

2007年第24届全国中学生物理竞赛预赛复赛试卷及答案

目 录

第24届全国中学生物理竞赛预赛试卷 .....	1
第24届全国中学生物理竞赛预赛试题答案 .....	4
第24届全国中学生物理竞赛复赛试卷 .....	15
第24届全国中学生物理竞赛复赛试题参考解答 .....	19

本卷共八题，满分 200 分

一、( 25 分) 填空题

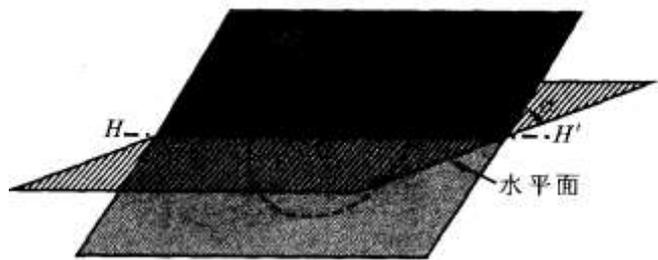
- 2006 年诺贝尔物理学奖授予美国科学家约翰·马瑟和乔治·斯穆特，以表彰他们发现了宇宙微波背景辐射的黑体辐射形式和各向异性。这一发现为有关宇宙起源的\_\_\_\_\_理论提供了进一步的支持，使宇宙学进入了“精确研究”时代。
- 恒星演化到了后期，某些恒星在其内部核燃料耗尽时，会发生强烈的爆发，在短短的几天中，亮度陡增千万倍甚至上亿倍。我国《宋史》第五十六卷中对当时观测到的上述现象作了详细记载。2006 年 5 月是我国发现此现象一千周年，为此在杭州召开了有关的国际学术研讨会。天文学上把演化到这一阶段的恒星称为\_\_\_\_\_，恒星演变到这一阶段，预示着一颗恒星的终结。此后，它可能成为\_\_\_\_\_或\_\_\_\_\_。
- 2006 年 11 月 21 日，中国、欧盟、美国、日本、韩国、俄罗斯和印度七方在法国总统府正式签署一个能源方面的联合实施协定及相关文件，该协定中的能源是指\_\_\_\_\_能源。
- 潮汐是一种常见的自然现象，发生在杭州湾钱塘江入海口的“钱江潮”是闻名世界的潮汐现象。在农历初一和十五前后各有一次大潮，在两次大潮之间又各有一次小潮。试把每月中出现两次大潮时地球、月球和太阳的相对位置示意图定性画在下面。

试把每月中出现两次小潮时地球、月球和太阳的相对位置示意图定性画在下面。

- 如图所示，用双线密绕在一个长直圆柱上，形成两个螺线管线圈  $aa'$  和  $bb'$ （分别以实线和虚线表示），已知两个线圈的自感都是  $L$ 。今若把  $a$  与  $b$  两端相连，把  $a'$  和  $b'$  两端接入电路，这时两个线圈的总自感等于\_\_\_\_\_；若把  $b$  与  $a'$  相连，把  $a$  和  $b'$  两端接入电路，这时两个线圈的总自感等于\_\_\_\_\_；若把  $a$  与  $b'$  两端相连作为一端， $a'$  与  $b$  相连作为另一端，把这两端接入电路，这时两个线圈的总自感等于\_\_\_\_\_。



- ( 25 分) 如图所示，一块光滑的平板能绕水平固定轴  $HH'$  调节其与水平面所成的倾角。板上有一根长为  $l=1.00\text{m}$  的轻细绳，它的一端系住一质量为  $m$  的小球  $P$ ，另一端固定在  $HH'$  轴上的  $O$  点。当平板的倾角固定在  $\alpha$  时，先将轻绳沿水平轴  $HH'$  拉直（绳与  $HH'$  重合），然后给小球一沿着平板并与轻绳垂直的初速度  $v_0=5.0\text{m/s}$ 。若小球能保持在板面内作圆周运动，问倾角  $\alpha$  的值应在什么范围内（取图中  $\alpha$  处箭头所示方向为  $\alpha$  的正方向）。取重力加速度  $g=10\text{m/s}^2$ 。



- ( 25 分) 如图所示，绝热的活塞  $S$  把一定质量的稀薄气体（可视为理想气体）密封在水平放置的绝

热气缸内. 活塞可在气缸内无摩擦地滑动. 气缸左端的电热丝可通弱电流对气缸内气体十分缓慢地加热. 气缸处在大气中, 大气压强为  $p_0$ . 初始时, 气体的体积为  $V_0$ 、压强为  $p_0$ . 已知 1 摩尔该气体温度升高 1K 时其内能的增量为  $\nu$  (已知恒量). 求以下两种过程中电热丝传给气体的热量  $Q_1$  与  $Q_2$  之比.

1. 从初始状态出发, 保持活塞 S 位置固定, 在电热丝中通以弱电流, 并持续一段时间, 然后停止通电, 待气体达到热平衡时, 测得气体的压强为  $p_1$ .
2. 仍从初始状态出发, 让活塞处在自由状态, 在电热丝中通以弱电流, 也持续一段时间, 然后停止通电, 最后测得气体的体积为  $V_2$ .

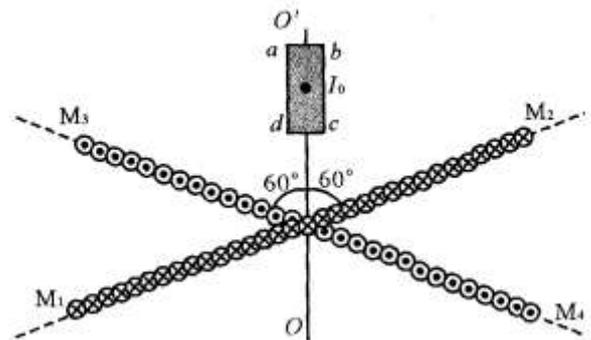


四、(25 分) 如图所示,  $M_1 M_2$  和  $M_3 M_4$  都是由无限多根无限长的外表面绝缘的细直导线紧密排列成的导线排横截面, 两导线排相交成  $120^\circ$ ,  $OO'$  为其角平分线. 每根细导线中都通有电流  $I$ , 两导线排中电流的方向相反, 其中  $M_1 M_2$  中电流的方向垂直纸面向里. 导线排中单位长度上细导线的根数为  $\lambda$ . 图中的矩形  $abcd$  是用 N 型半导体材料做成的长直半导体片的横截面, ( $\overline{ab} \ll \overline{bc}$ ), 长直半导体片与导线排中的细导线平行, 并在片中通有均匀电流  $I_0$ , 电流方向垂

直纸面向外. 已知  $ab$  边与  $OO'$  垂直,  $\overline{bc} = l$ , 该半导体材料内载流子密度为  $n$ , 每个载流子所带电荷量的大小为  $q$ . 求此半导体片的左右两个侧面之间的电势差.

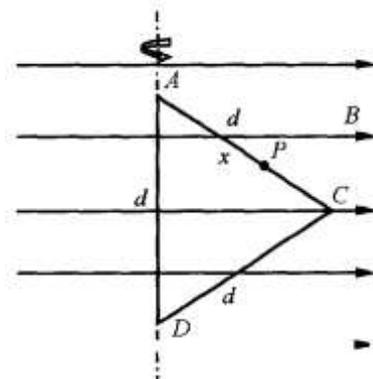
已知当细的无限长的直导线中通有电流  $I$  时, 电流产生的磁场离直导线的距离为  $r$  处的磁感应强度的大小为

$$B = k \frac{I}{r}, \text{ 式中 } k \text{ 为已知常量.}$$



五、(25 分) 如图所示,  $ACD$  是由均匀细导线制成的边长为  $d$  的等边三角形线框, 它以  $AD$  为转轴, 在磁感应强度为  $B$  的恒定的匀强磁场中以恒定的角速度  $\omega$  转动(俯视为逆时针旋转), 磁场方向与  $AD$  垂直. 已知三角形每条边的电阻都等于  $R$ . 取图示线框平面转至与磁场平行的时刻为  $t = 0$ .

1. 求任意时刻  $t$  线框中的电流.
2. 规定 A 点的电势为 0, 求  $t = 0$  时, 三角形线框的  $AC$  边上任一点 P (到 A 点的距离用  $x$  表示) 的电势  $U_p$ , 并画出  $U_p$  与  $x$  之间关系的图线.

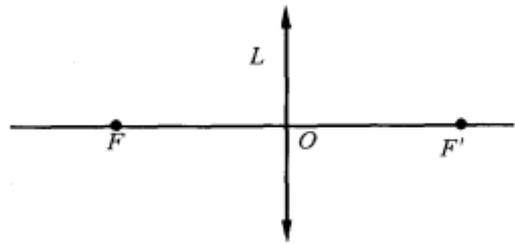


六、( 25 分)空间存在垂直于纸面方向的均匀磁场,其方向随时间作周期性变化,磁感应强度  $B$  随时间  $t$  变化的图线如图 1 所示.规定  $B > 0$  时,磁场的方向穿出纸面.现在磁场区域中建立一与磁场方向垂直的平面坐标  $Oxy$ ,如图 2 所示.一电荷量  $q = 5\pi \times 10^{-7}c$ ,质量  $m = 5 \times 10^{-10}kg$  的带电粒子,位于原点  $O$  处,在  $t = 0$  时刻以初速度  $v_0 = \pi m/s$  沿  $x$  轴正方向开始运动,不计重力的作用,不计磁场的变化可能产生的一切其它影响.

1. 试在图 2 中画出  $0 \sim 20 ms$  时间内粒子在磁场中运动的轨迹,并标出图 2 中纵横坐标的标度值(评分时只按图评分,不要求写出公式或说明.)
2. 在磁场变化  $N$  个( $N$  为整数)周期的时间内带电粒子的平均速度的大小等于\_\_\_\_\_.

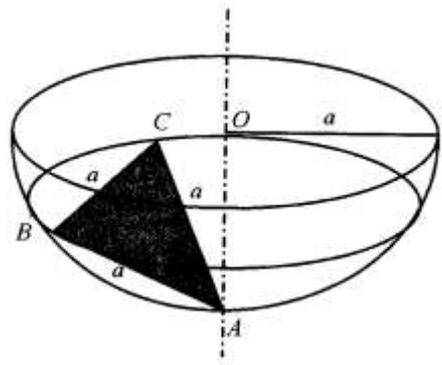
七、( 25 分)如图所示,  $L$  是一焦距为  $f$  的薄凸透镜( $F$  与  $F'$  为其焦点).在透镜右侧焦点  $F'$  处放置一曲率半径大小为  $R$  的球面反射镜(其顶点位于  $F'$  处),透镜和球面镜组成一轴对称的光学系统.在透镜  $L$  左侧光轴上有限远处有一发光点  $P$ ,它发出的傍轴光线经此光学系统后,恰好成像在  $P$  点.试在下面第 1 和第 2 小题中填空,在第 3 小题中作图.

1. 若球面镜为凹面镜,则  $P$  点到透镜的距离等于\_\_\_\_\_;若球面镜为凸面镜,则  $P$  点到透镜的距离等于\_\_\_\_\_.
2. 若将一短细杆垂直于光轴放置,杆的下端位于  $P$  点,则此细杆经上述光学系统所成的最后的像的大小与物的大小之比对凹面镜等于\_\_\_\_\_;对凸面镜等于\_\_\_\_\_.
3. 若球面镜的半径大小  $R = 2f$ ,试按作图法的规范要求,画出第 2 问中短杆对上述光学系统逐次成的像及成像光路图.(要求将凹面镜和凸面镜分别画在两张图上.评分时只按图评分,不要求写出作图理由和说明,但须用已知量标出各个像在光轴上的具体位置.)



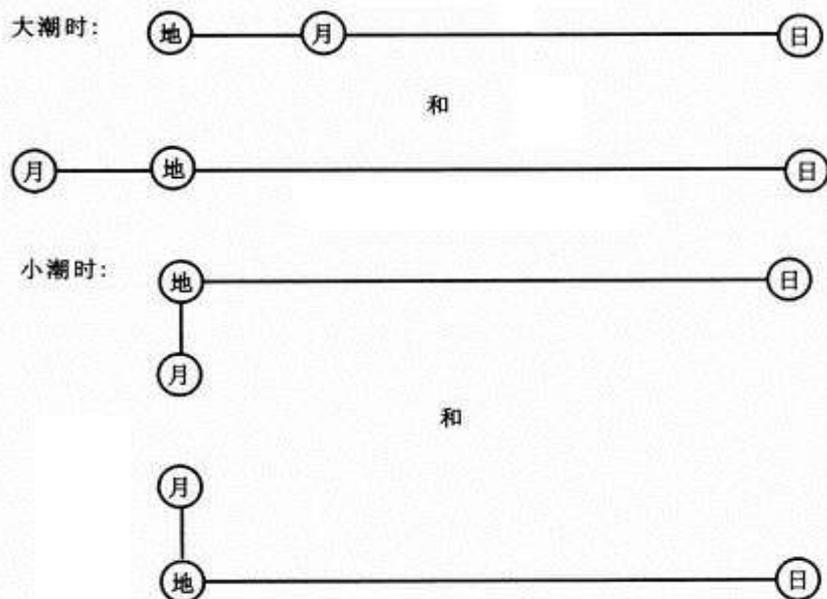
八、( 25 分)如图所示,有一固定的、半径为  $a$ 、内壁光滑的半球形碗(碗口处于水平位置), $O$  为球心.碗内搁置一质量为  $m$ 、边长为  $a$  的等边三角形均匀薄板  $ABC$ .板的顶点  $A$  位于碗内最低点,碗的最低点处对  $A$  有某种约束使顶点  $A$  不能滑动(板只能绕  $A$  点转动).

1. 当三角形薄板达到平衡时,求出碗对顶点  $A$ 、 $B$ 、 $C$  的作用力的大小各为多少.
2. 当板处于上述平衡状态时,若解除对  $A$  点的约束,让它能在碗的内表面上从静止开始自由滑动,求此后三角形薄板可能具有的最大动能.



一、参考答案:

1. 大爆炸
2. 超新星 中子星 黑洞
3. 核聚变
- 4.



5.  $0, 4L, L$ .

评分标准: 本题 25 分.

第 1 小题 3 分.

第 2 小题 6 分, 每一空格 2 分.

第 3 小题 3 分.

第 4 小题 6 分. 第一空格中画对一个图给 2 分, 画对二个图给 3 分; 第二空格中画对一个图给 2 分, 画对二个图给 3 分.

第 5 小题 7 分. 第一空格 2 分, 第二空格 3 分, 第三空格 2 分.

二、参考解答:

当光滑平板与水平面的倾角为  $\alpha$  时, 无论小球 P 处在斜面上什么位置, 它受的重力在斜面上的投影总是垂直于  $HH'$ , 大小总是等于  $mg\sin\alpha$ . 以此作为重力的一个分力, 则重力的另一个分力即垂直于斜面的分力  $mg\cos\alpha$  总是与斜面对小球 P 的支持力平衡. 这样, 小球 P 在斜面内只受上述重力的分量  $mg\sin\alpha$  和细绳拉力的作用.

