为

$$|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, |a_3 - b_3|,$$

$$|a_4 - b_4|, |a_5 - b_5|, |a_6 - b_6|.$$

设这六个数两两都不相等, 则它们只能取 0、1、2、3、4、5 这六个值. 于是,

$$\sum_{i=1}^6 |a_i - b_i| = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 \quad (1)$$

是个奇数.

另一方面,  $|a_i - b_i|$  与  $a_i - b_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ) 的奇偶性相同, 所以,

$$\sum_{i=1}^6 |a_i - b_i|$$

与

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^6 (a_i - b_i) \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6) \\ & \quad - (b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6) \\ &= (1+2+3+4+5+6) - (1+2+3+4+5+6) \\ &= 0 \end{aligned}$$

的奇偶性相同,是个偶数,与式(1)矛盾.

故  $|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, |a_3 - b_3|, |a_4 - b_4|, |a_5 - b_5|, |a_6 - b_6|$  这六个数中至少有两个是相同的.

四、易知  $ADE$  为等腰三角形,其底角  $EAD$  必为锐角,所以等腰  $ABC$  中,  $BAC$  为钝角,必是顶角,则  $AB, AC$  是腰,有  $AB = AC$ .

如图 3,过  $C$  作  $AD$  的平行线  $CF$ ,与过  $D$  所作  $BC$  的平行线交于点  $F$ ,连结  $EF$ ,易知  $BCFD$  为平行四边形.因此,  $DB = CF, BC = DF, EAD = ECF$ .

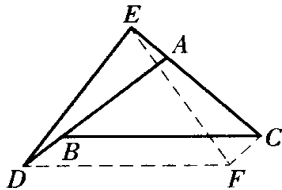


图 3

在  $ADE$  与  $CEF$  中,

$$AD = CE, AE = DB = CF, \angle EAD = \angle ECF,$$

则  $\triangle ADE \cong \triangle CEF$ , 有  $ED = EF$ .

但  $ED = BC = DF, \triangle DEF$  是等边三角形,那么,  $\angle EDF = 60^\circ$ .

设  $\angle BAC = \alpha$ , 则

$$\angle ADF = \angle ABC = \frac{180^\circ - \alpha}{2}, \angle DAE = 180^\circ - \alpha,$$

$$\begin{aligned} \angle ADE &= 180^\circ - 2 \angle DAE = 180^\circ - 2(180^\circ - \alpha) \\ &= 2\alpha - 180^\circ \end{aligned}$$

由  $\angle ADF + \angle ADE = \angle EDF = 60^\circ$ , 得

$$\frac{180^\circ - \alpha}{2} + (2\alpha - 180^\circ) = 60^\circ$$

解得  $\alpha = 100^\circ$ ,

即  $\angle BAC = 100^\circ$ .

五、很明显, 101 是个质数.

下面证明,  $N = \underbrace{101010\dots01}_k (k \geq 3)$  都是合数(中

$k \geq 1$

间有  $k-1$  个 0).

$$11N = 11 \times \underbrace{101010\dots01}_k$$

$k \geq 1$

$$\Rightarrow \underbrace{11\dots11}_{2k \text{ 个 } 1} \times \underbrace{11\dots11}_k \times (10^k + 1).$$

(1) 当  $k$  为不小于 3 的奇数时, 根据被 11 整除的判别法可知 11 不整除  $\underbrace{11\dots11}_k$ , 所以,  $11 \mid (10^k + 1)$ , 即

$$\frac{10^k + 1}{11} = M_1 > 1.$$

$$\text{故 } N = \underbrace{11\dots11}_k \times \left( \frac{10^k + 1}{11} \right) = \underbrace{11\dots11}_k \times M_1.$$

则  $N$  是个合数.

(2) 当  $k$  为不小于 3 的偶数时, 易知  $11 \mid \underbrace{11\dots11}_k$

$$\text{即 } \frac{\underbrace{11\dots11}_k}{11} = M_2 > 1.$$

$$\text{故 } N = \frac{\underbrace{11\dots11}_k}{11} \times (10^k + 1) = M_2 (10^k + 1).$$

则  $N$  是个合数.

综上, 当  $k \geq 3$  时,  $N = \underbrace{101010\dots01}_k$  必为合数.

所以, 在  $101, 10101, 1010101, 101010101, \dots$  中, 只有 101 是质数.

(首都师范大学 周春荔 提供)

## 欢迎 中学生数学 订阅

高中刊邮发代号: 2-519

初中刊邮发代号: 2-518

《中学生数学》是中国数学会为中学生创办的一份期刊。她希望成为同学们的朋友, 希望成为教师指导学生们学习、交流的一个园地。

欢迎广大师生到邮局(所)订阅(两种刊物都是每月 1 期, 全年 12 期, 每期定价 3 元)。也可以直接与杂志社联系邮购(加 20% 的邮寄费)。

邮购地址: 首都师范大学数学系《中学生数学》杂志社, 邮编: 100037。

联系电话: 010-68902486