当小球 P 运动到圆周的最高点时, 细绳垂直于  $HH'$ , 绳的拉力与小球所受重力的分量  $mg\sin\alpha$  沿同一直线, 这时只要细绳不松弛, 小球就能保持在板面内作圆周运动. 设小球到达圆周最高点时

的速度为  $v$ , 绳的拉力为  $T$ , 有

$$T + mg\sin\alpha = m \frac{v^2}{l} \quad (1)$$

由能量关系, 有

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgl\sin\alpha \quad (2)$$

由(1)、(2)式得

$$T = m \left( \frac{v_0^2}{l} - 3g\sin\alpha \right) \quad (3)$$

细绳不松弛的条件是

$$T \geq 0 \quad (4)$$

由(3)、(4)式得

$$\alpha \leq \arcsin\left(\frac{v_0^2}{3lg}\right) \quad (5)$$

代入有关数据, 得

$$\alpha \leq \arcsin\left(\frac{5}{6}\right) \quad (6)$$

当倾角  $\alpha < 0$  时, 经相同的分析可得

$$\alpha \geq -\arcsin\left(\frac{5}{6}\right) \quad (7)$$

由(6)、(7)两式, 可知  $\alpha$  的取值范围为

$$-\arcsin\left(\frac{5}{6}\right) \leq \alpha \leq \arcsin\left(\frac{5}{6}\right) \quad (8)$$

评分标准: 本题 25 分.

(1) 式 7 分, (2) 式 7 分, (4) 式 5 分, (5) 式或 (6) 式 3 分, (7) 式 3 分.

### 三、参考解答:

以  $m$  表示气缸内气体的质量,  $\mu$  表示其摩尔质量. 当气体处在初始状态时, 已知其压强为  $p_0$ 、体积为  $V_0$ . 设其温度为  $T_0$ , 由理想气体状态方程有

$$p_0 V_0 = \frac{m}{\mu} RT_0 \quad (1)$$

在过程 1 中, 对气体加热时, 活塞 S 位置固定不动, 气体体积保持不变, 气体对外不做功. 根据热力学第一定律有

$$Q_1 = \frac{m}{\mu} c (T_1 - T_0) \quad (2)$$

式中  $T_1$  为加热后气体的温度. 根据题意, 这时气体的压强为  $p_1$ . 由理想气体状态方程可知

$$p_1 V_0 = \frac{m}{\mu} RT_1 \quad (3)$$

由(1)、(2)、(3)式得

$$Q_1 = \frac{c}{R} V_0 (p_1 - p_0) \quad (4)$$

在过程 2 中, 对气体加热时, 活塞要移动, 气体的压强保持  $p_0$  不变, 体积由  $V_0$  变为  $V_2$ , 气体对外做功. 根据热力学第一定律, 有

$$Q_2 = \frac{m}{\mu} c (T_2 - T_0) + p_0 (V_2 - V_0) \quad (5)$$

式中  $T_2$  为加热后气体的温度. 由理想气体状态方程可知

$$p_0 V_2 = \frac{m}{\mu} R T_2 \quad (6)$$

由(1)、(5)、(6)式,得

$$Q_2 = \frac{(c + R)}{R} p_0 (V_2 - V_0) \quad (7)$$

由(4)、(7)式得

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \left( \frac{c}{c + R} \right) \cdot \frac{(p_1 - p_0) V_0}{(V_2 - V_0) p_0} \quad (8)$$

评分标准: 本题 25 分.

(1) 式 2 分, (2) 式 7 分, (3) 式 2 分, (5) 式 7 分, (6) 式 2 分, (8) 式 5 分.

#### 四、参考解答

##### 1. 两导线排的电流产生的磁场

考察导线排  $M_1 M_2$  中的电流产生的磁场, 取  $x$  轴与导线排  $M_1 M_2$  重合,  $y$  轴与导线排  $M_1 M_2$  垂直, 如图 1 所示. 位于  $x$  和  $x + \Delta x$  ( $\Delta x$  为小量) 之间的细导线可以看作是“一根”通有电流  $I \Delta x$  的长直导线, 它在  $y$  轴上  $P$  点产生的磁感应强度的大小为

$$\Delta B = k \frac{I \Delta x}{r} \quad (1)$$

$r$  为  $P$  点到此直长导线的距离,  $\Delta B$  的方向与  $r$  垂直, 与电流构成右手螺旋.

将  $\Delta B$  分解成沿  $x$  方向和  $y$  方向的两个分量  $\Delta B_x$  和  $\Delta B_y$ , 有

$$\Delta B_x = k \frac{I \Delta x}{r} \cos \theta \quad (2)$$

$$\Delta B_y = k \frac{I \Delta x}{r} \sin \theta \quad (3)$$

根据对称性, 位于  $-x$  到  $-(x + \Delta x)$  之间的细导线中电流产生的磁感应强度在  $y$  方向的分量与  $\Delta B_y$  大小相等、方向相反. 可见整个导线排中所有电流产生的磁场在  $y$  方向的合磁场为 0. 由图 1 可看出

$$\frac{\Delta x \cos \theta}{r} = \Delta \theta \quad (4)$$

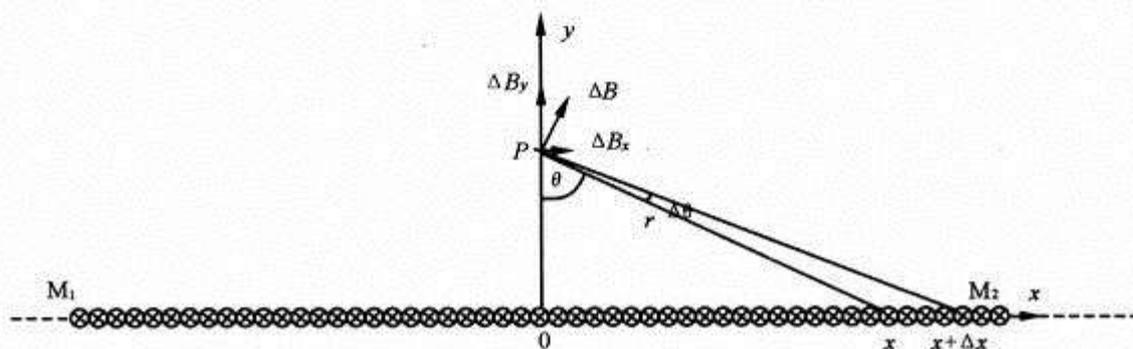


图 1

把(4)式代入(2)式得

$$\Delta B_x = k I \Delta \theta \quad (5)$$

导线排上所有电流产生的磁感应强度

$$B = \sum \Delta B_x = \sum k\lambda \Delta\theta \quad (6)$$

注意到  $\sum \Delta\theta = \pi$ , 得

$$B = k\pi\lambda I \quad (7)$$

即每个导线排中所有电流产生的磁场是匀强磁场,磁场的方向分别与  $M_1M_2$  和  $M_3M_4$  导线排平行.如图 2 所示,两导线排中电流产生的磁感应强度  $B(M_1M_2)$  与  $B(M_3M_4)$  成  $120^\circ$ , 它们的合磁场的磁感应强度的大小

$$B_0 = 2B\cos 60^\circ = k\pi\lambda I \quad (8)$$

方向与  $OO'$  平行,由  $O$  指向  $O'$ .

## 2. 半导体片左右两侧面间的电势差

当半导体片中通有均匀电流  $I_0$  时,半导体

片中的载流子作定向运动,  $N$  型半导体的载流子带负电荷,故其速度  $v$  的方向与  $I_0$  方向相反,垂直纸面向里,且有

$$I_0 = nqvS \quad (9)$$

式中  $S$  为半导体片横截面的面积

$$S = \overline{ab} \cdot l \quad (10)$$

载流子作定向运动时要受到磁场洛伦兹力  $f_B$  的作用,其大小为

$$f_B = qvB_0 \quad (11)$$

对带负电荷的载流子此力的方向指向左侧,于是负电荷积聚在左侧面上,从而左侧面带负电,右侧面带正电,两侧面间出现电势差  $U = U_{右} - U_{左}$ .带负电荷的载流子受到静电力  $f_E$  由左侧面指向右侧面,达到稳定时,  $f_E$  与  $f_B$  平衡,即

$$f_E = \frac{U}{ab}q = f_B \quad (12)$$

由(8)、(9)、(10)、(11)、(12)各式得

$$U = k \frac{\pi\lambda I_0}{nql} \quad (13)$$

评分标准:本题 25 分.

(7) 式 8 分, (8) 式 4 分, (9) 式 3 分, (12) 式 5 分, (13) 式 5 分.

## 五、参考解答:

1. 在线框转动过程中,三角形的  $AC$ 、 $CD$  两边因切割磁感应线而产生感应电动势,因长度为  $d$  的  $AC$  边和  $CD$  边都不与磁场方向垂直,每条边切割磁感应线的有效长度,即垂直于磁场方向的长度为

$$l = d\sin 30^\circ = \frac{1}{2}d \quad (1)$$

因  $AC$  边上不同部分到转轴的距离不同,它们的速度随离开转轴的距离的增大而线性增大,故可认为  $AC$  边上各部分产生的总电动势,数值上等同于整条  $AC$  边均以  $AC$  边中点处的速度  $\bar{v}$  运动时产生

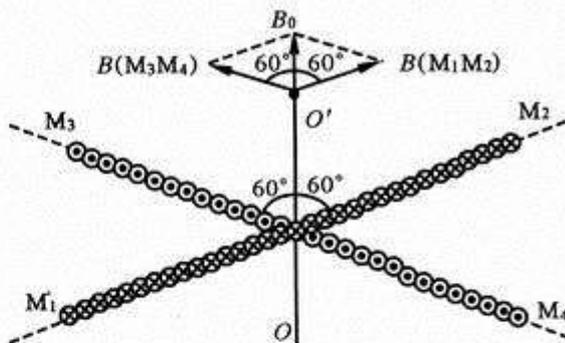


图 2

的电动势. 而

$$\bar{v} = \omega \frac{1}{2} d \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} \omega d \quad (2)$$

设在  $t = 0$  至时刻  $t$ , 三角形从平行于磁场方向的位置绕轴转过角度为  $\theta$ , 则

$$\theta = \omega t \quad (3)$$

因而边上各点速度的方向不再与磁场方向垂直,  $\bar{v}$  沿垂直磁场方向的分量

$$\bar{v}_\perp = \bar{v} \cos \theta \quad (4)$$

由此得到  $t$  时刻  $AC$  边中的感应电动势

$$\mathcal{E}_{AC} = Bl\bar{v}_\perp \quad (5)$$

其方向由  $A$  指向  $C$ , 由(1)、(2)、(3)、(4)、(5)各式得

$$\mathcal{E}_{AC} = \frac{\sqrt{3}}{8} B\omega d^2 \cos \omega t \quad (6)$$

同理可得

$$\mathcal{E}_{CD} = \frac{\sqrt{3}}{8} B\omega d^2 \cos \omega t \quad (7)$$

其方向由  $C$  指向  $D$ , 三角形线框中的总电动势

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{AC} + \mathcal{E}_{CD} = \frac{\sqrt{3}}{4} B\omega d^2 \cos \omega t \quad (8)$$

其方向沿  $ACDA$  回路方向. 因线框中的总电阻为  $3R$ , 故  $t$  时刻线框中的电流

$$i = \frac{\mathcal{E}}{3R} = \frac{\sqrt{3}}{12R} B\omega d^2 \cos \omega t \quad (9)$$

2. 对于  $AP$  来说, 长度为  $x$ , 在  $t = 0$  时刻,  $\cos \omega t = 1$ , 而以  $x$  代替(6)式中的  $d$ , 即可得  $AP$  段中的感应电动势的大小

$$\mathcal{E}_{AP} = \frac{\sqrt{3}}{8} Bx^2 \omega \quad (10)$$

方向由  $A$  点指向  $P$  点. 由(9)式, 此时线框中的电流

$$I = \frac{\sqrt{3}}{12R} B\omega d^2 \quad (11)$$

根据含源电路欧姆定律,  $P$  点的电势

$$U_P = \mathcal{E}_{AP} - I \frac{R}{d} x \quad (12)$$

把(10)、(11)两式代入(12)式, 经整理后得

$$U_P = \frac{\sqrt{3}}{8} B\omega \left( x^2 - \frac{2}{3} xd \right) \quad (13)$$

为了画出  $U_P(x)$  图线, 先求出若干特征点的电势值: (13)式右侧是一个关于  $x$  的二次方程, 故  $U_P(x)$  图线为一抛物线, (13)式可改写为

$$U_P + \frac{\sqrt{3}}{72} B\omega d^2 = \frac{\sqrt{3}}{8} B\omega \left( x - \frac{1}{3} d \right)^2 \quad (14)$$

由(14)式可知,此抛物线

(i)  $x = 0$  和  $x = \frac{2}{3}d$

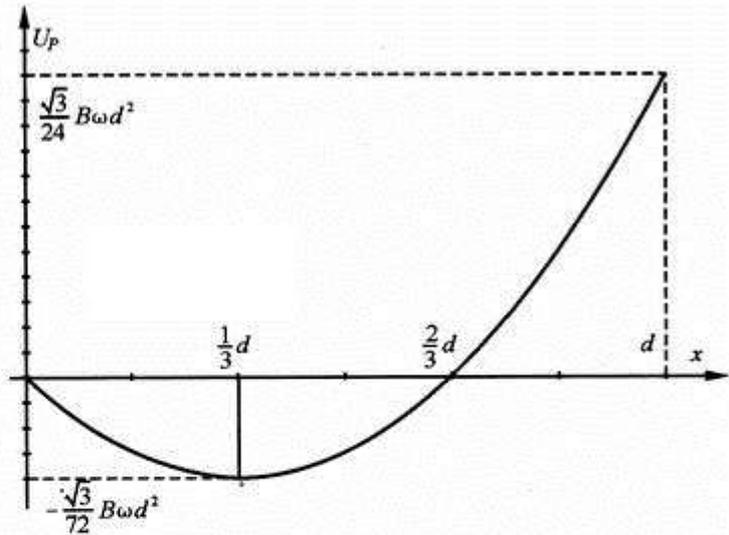
$$U_p = 0$$

(ii) 抛物线的顶点坐标为

$$x = \frac{d}{3}, U_p = -\frac{\sqrt{3}}{72}B\omega d^2$$

(iii)  $x = d, U_p = \frac{\sqrt{3}}{24}B\omega d^2$

图线如图所示.



评分标准:本题 25 分.

第 1 小题 13 分. 求得 (6)

或 (7) 式 8 分, (8) 式 2 分,

(9) 式 3 分.

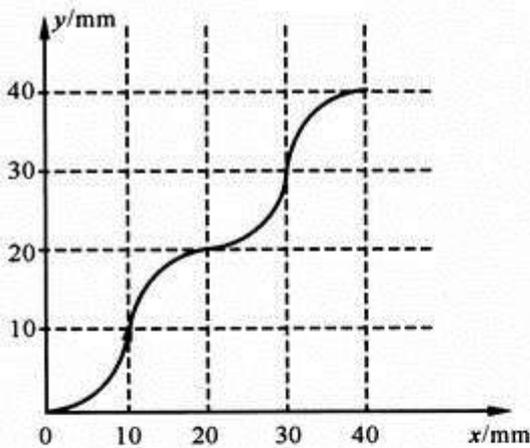
第 2 小题 12 分. (10) 式 4

分, (13) 式 4 分, 图线正确给 4 分.

六、参考解答:

1.

$$2.2\sqrt{2} \text{ m/s}$$



评分标准:本题 25 分.

1. 图线形状正确给 10 分,横坐标标度正确给 5 分,纵坐标标度正确给 5 分.

2. 求得平均速度大小给 5 分.

七、参考解答:

1.  $\frac{f(R-f)}{R}; \frac{f(R+f)}{R}$

2. 1; 1

3. 对凹面镜光路图如图 1 所示;

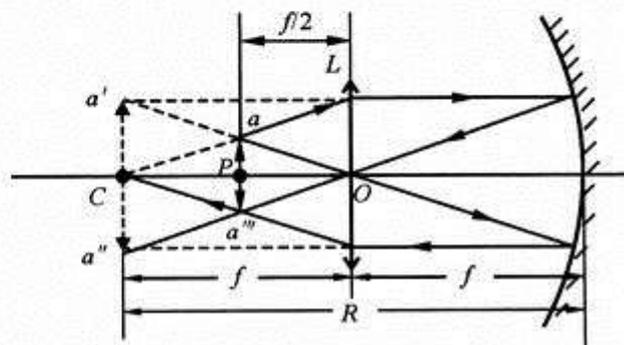


图 1

对凸面镜光路图如图 2 所示.

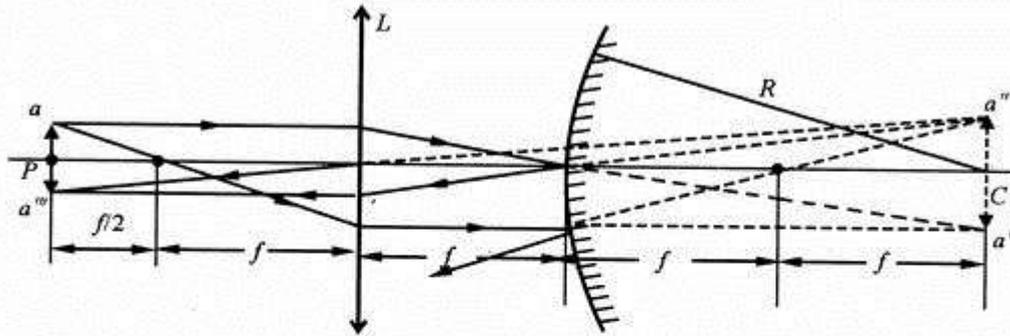


图 2

评分标准: 本题 25 分.

第 1 小题 10 分, 每一空格 5 分.

第 2 小题 5 分. 填对一个空格给 3 分, 填对二个空格给 5 分.

第 3 小题 10 分, 每图 5 分.

### 八、参考解答:

解法一

1. 因 A 点位于半球形碗的最低点, 等边三角形薄板的 BC 边一定沿水平方向. 作连线 OB 和 OC, 因 O 为半球形碗的球心, A、B、C 均在球面上, 故有

$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = a \quad (1)$$

ABC 是等边三角形,

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = a \quad (2)$$

故 OABC 为正四面体, 如图 1 所示. 三角形薄板所受的力有:

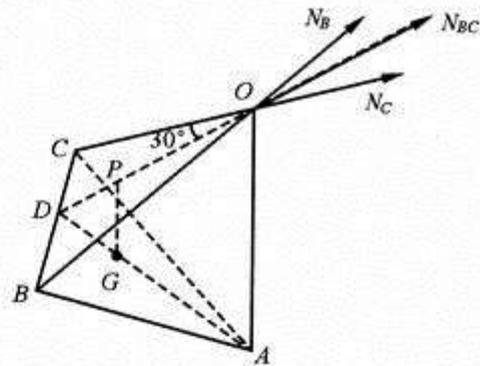


图 1

(i) B、C 处碗面对板的作用力  $N_B$  和  $N_C$  均垂直于碗面, 指向球心 O. 又由对称性可知,

$$N_B = N_C \quad (3)$$

它们的合力  $N_{BC}$  沿  $\angle COB$  的角平分线 DO 的方向, 其大小为

$$N_{BC} = 2N_B \cos 30^\circ = \sqrt{3} N_B \quad (4)$$

DO 的长度

$$\overline{DO} = \overline{OB} \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} a \quad (5)$$

(ii) 重力  $F_C$  的大小

$$F_C = mg \quad (6)$$

它作用于三角形 ABC 的重心 G. G 位于 AD 上, 与 A 的距离

$$\overline{AG} = \frac{2}{3} \overline{AD} = \frac{2}{3} \overline{OD} = \frac{\sqrt{3}}{3} a \quad (7)$$

重力的方向与 OA 平行, 该力位于 OAD 平面内, 与 OD 相交. 用 P 表示其交点, 则

$$\overline{OP} = \overline{AG} = \frac{\sqrt{3}}{3} a \quad (8)$$

(iii) 设碗面在  $A$  点作用于薄板的约束力为  $N_A$ , 薄板(或可看成刚性正四面体  $OABC$ ) 在  $N_{BC}$ 、 $F_G$  和  $N_A$  三力作用下保持平衡, 这三力应在同一平面内, 且应共点, 即  $N_A$  应与  $F_G$  和  $N_{BC}$  都在  $OAD$  平面内, 且应通过  $P$  点, 如图 2 所示. 在三角形  $ODA$  中

$$\overline{OD} = \overline{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2}a, \overline{OA} = a$$

设  $\angle DOA = \alpha$ , 则

$$\angle ODA = \pi - 2\alpha$$

在三角形  $ADO$  中, 由正弦定理, 有

$$\frac{a}{\sin 2\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{2\sin\alpha}$$

由此可得

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}, \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad (9)$$

设  $\angle OAP = \beta$ , 在三角形  $OPA$  中, 由余弦定理得

$$\overline{AP} = \sqrt{\frac{1}{3}a^2 + a^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}a^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a$$

由正弦定理得

$$\frac{\overline{AP}}{\sin\alpha} = \frac{\overline{OP}}{\sin\beta} = \frac{\overline{OA}}{\sin(\alpha + \beta)}$$

即

$$\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}a}{\sin\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}a}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin(\alpha + \beta)} \quad (10)$$

$F_G$ 、 $N_{BC}$  和  $N_A$  三力平衡, 它们应形成封闭的三角形, 如图 3 所示. 由正弦定理得

$$\frac{N_A}{\sin\alpha} = \frac{N_{BC}}{\sin\beta} = \frac{F_G}{\sin(\alpha + \beta)} \quad (11)$$

由(10)、(11)式和(3)、(4)、(6)各式得

$$N_A = \frac{mgs\sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\sqrt{6}}{3}mg \quad (12)$$

$$N_B = N_C = \frac{1}{\sqrt{3}}N_{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{mgs\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)} \quad (13)$$

得

$$N_B = N_C = \frac{1}{3}mg \quad (14)$$

2. 解除对  $A$  点的约束后,  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三顶点将从静止开始沿碗面滑动. 根据对称性可知, 薄板处于水平位置时重心最低, 从而重力势能最小. 根据机械能守恒定律, 此时薄板的动能最大. 此时薄板的重心将移至  $O$  点正下方的  $G'$  点, 如图 4 所示. 由几何关系并考虑到(7)式,  $G'$  相对碗最低点的高度

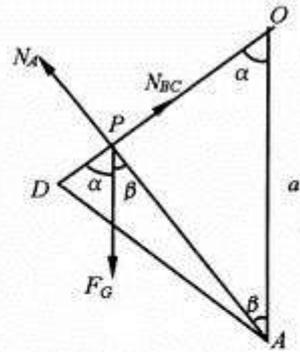


图 2

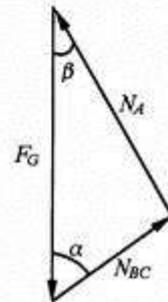


图 3

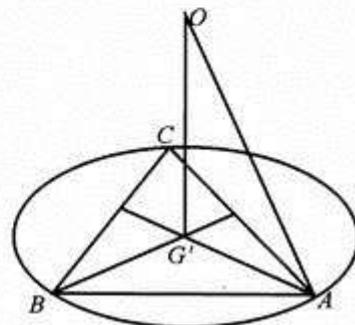


图 4

$$h' = a - \overline{OG'} = a - \sqrt{OA^2 - AG'^2} = \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)a \quad (15)$$

A 点被约束时薄板重心为 G 点, 参阅图 1, 可知 G 点相对碗最低点的高度

$$h = \overline{AG} \cos \angle DAO = \overline{AG} \cos \alpha \quad (16)$$

由(7)和(9)式可得

$$h = \frac{1}{3}a \quad (17)$$

由(15)、(17)两式可求得薄板从 A 点约束解除到处于水平状态过程中, 其重心高度减少量的最大值, 从而求出重力势能的减少量的最大值, 最后即求得薄板具有的最大动能为

$$E_k = mg(h - h') = \frac{\sqrt{6} - 2}{3} m g a \quad (18)$$

评分标准: 本题 25 分.

第 1 小题 20 分. (4) 式 2 分, (10) 式 7 分, (11) 式 7 分, (12) 式 2 分, (14) 式 2 分.

第 2 小题 5 分. (15) 式 1 分, (17) 式 2 分, (18) 式 2 分.

解法二

1. 当三角形薄板处于平衡状态时, 根据对称性,  $\overline{BC}$  必位于过 B、C 两点的水平圆面内, 以  $O'$  表示此水平圆面的圆心, 如图 1 所示. 碗内壁球面的球心为 O, 则  $O'$  以及 A、O 三点必位于同一条竖直线上. 由于 B、C 与球面接触处都是光滑的, 球面对这两点的作用力都指向球面的球心 O, 令  $N_B$  和  $N_C$  分别表示这两个力的大小. 由对称性可知

$$N_B = N_C \quad (1)$$

因球面的半径等于等边三角形的边长, 三角形 OAB 和 OBC 都是等边三角形

$$\angle AOB = \angle BOC = \theta = 60^\circ \quad (2)$$

把  $N_B$  分解成沿竖直方向的分量  $N_{B\perp}$  和位于水平面内的分量  $N_{B\parallel}$ , 则有

$$N_{B\perp} = N_B \cos \theta = N_B \cos 60^\circ = \frac{1}{2} N_B \quad (3)$$

$$N_{B\parallel} = N_B \sin \theta = N_B \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} N_B \quad (4)$$

同理有

$$N_{C\perp} = N_C \cos \theta = N_C \cos 60^\circ = \frac{1}{2} N_C \quad (5)$$

$$N_{C\parallel} = N_C \sin \theta = N_C \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} N_C \quad (6)$$

$N_{B\parallel}$  与  $BO'$  平行,  $N_{C\parallel}$  与  $CO'$  平行, 都平行于以  $O'$  为圆心的水平圆面, 可以把这两个力移到圆心为  $O'$  的水平圆面内, 如图 2 所示.  $N_{B\parallel}$  和  $N_{C\parallel}$  的合力为  $N_{\parallel}$ .

球面底部作用于三角形薄板的力  $N_A$  也可分解成沿竖直方向的分量  $N_{A\perp}$  和位于水平面内的分量  $N_{A\parallel}$ . 当三角形薄板达到平衡时, 有

$$N_{A\parallel} = N_{\parallel} = 2N_{B\parallel} \cos \alpha \quad (7)$$

$$mg - N_{A\perp} - N_{B\perp} - N_{C\perp} = 0 \quad (8)$$

由图 1 可知, 圆心为  $O'$  的水平圆面的半径 R 即线段  $\overline{O'B}$  是等边三角形 OAB 的高, 故有

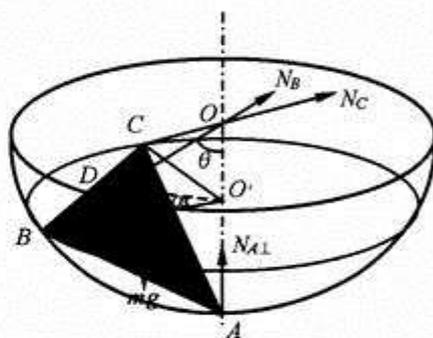


图 1

$$R = a \sin \theta = a \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} a \quad (9)$$

由图 2 得

$$\cos \alpha = \frac{O'D}{R} = \frac{\sqrt{R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{R} = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad (10)$$

由以上有关各式, (7)、(8) 两式可写成

$$N_{A//} = \sqrt{2} N_B \quad (11)$$

$$N_{A\perp} = mg - N_B \quad (12)$$

当三角形薄板达到平衡时, 作用于三角形的各力对 BC 边的力矩总和等于零.  $N_B, N_C$  通过 BC 边, 对 BC 边无力矩作用, 只有  $N_{A//}, N_{A\perp}$  和重力  $mg$  对 BC 边有力矩作用. 平衡时有

$$N_{A//} \cdot \frac{a}{2} + mg \cdot \frac{1}{3} \overline{O'D} - N_{A\perp} \overline{O'D} = 0 \quad (13)$$

由(9)、(10)式可知

$$\overline{O'D} = R \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} a \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2} a \quad (14)$$

把(14)式代入(13)式, 得

$$N_{A//} = \sqrt{2} N_{A\perp} - \frac{\sqrt{2}}{3} mg \quad (15)$$

由(11)、(12)和(15)及(1)式

$$N_B = N_C = \frac{1}{3} mg \quad (16)$$

$$N_{A//} = \frac{\sqrt{2}}{3} mg \quad (17)$$

$$N_{A\perp} = \frac{2mg}{3} \quad (18)$$

$$N_A = \frac{\sqrt{6}}{3} mg \quad (19)$$

2. 当解除对 A 点的约束, A、B、C 三顶点将在球面内从静止开始滑动. 根据对称性可知, 必有一时刻薄板处于水平位置, 这时板的重心最低, 重力势能最小, 薄板具有的动能最大, 这动能来自薄板减少的重力势能.

在图 1 中三角形  $ADO'$  为直角三角形, 一条直角边  $DO'$  位于水平位置, 另一条直角边  $AO'$  位于竖直位置, 根据题意及几何关系可知, 三角形薄板的重心  $G$  位于斜边  $AD$  上, 离 A 点的距离为  $\frac{2}{3} \overline{AD}$ , 重心  $G$  的高度

$$h = \frac{2}{3} \overline{AO'} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{3} a \quad (20)$$

当三角形薄板的三条边位于同一水平的圆面内时, 三角形的重心  $G'$  与其三边所在圆面的圆心重合, 如图 3 所示,

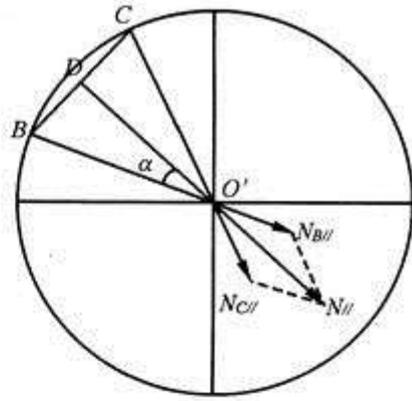


图 2

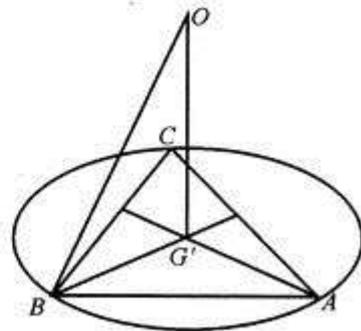


图 3

$$\overline{BG'} = \frac{2}{3} \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3} a$$

$$\overline{OG'} = \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{BG'}^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3}{9} a^2} = \frac{\sqrt{6}}{3} a$$

这时, 三角形薄板重心  $G'$  的高度

$$h' = a - \frac{\sqrt{6}}{3} a = \frac{3 - \sqrt{6}}{3} a \quad (21)$$

薄板的最大动能

$$E_k = mg(h - h') = \frac{\sqrt{6} - 2}{3} mga \quad (22)$$

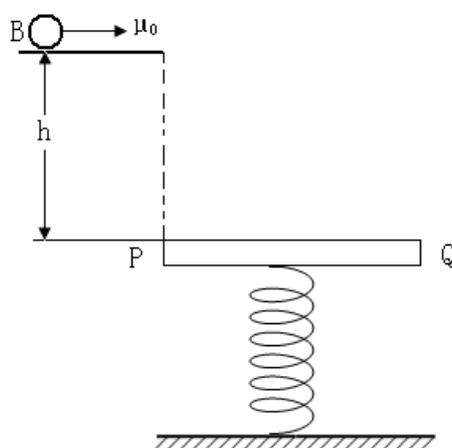
评分标准: 本题 25 分.

第 1 小题 20 分. (11) 式 6 分, (12) 式 6 分, (15) 式 4 分, (16) 式 2 分, (19) 式 2 分.

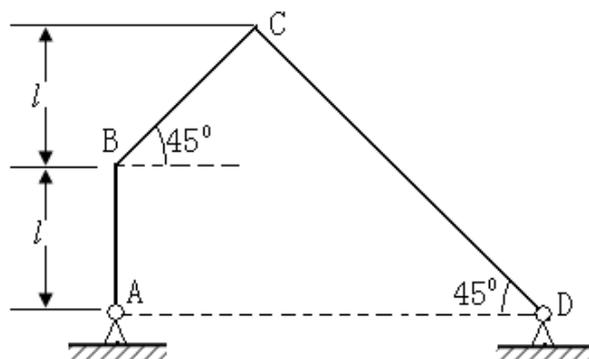
第 2 小题 5 分. (20) 式 1 分, (21) 式 2 分, (22) 式 2 分.

(本题共七大题, 满分 160 分)

一、(20 分) 如图所示, 一块长为  $L = 1.00m$  的光滑平板 PQ 固定在轻质弹簧上端, 弹簧的下端与地面固定连接。平板被限制在两条竖直光滑的平行导轨之间 (图中未画出竖直导轨), 从而只能地竖直方向运动。平板与弹簧构成的振动系统的振动周期  $T = 2.00s$ 。一小球 B 放在光滑的水平台面上, 台面的右侧边缘正好在平板 P 端的正上方, 到 P 端的距离为  $h = 9.80m$ 。平板静止在其平衡位置。水球 B 与平板 PQ 的质量相等。现给小球一水平向右的速度  $\mu_0$ , 使它从水平台面抛出。已知小球 B 与平板发生弹性碰撞, 碰撞时间极短, 且碰撞过程中重力可以忽略不计。要使小球与平板 PQ 发生一次碰撞而且只发生一次碰撞,  $\mu_0$  的值应在什么范围内? 取  $g = 9.8m/s^2$

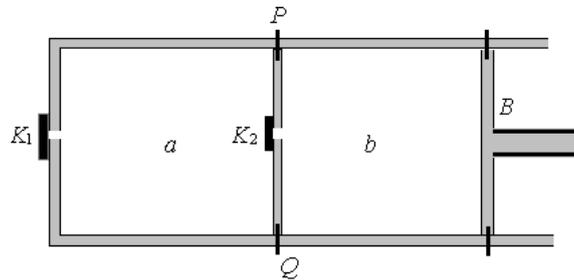


二、(25 分) 图中所示为用三角形刚性细杆 AB、BC、CD 连成的平面连杆结构图。AB 和 CD 杆可分别绕过 A、D 的垂直于纸面的固定轴转动, A、D 两点位于同一水平线上。BC 杆的两端分别与 AB 杆和 CD 杆相连, 可绕连接处转动 (类似铰链)。当 AB 杆绕 A 轴以恒定的角速度  $\omega$  转到图中所示的位置时, AB 杆处于竖直位置。BC 杆与 CD 杆都与水平方向成  $45^\circ$  角, 已知 AB 杆的长度为  $l$ , BC 杆和 CD 杆的长度由图给定。求此时 C 点加速度  $a_c$  的大小和方向 (用与 CD 杆之间的夹角表示)



三、(20 分) 如图所示, 一容器左侧装有活门  $K_1$ , 右侧装有活塞 B, 一厚度可以忽略的隔板 M 将容器隔成 a、b 两室, M 上装有活门  $K_2$ 。容器、隔板、活塞及活门都是绝热的。隔板和活塞可用销钉固定, 拔掉销钉即可在容器内左右平移, 移动时不受摩擦作用且不漏气。整个容器置于压强为  $P_0$ 、温度为  $T_0$  的大气

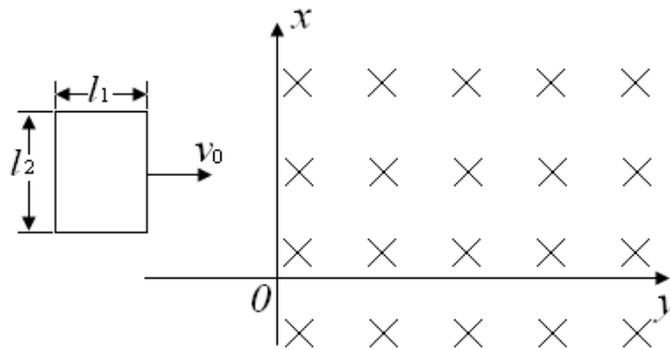
中。初始时将活塞 B 用销钉固定在图示的位置，隔板 M 固定在容器 PQ 处，使 a、b 两室体积都等于  $V_0$ ； $K_1$ 、 $K_2$  关闭。此时，b 室真空，a 室装有一定量的空气（容器内外气体种类相同，且均可视为理想气体），其压强为  $4P_0/5$ ，温度为  $T_0$ 。已知 1mol 空气温度升高 1K 时内能的增量为  $C_V$ ，普适气体常量为  $R$ 。



1. 现在打开  $K_1$ ，待容器内外压强相等时迅速关闭  $K_1$ （假定此过程中处在容器内的气体与处在容器外的气体之间无热量交换），求达到平衡时，a 室中气体的温度。

2. 接着打开  $K_2$ ，待 a、b 两室中气体达到平衡后，关闭  $K_2$ 。拔掉所有销钉，缓慢推动活塞 B 直至到过容器的 PQ 位置。求在推动活塞过程中，隔板对 a 室气体所作的功。已知在推动活塞过程中，气体的压强  $P$  与体积  $V$  之间的关系为  $PV^{\frac{C_V+R}{C_V}} = \text{恒量}$ 。

四、（25 分）图中  $oxy$  是位于水平光滑桌面上的直角坐标系，在  $x > 0$  的一侧，存在匀强磁场，磁场方向垂直于  $oxy$  平面向里，磁感应强度的大小为  $B$ 。在  $x < 0$  的一侧，一边长分别为  $l_1$  和  $l_2$  的刚性矩形超导线框位于桌面上，框内无电流，框的一对边与  $x$  轴平行。线框的质量为  $m$ ，自感为  $L$ 。现让超导线框沿  $x$  轴方向以初速度  $v_0$  进入磁场区域，试定量地讨论线框以后可能发生的运动情况及与初速度  $v_0$  大小的关系。（假定线框在运动过程中始终保持超导状态）



五、（25 分）地球赤道表面附近处的重力加速度为  $g_0 = 9.8m/s^2$ ，磁场的磁感应强度的大小  $B_0 = 3.0 \times 10^{-5} T$ ，方向沿经线向北。赤道上空的磁感应强度的大小与  $r^3$  成反比（ $r$  为考察点到地心的距离），方向与赤道附近的磁场方向平行。假设在赤道上空离地心的距离  $r = 5R_e$ （ $R_e$  为地球半径）处，存在厚度为 10km 的由等数量的质子和电子的等离子层（层内磁场可视为匀强磁场），每种粒子的数密度非常低，带电粒子的相互作用可以忽略不计。已知电子的质量  $m_e = 9.1 \times 10^{-31} kg$ ，质子的质量

$m_p = 1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}$ , 电子电荷量为  $-1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ , 地球的半径  $R_e = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$ 。

1. 所考察的等离子层中的电子和质子一方面作无规则运动, 另一方面因受地球引力和磁场的共同作用会形成位于赤道平面内的绕地心的环行电流, 试求此环行电流的电流密度。

2. 现设想等离子层中所有电子和质子, 它们初速度的方向都指向地心, 电子初速度的大小  $u_e = 1.4 \times 10^4 \text{ m/s}$ , 质子初速度的大小  $u_p = 3.4 \times 10^2 \text{ m/s}$ 。试通过计算说明这些电子和质子都不可能到达地球表面。

六、(25 分) 图 1 所示为杨氏双缝干涉实验的示意图, 取纸面为  $yz$  平面。 $y$ 、 $z$  轴的方向如图所示。线光源  $S$  通过  $z$  轴, 双缝  $S_1$ 、 $S_2$  对称分布在  $z$  轴两侧, 它们以及屏  $P$  都垂直于纸面。双缝间的距离为  $d$ , 光源  $S$  到双缝的距离为  $l$ , 双缝到屏的距离为  $D$ ,  $d \ll D$ ,  $d \ll l$ 。

1. 从  $z$  轴上的线光源  $S$  出发经  $S_1$ 、 $S_2$  不同路径到  $P_0$  点的光程差为零, 相干的结果产生一亮纹, 称为零级亮纹。为了研究有一定宽度的扩展光源对于干涉条纹清晰度的影响, 我们先研究位于轴外的线光源  $S'$  形成的另一套干涉条纹,  $S'$  位于垂直于  $z$  轴的方向上且与  $S$  平行, 两者相距  $\delta_s$ , 则由线光源  $S'$  出发分

别经  $S_1$ 、 $S_2$  产生的零级亮纹  $P'_0$ ,  $P'_0$  与  $P_0$  的距离  $\delta_y =$  \_\_\_\_\_

2. 当光源宽度为  $\omega$  的扩展光源时, 可将扩展光源看作由一系列连续的、彼此独立的、非相干的线光源组成。这样, 各线光源对应的干涉条纹将彼此错开, 在屏上看到的将是这些干涉条纹的光强相加的结果, 干涉条纹图像将趋于模糊, 条纹的清晰度下降。假设扩展光源各处发出的光强相同、波长皆为  $\lambda$ 。当  $\omega$  增大导致零级亮纹的亮暗将完全不可分辨, 则此时光源的宽度  $\omega =$  \_\_\_\_\_

3. 在天文观测中, 可用上述干涉原理来测量星体的微小角直径。遥远星体上每一点发出的光到达地球处都可视为平行光, 从星体相对的两边缘点发来的两组平行光之间的夹角  $\theta$  就是星体的角直径。遥远星体的角直径很小, 为测量如些微小的角直径, 迈克尔逊设计了测量干涉仪, 其装置简化为图 2 所示。 $M_1$ 、 $M_2$ 、 $M_3$ 、 $M_4$  是四个平面反射镜, 它们两两平行, 对称放置, 与入射光 ( $a$ 、 $a'$ ) 方向成  $45^\circ$  角。 $S_1$  和  $S_2$  是一对小孔, 它们之间的距离是  $d$ 。 $M_1$  和  $M_2$  可以同步对称调节来改变其中心间的距离  $h$ 。双孔屏到观察屏之间的距离是  $D$ 。 $a$ 、 $a'$  和  $b$ 、 $b'$  分别是星体上相对着的两边缘点发来的平行光束。设光线  $a$ 、 $a'$  垂直双孔屏和像屏, 星光的波长是  $\bar{\lambda}$ , 试导出星体上角直径  $\theta$  的计算式。

注: 将星体作圆形扩展光源处理时, 研究扩展光源的线度对于干涉条纹图像清晰度的影响会遇到数学困难, 为简化讨论, 本题拟将扩展光源作宽度为  $\omega$  的矩形光源处理。

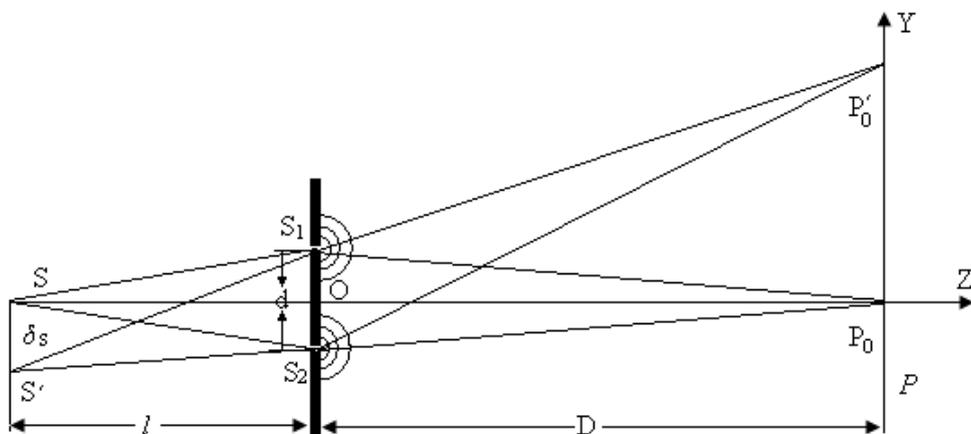


图 1

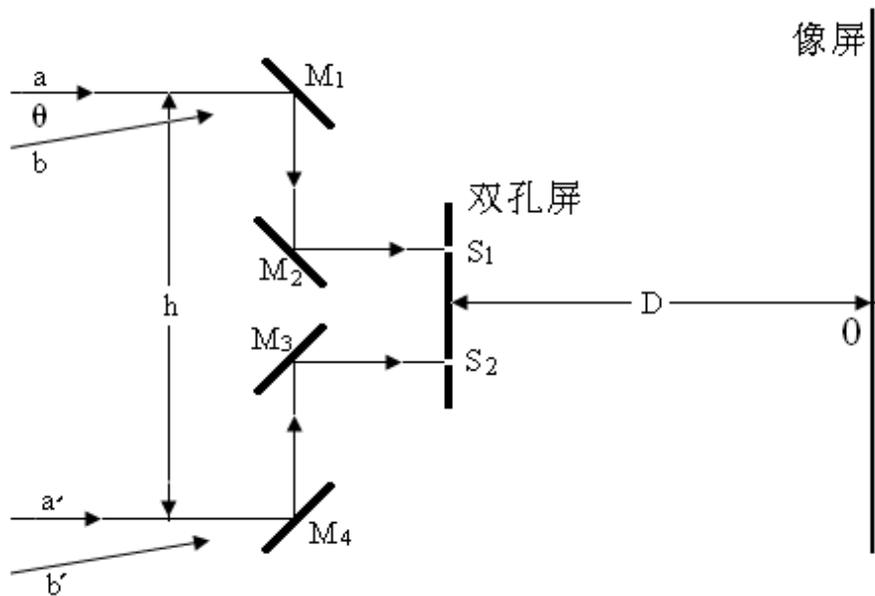
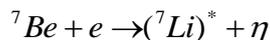
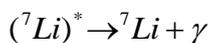


图 2

七、(20 分) 今年是我国著名物理学家、曾任浙江大学物理系主任的王淦昌先生诞生一百周年。王先生早在 1941 年就发表论文, 提出了一种探测中微子的方案:  ${}^7\text{Be}$  原子核可以俘获原子的 K 层电子而成为  ${}^7\text{Li}$  的激发态 ( ${}^7\text{Li}^*$ ), 并放出中微子 (当时写作  $\eta$ )



而 ( ${}^7\text{Li}^*$ ) 又可以放出光子  $\gamma$  而回到基态  ${}^7\text{Li}$



由于中微子本身很难直接观测, 能对上述过程相关物理量的测量, 就可以确定中微子的存在, 1942 年起, 美国物理学家艾伦 (R. Davis) 等人根据王淦昌方案先后进行了实验, 初步证实了中微子的存在。1953 年美国莱因斯 (F. Reines) 在实验中首次发现了中微子, 莱因斯与发现轻子的美国物理学家佩尔 (M. L. Perl) 分享了 1995 年诺贝尔物理学奖。

现用王淦昌的方案来估算中微子的质量和动量。若实验中测得锂核 ( ${}^7\text{Li}$ ) 反冲能量 (即  ${}^7\text{Li}$  的动能) 的最大值  $E_R = 56.6\text{eV}$ ,  $\gamma$  光子的能量  $h\nu = 0.48\text{MeV}$ 。已知有关原子核和电子静止能量的数据为  $m_{\text{Li}}c^2 = 6533.84\text{MeV}$ ;  $m_{\text{Be}}c^2 = 6534.19\text{MeV}$ ;  $m_e c^2 = 0.51\text{MeV}$ 。设在第一个过程中,  ${}^7\text{Be}$  核是静止的, K 层电子的动能也可忽略不计。试由以上数据, 算出的中微子的动能  $P_\eta$  和静止质量  $m_\eta$  各为多少?

一、参考解答：

如果小球的水平速度比较大，它与平板的第一次碰撞正好发生在平板的边缘  $Q$  处，这时  $u_0$  的值便是满足题中条件的最大值；如果小球的水平速度  $u_0$  较小，在它于平板发生第一次碰撞后再次接近平板时，刚好从平板的边缘  $Q$  处越过而不与平板接触，这时  $u_0$  的值便是满足题中条件的最小值。

设小球从台面水平抛出到与平板发生第一次碰撞经历的时间为  $t_1$ ，有

$$h = \frac{1}{2}gt_1^2 \quad (1)$$

若碰撞正好发生在  $Q$  处，则有

$$L = u_0 t_1 \quad (2)$$

从 (1)、(2) 两式解得的  $u_0$  值便是满足题中条件的最大值，即

$$u_{0\max} = L\sqrt{\frac{g}{2h}} \quad (3)$$

代入有关数据得

$$u_{0\max} = 0.71\text{m/s} \quad (4)$$

如果  $u_0 < u_{0\max}$ ，小球与平板的碰撞处将不在  $Q$  点。设小球第一次刚要与平板碰撞时在竖直方向的速度为  $v_1$ ，则有

$$v_1 = \sqrt{2gh} \quad (5)$$

以  $v_1'$ 、 $V_1'$  分别表示碰撞结束时刻小球和平板沿竖直方向的速度，由于碰撞时间极短，在碰撞过程中，小球和平板在竖直方向的动量守恒。设小球和平板的质量都是  $m$ ，则有

$$mv_1 = mv_1' + mV_1' \quad (6)$$

因为碰撞是弹性的，且平板是光滑的，由能量守恒可得

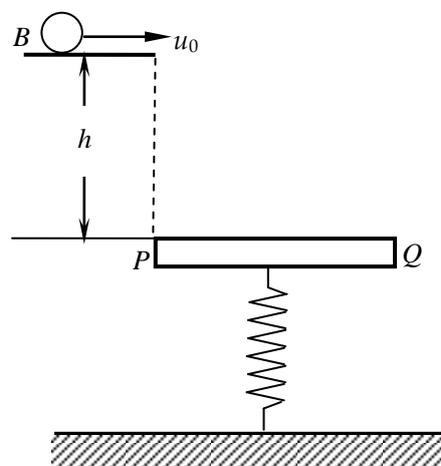
$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mu_0^2 = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}mV_1'^2 + \frac{1}{2}mu_0^2 \quad (7)$$

解 (6)、(7) 两式，得

$$v_1' = 0 \quad (8)$$

$$V_1' = v_1 = \sqrt{2gh} \quad (9)$$

碰撞后，平板从其平衡位置以  $V_1'$  为初速度开始作简谐振动。取固定坐标，其原点  $O$  与平板处于平衡位置时板的上表面中点重合， $x$  轴的方向竖直向下，若以小球和平板发生碰撞的时刻作为  $t=0$ ，则平板在  $t$  时刻离开平衡位置的位移



$$x_{PQ} = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (10)$$

式中

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (11)$$

$A$  和  $\varphi$  是两个待定的常量，利用参考圆方法，在  $t$  时刻平板振动的速度

$$v_{PQ} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi) \quad (12)$$

因  $t=0$  时， $x_{PQ}=0$ ， $v_{PQ}=V'$ ，由 (9)、(11)、(12) 式可求得

$$A = \frac{\sqrt{2gh}}{2\pi} T \quad (13)$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} \quad (14)$$

把 (13)、(14) 式代入 (10) 式，得

$$x_{PQ} = \frac{\sqrt{2gh}}{2\pi} T \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (15)$$

碰撞后，小球开始作平抛运动。如果第一次碰撞后，小球再经过时间  $t_2$  与平板发生第二次碰撞且发生在  $Q$  处，则在发生第二次碰撞时，小球的  $x$  坐标为

$$x_B(t_2) = \frac{1}{2} g t_2^2 \quad (16)$$

平板的  $x$  坐标为

$$x_{PQ}(t_2) = \frac{\sqrt{2gh}}{2\pi} T \cos\left(\frac{2\pi}{T}t_2 - \frac{\pi}{2}\right) \quad (17)$$

在碰撞时，有

$$x_B(t_2) = x_{PQ}(t_2) \quad (18)$$

由 (16)、(17)、(18) 式，代入有关数据得

$$4.90t_2^2 = 4.41 \cos\left(\pi t_2 - \frac{\pi}{2}\right) \quad (19)$$

这便是  $t_2$  满足的方程式，通过数值计算法求解方程可得（参见数值列表）

$$t_2 = 0.771\text{s} \quad (20)$$

如果第二次碰撞正好发生在平板的边缘  $Q$  处，则有

$$L = u_0(t_1 + t_2) \quad (21)$$

由 (1)、(20) 和 (21) 式得

$$u_0 = \frac{L}{t_1 + t_2} = 0.46\text{m/s} \quad (22)$$

而满足题中要求的  $u_0$  的最小值应大于 (22) 式给出的值. 综合以上讨论,  $u_0$  的取值范围是

$$0.46\text{m/s} < u_0 \leq 0.71\text{m/s} \quad (23)$$

附: (19) 式的数值求解

用数值解法则要代入  $t_2$  不同数值, 逐步逼近所求值, 列表如下:

$t_2$	0.730	0.750	0.760	0.765	0.770	0.771	0.772	0.775	0.780	0.790	0.810
$x_{PQ} = 4.41 \cos\left(\pi t_2 - \frac{\pi}{2}\right)$	3.31	3.12	3.02	2.96	2.91	2.91	2.90	2.86	2.81	2.70	2.48
$x_B = 4.90t_2^2$	2.61	2.76	2.83	2.87	2.91	2.91	2.91	2.94	2.98	3.06	3.21
$x_{PQ} - x_B$	0.70	0.36	0.19	0.09	0	0	-0.01	-0.08	-0.17	-0.36	-0.73

## 二、参考解答:

解法一

因为  $B$  点绕  $A$  轴作圆周运动, 其速度的大小为

$$v_B = \omega l \quad (1)$$

$B$  点的向心加速度的大小为

$$a_B = \omega^2 l \quad (2)$$

因为是匀角速转动,  $B$  点的切向加速度为 0, 故  $a_B$  也是  $B$  点的加速度, 其方向沿  $BA$  方向. 因为  $C$  点绕  $D$  轴作圆周运动, 其速度的大小用  $v_C$  表示, 方向垂直于杆  $CD$ , 在考察的时刻, 由图可知, 其方向沿杆  $BC$  方向. 因  $BC$  是刚性杆, 所以  $B$  点和  $C$  点沿  $BC$  方向的速度必相等, 故有

$$v_C = v_B \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \omega l \quad (3)$$

此时杆  $CD$  绕  $D$  轴按顺时针方向转动,  $C$  点的法向加速度

$$a_{Cn} = \frac{v_C^2}{CD} \quad (4)$$

由图可知  $\overline{CD} = 2\sqrt{2}l$ , 由 (3)、(4) 式得

$$a_{Cn} = \frac{\sqrt{2}}{8} \omega^2 l \quad (5)$$

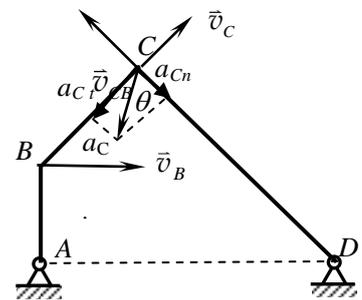
其方向沿  $CD$  方向.

下面来分析  $C$  点沿垂直于杆  $CD$  方向的加速度, 即切向加速度  $a_{Ct}$ . 因为  $BC$  是刚性杆, 所以  $C$  点相对  $B$  点的运动只能是绕  $B$  的转动,  $C$  点相对  $B$  点的速度方向必垂直于杆  $BC$ . 令  $v_{CB}$  表示其速度的大小, 根据速度合成公式有

$$\vec{v}_{CB} = \vec{v}_C - \vec{v}_B$$

由几何关系得

$$v_{CB} = \sqrt{v_B^2 - v_C^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} v_B = \frac{\sqrt{2}}{2} \omega l \quad (6)$$



由于  $C$  点绕  $B$  作圆周运动, 相对  $B$  的向心加速度

$$a_{CB} = \frac{v_{CB}^2}{CB} \quad (7)$$

因为  $\overline{CB} = \sqrt{2}l$ , 故有

$$a_{CB} = \frac{\sqrt{2}}{4}\omega^2 l \quad (8)$$

其方向垂直杆  $CD$ .

由 (2) 式及图可知,  $B$  点的加速度沿  $BC$  杆的分量为

$$(a_B)_{BC} = a_B \cos \frac{\pi}{4} \quad (9)$$

所以  $C$  点相对  $A$  点 (或  $D$  点) 的加速度沿垂直于杆  $CD$  方向的分量

$$a_{Ct} = a_{CB} + (a_B)_{BC} = \frac{3\sqrt{2}}{4}\omega^2 l \quad (10)$$

$C$  点的总加速度为  $C$  点绕  $D$  点作圆周运动的法向加速度  $a_{Cn}$  与切向加速度  $a_{Ct}$  的合加速度, 即

$$a_C = \sqrt{a_{Cn}^2 + a_{Ct}^2} = \frac{\sqrt{74}}{8}\omega^2 l \quad (11)$$

$a_C$  的方向与杆  $CD$  间的夹角

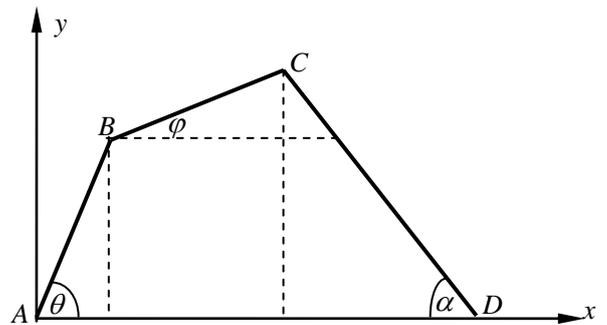
$$\theta = \arctan \frac{a_{Ct}}{a_{Cn}} = \arctan 6 = 80.54^\circ \quad (12)$$

解法二: 通过微商求  $C$  点加速度

以固定点  $A$  为原点作一直角坐标系  $Axy$ ,  $Ax$  轴与  $AD$  重合,  $Ay$  与  $AD$  垂直. 任意时刻  $t$ , 连杆的位形如图所示, 此时各杆的位置分别用  $\theta$ ,  $\varphi$  和  $\alpha$  表示, 且已知  $AB = l$ ,

$BC = \sqrt{2}l$ ,  $CD = 2\sqrt{2}l$ ,  $AD = 3l$ ,  $\frac{d\theta}{dt} = -\omega$ ,  $C$  点坐标表示为

$$x_C = l \cos \theta + \sqrt{2}l \cos \varphi \quad (1)$$



$$y_C = l \sin \theta + \sqrt{2}l \sin \varphi \quad (2)$$

将 (1)、(2) 式对时间  $t$  求一阶微商, 得

$$\frac{dx_C}{dt} = -l \left( \sin \theta \frac{d\theta}{dt} + \sqrt{2} \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} \right) \quad (3)$$

$$\frac{dy_C}{dt} = l \left( \cos \theta \frac{d\theta}{dt} + \sqrt{2} \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} \right) \quad (4)$$

把 (3)、(4) 式对时间  $t$  求一阶微商, 得

$$\frac{d^2x_C}{dt^2} = -l \left[ \cos \theta \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \sin \theta \frac{d^2\theta}{dt^2} + \sqrt{2} \cos \varphi \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \sqrt{2} \sin \varphi \frac{d^2\varphi}{dt^2} \right] \quad (5)$$

$$\frac{d^2y_C}{dt^2} = l \left[ -\sin \theta \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \cos \theta \frac{d^2\theta}{dt^2} - \sqrt{2} \sin \varphi \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \sqrt{2} \cos \varphi \frac{d^2\varphi}{dt^2} \right] \quad (6)$$

根据几何关系, 有

$$\begin{aligned} CD \sin \alpha &= AB \sin \theta + BC \sin \varphi \\ CD \cos \alpha + AB \cos \theta + BC \cos \varphi &= 3l \end{aligned}$$

即

$$2\sqrt{2} \sin \alpha = \sin \theta + \sqrt{2} \sin \varphi \quad (7)$$

$$2\sqrt{2} \cos \alpha = 3 - \cos \theta - \sqrt{2} \cos \varphi \quad (8)$$

将 (7)、(8) 式平方后相加且化简, 得

$$\sqrt{2} \sin \theta \sin \varphi + \sqrt{2} \cos \theta \cos \varphi - 3 \cos \theta - 3\sqrt{2} \cos \varphi - 2 = 0 \quad (9)$$

对 (9) 式对时间  $t$  求一阶微商, 代入  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{d\theta}{dt} = -\omega$ , 得

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} \omega \quad (10)$$

对 (9) 式对时间  $t$  求二阶微商, 并代入上述数据, 得

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{3}{8} \omega^2 \quad (11)$$

将 (10)、(11) 式以及  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\frac{d\theta}{dt}$  的数值代入 (5)、(6) 式, 得

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_C}{dt^2} &= -\frac{5}{8} l \omega^2 \\ \frac{d^2y_C}{dt^2} &= -\frac{7}{8} l \omega^2 \end{aligned}$$

所以

$$a_C = \sqrt{\left( \frac{d^2x_C}{dt^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2y_C}{dt^2} \right)^2} = \frac{\sqrt{74}}{8} l \omega^2 \quad (12)$$

由图知,  $a_C$  与  $x$  轴的夹角为  $\beta$

$$\tan \beta = \left( \frac{d^2 y_C}{dt^2} \right) / \left( \frac{d^2 x_C}{dt^2} \right) = 1.4 \quad (13)$$

所以求得

$$\beta = \arctan 1.4 = 54.46^\circ$$

这个夹角在第三象限，为  $234.46^\circ$ ，故  $a_c$  与  $CD$  的夹角

$$\gamma = 80.54^\circ \quad (14)$$

### 三、参考解答：

1. 设 a 室中原有气体为  $\nu$  mol，打开  $K_1$  后，有一部分空气进入 a 室，直到  $K_1$  关闭时，a 室中气体增加到  $\nu'$  mol，设 a 室中增加的  $(\nu' - \nu)$  mol 气体在进入容器前的体积为  $\Delta V$ ，气体进入 a 室的过程中，大气对这部分气体所作的功为

$$A = p_0 \Delta V \quad (1)$$

用  $T$  表示  $K_1$  关闭后 a 室中气体达到平衡时的温度，则 a 室中气体内能增加量为

$$\Delta U = \nu' C_V (T - T_0) \quad (2)$$

由热力学第一定律可知

$$\Delta U = A \quad (3)$$

由理想气体状态方程，有

$$\frac{4}{5} p_0 V_0 = \nu R T_0 \quad (4)$$

$$p_0 \Delta V = (\nu' - \nu) R T_0 \quad (5)$$

$$p_0 V_0 = \nu' R T \quad (6)$$

由以上各式解出

$$T = \frac{5(C_V + R)}{5C_V + 4R} T_0 \quad (7)$$

2.  $K_2$  打开后，a 室中的气体向 b 室自由膨胀，因系统绝热又无外界做功，气体内能不变，所以温度不变（仍为  $T$ ），而体积增大为原来的 2 倍。由状态方程知，气体压强变为

$$p = \frac{1}{2} p_0 \quad (8)$$

关闭  $K_2$ ，两室中的气体状态相同，即

$$p_a = p_b = p, \quad T_a = T_b = T, \quad V_a = V_b = V_0, \quad \text{且 } \nu_a = \nu_b = \frac{1}{2} \nu' \quad (9)$$

拔掉销钉后，缓慢推动活塞 B，压缩气体的过程为绝热过程，达到最终状态时，设两室气体的压强、体积和温度分别为  $p'_a$ 、 $p'_b$ 、 $V'_a$ 、 $V'_b$ 、 $T'_a$ 、 $T'_b$ ，则有

$$p_a V_a^{\frac{C_V + R}{C_V}} = p'_a V'_a{}^{\frac{C_V + R}{C_V}} \quad (10)$$

$$p_b V_b^{\frac{C_v+R}{C_v}} = p_b' V_b'^{\frac{C_v+R}{C_v}} \quad (11)$$

由于隔板与容器内壁无摩擦，故有

$$p_a' = p_b' \quad (12)$$

由理想气体状态方程，则有

$$p_a' V_a' = \nu_a R T_a' \quad (13)$$

$$p_b' V_b' = \nu_b R T_b' \quad (14)$$

因

$$V_a' + V_b' = V_0 \quad (15)$$

由 (8) ~ (15) 式可得

$$V_a' = V_b' = \frac{1}{2} V_0 \quad (16)$$

$$T_a' = T_b' = 2^{\frac{R}{C_v}} T \quad (17)$$

在推动活塞压缩气体这一绝热过程中，隔板对 a 室气体作的功  $W$  等于 a 室中气体内能的增加，即

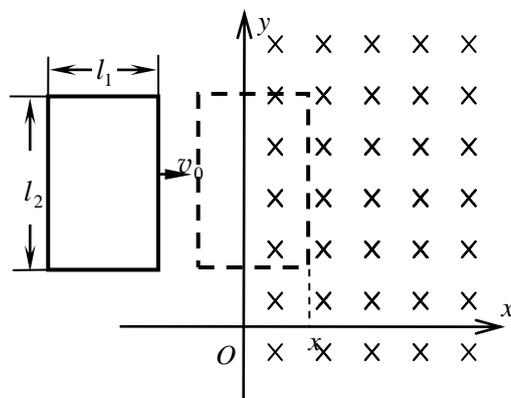
$$W = \frac{1}{2} \nu' C_v (T_a' - T) \quad (18)$$

由 (6)、(17) 和 (18) 式得

$$W = \frac{C_v}{2R} \left( 2^{\frac{R}{C_v}} - 1 \right) p_0 V_0 \quad (19)$$

#### 四、参考解答：

设某一时刻线框在磁场区域的深度为  $x$  ( $x \leq l_1$ )，速度为  $v$ ，因线框的一条边切割磁感应线产生的感应电动势为  $\mathcal{E}_v = vBl_2$ ，它在线框中引起感应电流，感应电流的变化又引起自感电动势。设线框的电动势和电流的正方向均为顺时针方向，则切割磁感应线产生的电动势  $\mathcal{E}_v$  与设定的正方向相反，自感电动势  $\mathcal{E}_L = -L \frac{\Delta i}{\Delta t}$  与设定的正方向相同。因线框处于超导状态，电阻  $R=0$ ，故有



$$\mathcal{E}_L - \mathcal{E}_v = -L \frac{\Delta i}{\Delta t} - vBl_2 = iR = 0 \quad (1)$$

即

$$L \frac{\Delta i}{\Delta t} + Bl_2 \frac{\Delta x}{\Delta t} = 0 \quad (2)$$

或

$$Bl_2 \Delta x = -L \Delta i \quad (3)$$

即

$$\frac{\Delta i}{\Delta x} = -\frac{Bl_2}{L} \quad (4)$$

可见  $i$  与  $x$  成线性关系, 有

$$i = -\frac{Bl_2}{L} x + C \quad (5)$$

$C$  为一待定常数, 注意到  $x=0$  时,  $i=0$ , 可得  $C=0$ , 故有

$$i = -\frac{Bl_2}{L} x \quad (6)$$

$x > 0$  时  $i < 0$ , 电流为负值表示线框中电流的方向与设定的正方向相反, 即在线框进入磁场区域时右侧边的电流实际流向是向上的. 外磁场作用于线框的安培力

$$f = Bl_2 i = -\frac{B^2 l_2^2}{L} x \quad (7)$$

其大小与线框位移  $x$  成正比, 方向与位移  $x$  相反, 具有“弹性力”的性质. 下面分两种情形做进一步分析:

(i) 线框的初速度  $v_0$  较小, 在安培力的作用下, 当它的速度减为 0 时, 整个线框未全部进入磁场区, 这时在安培力的继续作用下, 线框将反向运动, 最后退出磁场区. 线框一进一出的运动是一个简谐振动的半个周期内的运动, 振动的圆频率

$$\omega = \sqrt{\frac{B^2 l_2^2}{Lm}} \quad (8)$$

周期

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Lm}{B^2 l_2^2}} \quad (9)$$

振动的振幅可由能量关系求得, 令  $x_m$  表示线框速度减为 0 时进入磁场区的深度, 这时线框的初始动能全部转换为“弹性力”的“弹性势能”, 由能量守恒可得

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{B^2 l_2^2}{L} \right) x_m^2 \quad (10)$$

得

$$x_m = \sqrt{\frac{Lm v_0^2}{B^2 l_2^2}} \quad (11)$$

故其运动方程为

$$x = \frac{v_0 \sqrt{Lm}}{Bl_2} \sin\left(\frac{Bl_2}{\sqrt{Lm}} t\right), \quad t \text{ 从 } 0 \text{ 到 } \pi \frac{\sqrt{Lm}}{Bl_2} \quad (12)$$

半个周期后，线框退出磁场区，将以速度  $v_0$  向左匀速运动。因为在这种情况下  $x_m$  的最大值是  $l_1$ ，即

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2 l_2^2}{L} l_1^2 \quad (13)$$

由此可知，发生第 (i) 种情况时， $v_0$  的值要满足下式

$$\frac{1}{2}mv_0^2 \leq \frac{1}{2} \left( \frac{B^2 l_2^2}{L} \right) l_1^2$$

即

$$v_0 \leq \frac{Bl_1 l_2}{\sqrt{mL}} \quad (14)$$

(ii) 若线框的初速度  $v_0$  比较大，整个线框能全部进入磁场区。当线框刚进入磁场区时，其速度仍大于 0，这要求  $v_0$  满足下式

$$v_0 > \frac{Bl_2 l_1}{\sqrt{mL}} \quad (15)$$

当线框的初速度满足 (15) 式时，线框能全部进入磁场区，在全部进入磁场区域以前，线框的运动方程与 (12) 式相同，但位移区间是  $x=0$  到  $x=l_1$ ，所以时间间隔与 (12) 式不同，而是从 0 到

$$t_1 = \frac{\sqrt{Lm}}{Bl_2} \left[ \arcsin \frac{Bl_1 l_2}{\sqrt{Lmv_0^2}} \right] \quad (16)$$

因为线框的总电动势总是为 0，所以一旦线框全部进入磁场区域，线框的两条边都切割磁感应线，所产生的电动势之和为 0，因而自感电动势也为 0。此后线框中维持有最大的电流  $i_m = -\frac{Bl_2}{L} l_1$ ，磁场对线框两条边的安培力的合力等于零，线框将在磁场区域匀速前进，运动的速度可由下式决定

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2 l_2^2}{L} l_1^2$$

即

$$v = \sqrt{v_0^2 - \frac{B^2 l_1^2 l_2^2}{Lm}} \quad (17)$$

## 五、参考解答：

### 解法一：

1. 由于等离子层的厚度远小于地球的半径，故在所考察的等离子区域内的引力场和磁场都可视为匀强场。在该区域内磁场的磁感应强度

$$B = \left( \frac{R_0}{r} \right)^3 B_0 = \frac{3.0 \times 10^{-5}}{125} \text{T} = 2.4 \times 10^{-7} \text{T} \quad (1)$$

引力加速度

$$g = \left(\frac{R_0}{r}\right)^2 g_0 = \frac{9.8}{25} \text{m/s}^2 = 0.39 \text{m/s}^2 \quad (2)$$

考察等离子层中的某一质量为  $m$ 、电荷量为  $q$ 、初速度为  $u$  的粒子，取粒子所在处为坐标原点  $O$ ，作一直角坐标系  $Oxyz$ ， $Ox$  轴指向地球中心， $Oz$  沿磁场方向，如图 1 所示。该粒子的初速度在坐标系中的三个分量分别为  $u_x$ 、 $u_y$  和  $u_z$ 。因作用于粒子的引力沿  $x$  轴正方向，作用于粒子的洛伦兹力与  $z$  轴垂直，故粒子在  $z$  轴方向不受力作用，沿  $z$  轴的分速度保持不变。现设想在开始时刻，附加给粒子一沿  $y$  轴正方向大小为  $v_0$  的速度，同时附加给粒子一沿  $y$  轴负方向大小为  $v_0$  的速度，要求与其中一个  $v_0$  相联系的洛伦兹力正好与粒子所受的地球引力相平衡，即

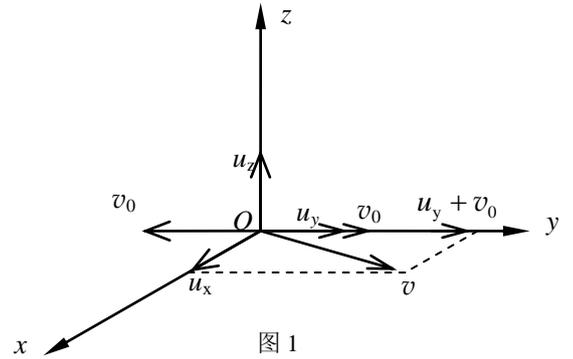


图 1

$$qv_0B = mg$$

得

$$v_0 = \frac{mg}{qB} \quad (3)$$

用  $v$  表示  $u_x$  与沿  $y$  轴的速度  $u_y \pm v_0$  的合速度（对质子取正号，对电子取负号），有

$$v = \sqrt{u_x^2 + (u_y \pm v_0)^2} \quad (4)$$

这样，所考察的粒子的速度可分为三部分：

沿  $z$  轴的分速度  $u_z$ 。其大小和方向都保持不变，但对不同的粒子是不同的，属于等离子层中粒子的无规则运动的速度分量。

沿  $y$  轴的速度  $v_0$ 。对带正电的粒子，速度的方向沿  $y$  轴的负方向，对带负电的粒子，速度的方向沿  $y$  轴的正方向。与这速度联系的洛伦兹力正好和引力抵消，故粒子将以速率  $v_0$  沿  $y$  轴运动。由 (3) 式可知， $v_0$  的大小是恒定的，与粒子的初速度无关，且对同种的粒子相同。

在  $Oxy$  平面内的速度  $v$ 。与这速度联系的洛伦兹力使粒子在  $Oxy$  平面内作速率为  $v$  的匀速率圆周运动，若以  $R$  表示圆周的半径，则有

$$qvB = m \frac{v^2}{R}$$

得

$$R = \frac{mv}{qB} \quad (5)$$

由 (4)、(5) 式可知，轨道半径不仅与粒子的质量有关，而且与粒子的初速度的  $x$  分量  $u_x$  和  $y$  分量  $u_y$  有关。圆周运动的速度方向是随时间变化的，在圆周运动的一个周期内的平均速度等于 0。

由此可见，等离子层内电子和质子的运动虽然相当复杂，但每个粒子都具有由 (3) 式给出的速度  $v_0$ ，其方向垂直于粒子所在处的地球引力方向，对电子，方向向西，对质子，方向向东。电子、质子这种运动称为漂移运动，对应的速度称为漂移速度。漂移运动是粒子的定向运动，电子、质子的定向运动就形成了

环绕地球中心的环形电流.

由 (3) 式和 (1)、(2) 两式以及有关数据可得电子和质子的漂移速度分别为

$$v_{0e} = 9.2 \times 10^{-6} \text{ m/s} \quad (6)$$

$$v_{0p} = 1.7 \times 10^{-2} \text{ m/s} \quad (7)$$

由于电子、质子漂移速度的方向相反, 电荷异号, 它们产生的电流方向相同, 均为沿纬度向东. 根据电流密度的定义有

$$j = nq(v_{0p} + v_{0e}) \quad (8)$$

代入有关数据得

$$j = 2.8 \times 10^{-14} \text{ A/m}^2 \quad (9)$$

电流密度的方向沿纬度向东.

2. 上一小题的讨论表明, 粒子在  $Oxy$  平面内作圆周运动, 运动的速率由 (4) 式给出, 它与粒子的初速度有关. 对初速度方向指向地心的粒子, 圆周运动的速率为

$$v = \sqrt{u_x^2 + v_0^2} \quad (10)$$

由 (1)、(2)、(3)、(5)、(10) 各式并代入题给的有关数据可得电子、质子的轨道半径分别为

$$R_e = 0.33 \text{ m} \quad (11)$$

$$R_p = 14.8 \text{ m} \quad (12)$$

以上的计算表明, 虽然粒子具有沿引力方向的初速度, 但由于粒子还受到磁场的作用, 电子和质子在地球半径方向的最大下降距离分别为  $2R_e = 0.66 \text{ m}$  和  $2R_p = 29.6 \text{ m}$ , 都远小于等离子层的厚度, 所考察的电子和质子仍在等离子层内运动, 不会落到地面上.

**解法二:** .

1. 由于等离子层的厚度远小于地球半径, 故在所考察等离子区域内的引力场和磁场都可视为匀强场. 在该区域内磁场的磁感应强度

$$B = \left( \frac{R_0}{r} \right)^3 B_0 = \frac{3.0 \times 10^{-5}}{125} \text{ T} = 2.4 \times 10^{-7} \text{ T} \quad (1)$$

引力加速度

$$g = \left( \frac{R_0}{r} \right)^2 g_0 = \frac{9.8}{25} \text{ m/s}^2 = 0.39 \text{ m/s}^2 \quad (2)$$

考察等离子层中的某一质量为  $m$ , 电荷量为  $q$ 、初速度为  $u$  的粒子, 取粒子所在处为坐标原点  $O$ , 作一直角坐标系  $Oxyz$ ,  $Ox$  轴指向地球中心,  $Oz$  沿磁场方向, 如图 1 所示. 该粒子的初速度在坐标系中的三个分量分别为  $u_x$ 、 $u_y$  和  $u_z$ . 若以  $v_x$ 、 $v_y$ 、 $v_z$  表示粒子在任意时刻  $t$  的速度  $v$  在  $x$  方向、 $y$  方向和  $z$  方向的

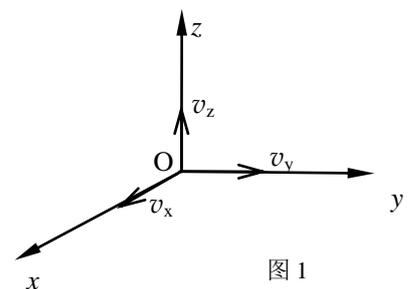


图 1

分速度，则带电粒子在引力和洛伦兹力的共同作用下的运动方程为

$$m \frac{dv_x}{dt} = mg + qv_y B = qB \left( v_y + \frac{mg}{qB} \right) \quad (3)$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = -qv_x B \quad (4)$$

$$m \frac{dv_z}{dt} = 0 \quad (5)$$

(5) 式表明，所考察粒子的速度在  $z$  轴上的分量保持不变，即

$$v_z = u_z \quad (6)$$

作变量代换，令

$$V_x = v_x \quad V_y = v_y + v_0 \quad (7)$$

其中

$$v_0 = \frac{mg}{qB} \quad (8)$$

把 (7)、(8) 式代入 (3)、(4) 式得

$$m \frac{dV_x}{dt} = qBV_y \quad (9)$$

$$m \frac{dV_y}{dt} = -qV_x B \quad (10)$$

由 (9)、(10) 两式可知，作用于粒子的力  $F$  在  $x$  和  $y$  方向的分量分别为

$$F_x = qBV_y$$

$$F_y = -qBV_x$$

若用  $\theta_1$  表示  $F$  的方向与  $x$  轴的夹角， $\theta_2$  表示  $V$  的方向与  $x$  轴的夹角，而  $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$ ，则有

$$\tan \theta_1 = \frac{F_y}{F_x} = -\frac{V_x}{V_y}$$

$$\tan \theta_2 = \frac{V_y}{V_x}$$

可见  $\tan \theta_1 \cdot \tan \theta_2 = -1$ ，表明  $F$  的方向与  $V$  的方向垂直，粒子将在  $F$  的作用下在  $Oxy$  平面内作速率为  $V$  的匀速圆周运动。若以  $R$  表示圆周的半径，则有

$$qVB = m \frac{V^2}{R}$$

$$R = \frac{mV}{qB} \quad (11)$$

在匀速圆周运动中， $V$  的大小是不变的，任何时刻  $V$  的值也就是  $t=0$  时刻  $V$  的值，由 (7) 式和已知条件在  $t=0$  时刻有

$$V_x = u_x \quad V_y = u_y + v_0$$

故有

$$V = \sqrt{u_x^2 + (u_y + v_0)^2} \quad (12)$$

以上讨论表明，粒子的运动可分成三部分：

根据（6）式  $v_z = u_z$ ，可知粒子沿  $z$  轴的分速度大小和方向都保持不变，但对不同的粒子是不同的，属于等离子层中粒子的无规则运动的速度分量。

根据（7）式可得  $v_x = V_x$ ， $v_y = V_y - v_0$ ，表明粒子在  $Oxy$  平面内以速率  $V$  作圆周运动的同时，又以速度  $v_0$  沿  $y$  轴运动。 $V_x$ 、 $V_y$  是圆周运动速度的  $x$  分量和  $y$  分量。圆周运动的轨道半径不仅与粒子的质量有关，而且与粒子的初速度的  $x$  分量  $u_x$  和  $y$  分量  $u_y$  有关。圆周运动的速度方向是随时间变化的，在圆周运动的一个周期内的平均速度等于 0。

沿  $y$  轴的速度  $v_0$  由（8）式给出，其大小是恒定的，与粒子的初速度无关，同种粒子相同，但对带正电的粒子，其方向沿  $y$  轴的负方向，对带负电的粒子，其方向沿  $y$  轴的正方向。

由此可见，等离子层内电子和质子虽然相当复杂，但每个粒子都具有由（8）式给出的速度  $v_0$ ，其方向垂直于粒子所在处的地球引力，对电子，方向向西，对质子，方向向东。电子、质子这种运动称为漂移运动，对应的速度称为漂移速度。漂移运动是粒子的定向运动，电子、质子的定向运动就形成了环绕地球中心的环形电流。

由（8）式和（1）、（2）两式以及有关数据可得电子和质子的漂移速度分别为

$$v_{0e} = 9.2 \times 10^{-6} \text{ m/s} \quad (13)$$

$$v_{0p} = 1.7 \times 10^{-2} \text{ m/s} \quad (14)$$

由于电子、质子漂移速度的方相反，电荷异号，它们产生的电流方向相同，均为沿纬度向东。根据电流密度的定义有

$$j = nq(v_{0p} + v_{0e}) \quad (15)$$

代入有关数据得

$$j = 2.8 \times 10^{-14} \text{ A/m}^2 \quad (16)$$

电流密度的方向沿纬度向东。

2. 上一小节的讨论表明，粒子在  $Oxy$  平面内作圆周运动，运动的速率由（12）式给出，它与粒子的初速度有关。对初速度方向指向地心的粒子，圆周运动的速率为

$$V = \sqrt{u_x^2 + v_0^2} \quad (17)$$

因题给出的电子与质子的初速度  $u_x$  是不同的，电子、质子的质量又是不同的，故电子、质子在  $Oxy$  平面内作圆周运动的半径也是不同的。由（1）、（2）、（8）、（11）、（12）各式并代入有关数据可得电子、质子的轨道半径分别为

$$R_e = 0.33 \text{ m} \quad (18)$$

$$R_p = 14.8\text{m} \quad (19)$$

以上的计算表明，虽然粒子具有沿引力方向的初速度，但由于粒子还受到磁场的作用，电子和质子在地球半径方向的最大下降距离分别为  $2R_e = 0.66\text{m}$  和  $2R_p = 29.6\text{m}$ ，都远小于电离层的厚度，所考察的电子和质子仍在等离子层内运动，不会落到地面上。

## 六、参考解答：

$$1. \frac{D}{l} \delta s$$

$$2. \frac{l}{d} \lambda$$

附 1、2 两问的参考解法：

1. 求  $S'$  经双缝产生的干涉图像的零级亮纹  $P'_0$  的位置

设  $P'_0$  点的坐标为  $y'_0$ ，它也就是光源  $S'$  与  $S$  分别对应的干涉条纹的零级亮纹之间的距离，即

$$P'_0 P_0 = \delta y = y'_0 - 0 = y'_0$$

由双缝到  $P'_0$  点的光程差  $\Delta_1 = S_2 P'_0 - S_1 P'_0$ ，从  $S_1$  作  $S_2 P'_0$  的垂线交于  $H$  点，三角形  $OP_0 P'_0$  与三角形  $S_1 H S_2$  相似，因  $D \gg d$ ，则

$$\Delta_1 = \frac{d}{D} y'_0 = \frac{d}{D} \delta y \quad (\text{附 } 1)$$

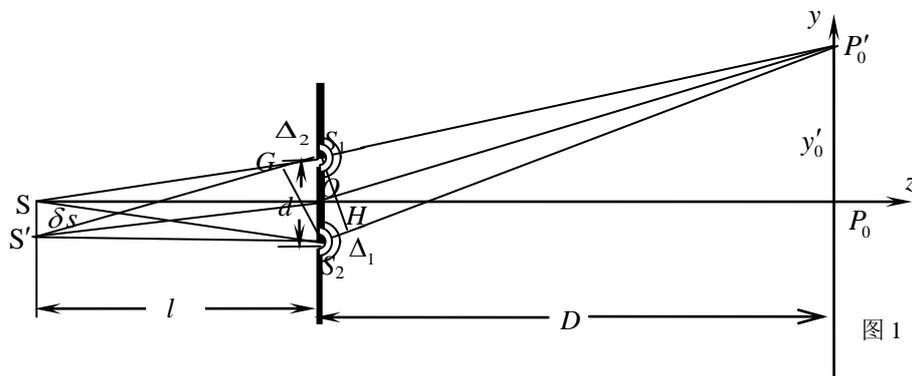


图 1

从  $S_2$  作  $S'S_1$  的垂线交于  $G$ ， $S'$  到双缝的光程差

$$\Delta_2 = \overline{S'S_2} - \overline{S'S_1} \quad (\text{附 } 2)$$

三角形  $SOS'$  与三角形  $S_1GS_2$  相似，因  $l \gg d$ ，则

$$\Delta_2 = \overline{S'S_2} - (\overline{S'G} + \overline{GS_1}) = -\overline{GS_1} = -\frac{d}{l} \delta s \quad (\text{附 } 3)$$

对满足零光程差条件的  $P'_0$  而言，

$$[\overline{S'S_2} + \overline{S_2P'_0}] - [\overline{S'S_1} + \overline{S_1P'_0}] = \Delta_1 + \Delta_2 = \frac{d}{D} \delta y - \frac{d \delta s}{l} = 0$$

得

$$\delta y = \frac{D}{l} \cdot \delta s \quad (\text{附 } 4)$$

2. 在线光源情况下，可以导出双缝干涉的相邻两亮纹的间距为

$$\Delta y = \frac{D}{d} \lambda \quad (\text{附 } 5)$$

$\delta s$  值不同对应着扩展光源中不同位置的线光源. 不难证明, 它们经双缝产生干涉条纹的间距  $\Delta y$  均如 (5) 式所示. 宽度为  $w$  的扩展光源是由一系列  $\delta s$  值不同的、连续分布的、相互独立的线光源构成. 因此扩展光源在观察屏上产生的干涉图像的强度是由每个线光源产生干涉条纹的强度相加而成. 当扩展光源宽度为  $w$  时, 对于光源最边缘点有

$$\delta s = w \quad (\text{附 } 6)$$

代入 (4) 式

$$\delta y = \frac{D}{l} w \quad (\text{附 } 7)$$

若

$$\Delta y = \delta y \quad (\text{附 } 8)$$

则相当于扩展光源最边缘的线光源产生的干涉条纹错开了一个条纹间距. 由于扩展光源各部分产生的干涉条纹的光强分布都相同, 各套干涉条纹强度相加的结果使屏上各处光强相等, 变得一片模糊而无法分辨. 由 (5) 式和 (7) 式, 求得为使条纹能被分辨, 扩展光源允许的最大宽度

$$w = \frac{l}{d} \lambda \quad (\text{附 } 9)$$

3.

解法一

如图 2 所示,  $aa'$  是由扩展光源上端边缘发出的平行光,  $bb'$  是由扩展光源下端边缘发出的平行光. 设  $ab$  光线交于  $M_1$  点,  $a'b'$  光线交于  $M_2$  点.  $aa'$  光束中的光线  $a$  经过  $M_1M_3S_1$  到达观察屏上  $P$  点; 光线  $a'$  经过  $M_2M_4S_2$  到达观察屏上  $P$  点, 两相干光波产生干涉, 在观察屏上产生一套干涉条纹. 同理, 平行光束  $bb'$  在观察屏上产生另一套干涉条纹. 从扩展光源不同部位发出的、倾角在

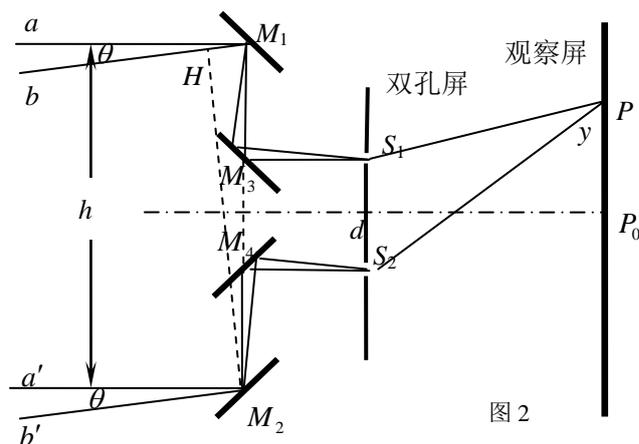


图 2

0 和  $\theta$  之间不同角度入射的平行光束, 经迈克尔逊测星仪相应的反射镜走过不同路径到双孔, 然后在观察屏上产生很多套干涉条纹. 这些干涉条纹光强度彼此相加, 屏幕上就形成了光强度的分布图像. 根据第 2 问的结果, 其清晰度取决于来自扩展光源上下边缘发出的平行光  $aa'$  与  $bb'$  分别在屏幕上产生两套干涉条纹的相对位置错开的程度.

由对称性考虑, 平行光束  $aa'$  中两条光线  $a$  和  $a'$  在观察屏上  $P_0$  的光程差为 0, 即平行光  $aa'$  产生的那套干涉条纹的零级亮纹就在  $P_0$  处. 现讨论以倾角  $\theta$  斜入射的平行光束  $bb'$  通过整个光学装置后, 在观察屏上某点发生干涉时的光程差. 光束  $bb'$  中的光线  $b$  入射  $M_1$  的光线经  $M_3$  反射到达  $S_1$ , 光线  $b$  从  $M_1$  点算起, 所经光程为  $\overline{M_1M_3} + \overline{M_3S_1}$ ; 光线  $b'$  入射  $M_2$  的光线经  $M_4$  反射到达  $S_2$ , 光线  $b'$  从  $M_2$  点算起, 所经光程为  $\overline{M_2M_4} + \overline{M_4S_2}$ . 由对称性可得

$$\overline{M_1M_3} + \overline{M_3S_1} = \overline{M_2M_4} + \overline{M_4S_2} \quad (1)$$

也就是说从  $M_1$  和  $M_2$  算起, 光线  $b$  和  $b'$  到达  $S_1$  与  $S_2$  的光程是相等的, 但是光线  $b$  和  $b'$  在到达  $M_1$  和  $M_2$  时,

二者的相位却不同. 由  $M_2$  作斜入射光线  $bM_1$  的垂线交  $H$  点,  $M_2$  与  $H$  相位相等, 因此, 斜入射的两条平行光线  $b$  和  $b'$  到达  $S_1$  和  $S_2$  时的相位差是光程差  $\overline{HM_1}$  引起的

$$\Delta'_1 = [M_2M_4S_2] - [HM_1M_3S_1] = -\overline{HM_1} = -h\theta \quad (2)$$

从扩展光源下边缘发出的平行光束斜入射到测星干涉仪, 经双孔后发出的相干光在观察屏上坐标为  $y$  (坐标原点取在  $P_0$  上) 的  $P$  点上引起的光程差

$$\Delta = \Delta'_1 + \Delta_1 \approx -h\theta + \frac{d}{D}y \quad (3)$$

其零级亮纹所在位置  $P'_0$  对应的光程差  $\Delta = 0$ , 故  $P'_0$  的坐标

$$y'_0 = h\theta \cdot \frac{D}{d} \quad (4)$$

这也就是平行光  $aa'$  与  $bb'$  产生的干涉条纹的零级亮纹 (也是两套条纹) 错开的距离

$$\delta y = h\theta \cdot \frac{D}{d} \quad (5)$$

因在线光源情况下, 可以导出双孔干涉的相邻两亮纹的间距为

$$\Delta y = \frac{D}{d}\lambda \quad (6)$$

当二者错开一个条纹间隔时, 即  $\Delta y = \delta y$ , 代入 (6) 式 (星光波长采用  $\bar{\lambda}$ ), 得

$$\theta = \frac{\bar{\lambda}}{h} \quad (7)$$

远处的星体作为扩展光源发出的光经过“测星仪”到达双孔, 在屏上观察到干涉条纹的清晰度下降, 由小到大调节  $M_1$ 、 $M_2$  距离  $h$ , 当屏幕上条纹消失时, 记下此时  $h$  的值代入 (7) 式就可确定扩展光源角直径  $\theta$  的大小.

注: 实际星体都看作均匀亮度的圆形扩展光源, 通过调节  $h$  使屏幕上的干涉条纹消失, 即各处强度完全相等时, 通过数学计算, 用迈克尔逊测星仪测量得的星体角直径  $\theta = 1.22 \frac{\bar{\lambda}}{h}$ .

## 解法二

如图 3 所示, 对  $M_1$ 、 $M_3$  而言, 找出  $S_1$  对  $M_3$  的中间像  $S''_1$  和对  $M_1$  所成的像  $S'_1$  以及光线  $a$  在  $M_1$ 、 $M_3$  的反射点  $F$  和  $G$ . 由物像的对称性可知  $\overline{GS_1} = \overline{GS''_1}$ ,  $\overline{FS_1} = \overline{FS''_1}$ , 故

$$\overline{FS'_1} = \overline{FG} + \overline{GS_1}$$

即从光线  $a$  上一点到  $S'_1$  和到  $S_1$  的光程相等. 同理可证, 从光线  $b$  上一点到  $S'_1$  和到  $S_1$  的光程相等; 对  $M_2$ 、 $M_4$  (未画出) 而言, 从光线  $a'$  上一点到  $S'_2$  和到  $S_2$  的光程相等; 从光线  $b'$  上一点到  $S'_2$  和到  $S_2$  的光程相等.

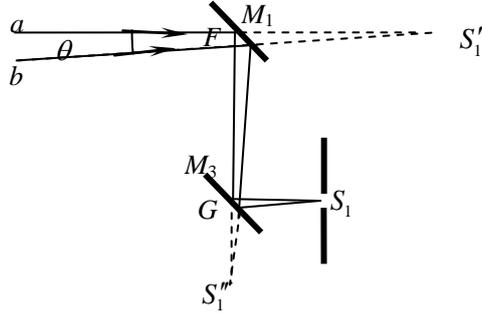


图 3

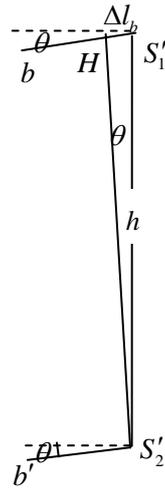


图 4

因此，光线  $a$  到  $S_1$  处与光线  $a'$  到  $S_2$  处引起的光程差  $\Delta l_a$  与没有反射镜  $M_1$ 、 $M_2$  时两光线到  $S_1'$ 、 $S_2'$  处的光程相等。因  $a$ 、 $a'$  垂直双孔屏，故

$$\Delta l_a = 0 \quad (1)$$

通过双孔  $S_1$ 、 $S_2$  后，光线  $a$ 、 $a'$  在  $P_0$  的光程差

$$\Delta l'_a = 0 \quad (2)$$

平行光束  $bb'$  斜入射时，可从  $S_1'$ 、 $S_2'$  处求  $b$ 、 $b'$  两光线到达  $S_1$ 、 $S_2$  处的光程差  $\Delta l_b$ 。由  $S_2'$  作  $bs_1'$  的垂线  $S_2'H$ （见图 4），

$$\Delta l_b = \overline{HS_1'} = h \sin \theta \approx h\theta \quad (3)$$

说明光线  $b'$  超前于光线  $b$ 。

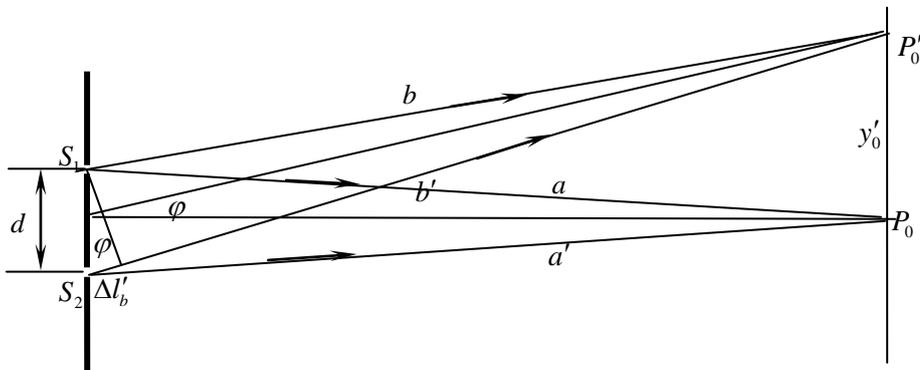


图 5

通过双孔  $S_1$ 、 $S_2$  后光线  $b$ 、 $b'$  射出的相干光线在屏幕上形成的零级亮纹不可能位于  $P_0$  处，因为二者到达双孔前光线  $b'$  已超前了光线  $b$ ，如图 5 所示，光线  $b'$  经过  $S_2$  孔后要多走一段光程来抵消前面的相位差，以达到与光线  $b$  在没有光程差的情况下相交于远方屏幕上，形成干涉零级亮纹。该点所对应的  $b'$  经过  $S_2$  孔后多走的光程

$$\Delta l'_b = \overline{S_2P'_0} - \overline{S_1P'_0} = d \sin \varphi \approx d\varphi \quad (4)$$

从  $\Delta l_b = \Delta l'_b$  可求得平行光束  $bb'$  经双孔后在观察屏上的干涉零级条纹位置  $P'_0$ 。由 (3) 式和 (4) 式，

得

$$\varphi = \frac{h}{d} \theta \quad (5)$$

$P'_0$  的位置坐标

$$y'_0 = D \tan \varphi \approx D \varphi \quad (6)$$

由小到大调节反射镜  $M_1$ 、 $M_2$  之间的距离（也就是  $S'_1$ 、 $S'_2$  之间的距离） $h$ ，直到屏幕上的干涉条纹消失，即各处强度完全相等时，记下此时  $h$  的值。这时相干光  $bb'$  在屏幕上零级亮纹位置  $P'_0$  与  $P_0$  的距离

$$\overline{P_0 P'_0} = y'_0 - 0 = \delta y = D \varphi \quad (7)$$

当  $\overline{P_0 P'_0}$  等于条纹间隔  $\Delta y$ ，即

$$\overline{P_0 P'_0} = \frac{D}{d} \bar{\lambda} \quad (8)$$

代入 (7) 式得

$$\varphi = \frac{\bar{\lambda}}{d} \quad (9)$$

由 (5)、(9) 两式，得

$$\theta = \frac{\bar{\lambda}}{h} \quad (10)$$

解法三

根据第 2 问的结果，为使条纹能被分辨，扩展光源的允许宽度为  $w = \frac{l}{d} \lambda$ ，从而扩展光源对双缝中心的张角为

$$\theta' = \frac{w}{l} = \frac{\lambda}{d} \quad (1)$$

如图 3 所示，对  $M_1$ 、 $M_3$  而言，找出  $S_1$  对  $M_3$  的中间像  $S''_1$  和对  $M_1$  所成的像  $S'_1$  以及光线  $a$  在  $M_1$ 、 $M_3$  的反射点  $F$  和  $G$ 。由物像的对称性可知  $\overline{GS_1} = \overline{GS''_1}$ ， $\overline{FS'_1} = \overline{FS''_1}$ ，故

$$\overline{FS'_1} = \overline{FG} + \overline{GS_1}$$

即从光线  $a$  上一点到  $S'_1$  和到  $S_1$  的光程相等。同理可证，从光线  $b$  上一点到  $S'_1$  和到  $S_1$  的光程相等；对  $M_2$ 、 $M_4$ （未画出）而言，从光线  $a'$  上一点到  $S'_2$  和到  $S_2$  的光程相等；从光线  $b'$  上一点到  $S'_2$  和到  $S_2$  的光程相等。从分析可知， $S'_1$  为  $S_1$  经  $M_3$ 、 $M_1$  反射的等效像点， $S'_2$  为  $S_2$  经  $M_4$ 、 $M_2$  反射的等效像点，从而可将测星干涉看作是经双孔  $S'_1$ 、 $S'_2$  的等效杨氏双缝干涉，其缝距为

$$\overline{S'_1 S'_2} = h \quad (2)$$

由小到大调节反射镜  $M_1$ 、 $M_2$  之间的距离（也就是  $S'_1$ 、 $S'_2$  之间的距离） $h$ ，直到屏幕上的干涉条纹消失，即各处强度完全相等，这时只需将测得的  $h$  直接替换 (1) 式中的  $d$ ，可得计算星体角直径的公式

$$\theta = \frac{\bar{\lambda}}{h} \quad (3)$$

得到与前两种解法相同的结果。

## 七、参考解答：

根据题意， ${}^7\text{Be}$  核和 K 层电子的动量都为零，在第一个反应中，若用  $\bar{p}_{\text{Li}^*}$  表示激发态锂核 ( ${}^7\text{Li}^*$ ) 的

动量， $\vec{p}_\eta$  表示中微子  $\eta$  的动量，则由动量守恒定律有

$$\vec{p}_{\text{Li}^*} + \vec{p}_\eta = 0 \quad (1)$$

即激发态锂核的动量与中微子的动量大小相等，方向相反。在第二个反应中，若用  $\vec{p}_{\text{Li}}$  表示反冲锂核  ${}^7\text{Li}$  的动量， $\vec{p}_\gamma$  表示光子的动量，则由动量守恒定律有

$$\vec{p}_{\text{Li}^*} = \vec{p}_{\text{Li}} + \vec{p}_\gamma \quad (2)$$

由 (1)、(2) 式得

$$\vec{p}_{\text{Li}} = -(\vec{p}_\gamma + \vec{p}_\eta) \quad (3)$$

当锂核的反冲动量  $p_{\text{Li}}$  最大时，其反冲能量也最大。由 (3) 式可知，当中微子的动量与  $\gamma$  光子的动量同方向时，锂核的反冲动量最大。注意到  $\gamma$  光子的动量

$$p_\gamma = \frac{h\nu}{c} \quad (4)$$

有

$$p_{\text{Li}} = p_\eta + \frac{h\nu}{c} \quad (5)$$

由于锂核的反冲能量比锂核的静能小得多，锂核的动能与其动量的关系不必用相对论关系表示，这时有

$$E_{\text{R}} = \frac{p_{\text{Li}}^2}{2m_{\text{Li}}} \quad (6)$$

由 (5)、(6) 式得

$$p_\eta c = \sqrt{2m_{\text{Li}}c^2 E_{\text{R}}} - h\nu \quad (7)$$

代入有关数据得

$$p_\eta = 0.38\text{MeV}/c \quad (8)$$

用  $E_\eta$  表示中微子的能量，根据相对论有

$$E_\eta = \sqrt{m_\eta^2 c^4 + p_\eta^2 c^2} \quad (9)$$

根据能量守恒定律有

$$m_{\text{Be}}c^2 + m_e c^2 = m_{\text{Li}}c^2 + E_{\text{R}} + h\nu + E_\eta \quad (10)$$

由 (9)、(10) 式得

$$m_\eta c^2 = \left[ (m_{\text{Be}}c^2 + m_e c^2 - m_{\text{Li}}c^2 - E_{\text{R}} - h\nu)^2 - p_\eta^2 c^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

由 (8) 式和已知数据得

$$m_\eta \approx 0.00\text{MeV}/c^2 \quad (12)$$

由 (12) 式可知，所算出的中微子静止质量的数值在题给数据的误差范围之内，故不能确定中微子的静止质量。如果有，其质量一定小于  $0.1\text{MeV}/c^2$ 。