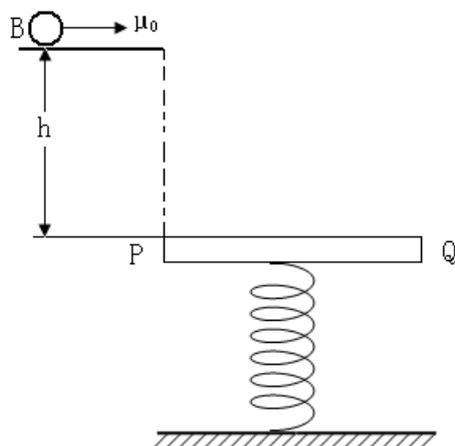


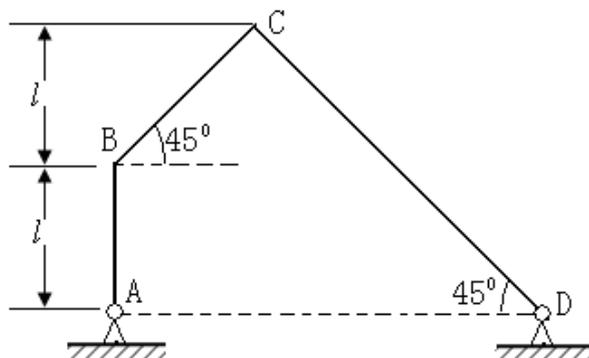
第 24 届全国中学生物理竞赛复赛试卷

(本题共七大题, 满分 160 分)

一、(20 分) 如图所示, 一块长为 $L = 1.00m$ 的光滑平板 PQ 固定在轻质弹簧上端, 弹簧的下端与地面固定连接。平板被限制在两条竖直光滑的平行导轨之间 (图中未画出竖直导轨), 从而只能地竖直方向运动。平板与弹簧构成的振动系统的振动周期 $T = 2.00s$ 。一小球 B 放在光滑的水平台面上, 台面的右侧边缘正好在平板 P 端的正上方, 到 P 端的距离为 $h = 9.80m$ 。平板静止在其平衡位置。水球 B 与平板 PQ 的质量相等。现给小球一水平向右的速度 μ_0 , 使它从水平台面抛出。已知小球 B 与平板发生弹性碰撞, 碰撞时间极短, 且碰撞过程中重力可以忽略不计。要使小球与平板 PQ 发生一次碰撞而且只发生一次碰撞, μ_0 的值应在什么范围内? 取 $g = 9.8m/s^2$

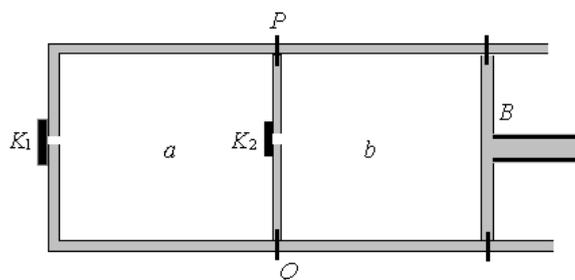


二、(25 分) 图中所示为用三角形刚性细杆 AB、BC、CD 连成的平面连杆结构图。AB 和 CD 杆可分别绕过 A、D 的垂直于纸面的固定轴转动, A、D 两点位于同一水平线上。BC 杆的两端分别与 AB 杆和 CD 杆相连, 可绕连接处转动 (类似铰链)。当 AB 杆绕 A 轴以恒定的角速度 ω 转到图中所示的位置时, AB 杆处于竖直位置。BC 杆与 CD 杆都与水平方向成 45° 角, 已知 AB 杆的长度为 l , BC 杆和 CD 杆的长度由图给定。求此时 C 点加速度 a_c 的大小和方向 (用与 CD 杆之间的夹角表示)



三、(20 分) 如图所示, 一容器左侧装有活门 K_1 , 右侧装有活塞 B, 一厚度可以忽略的隔板

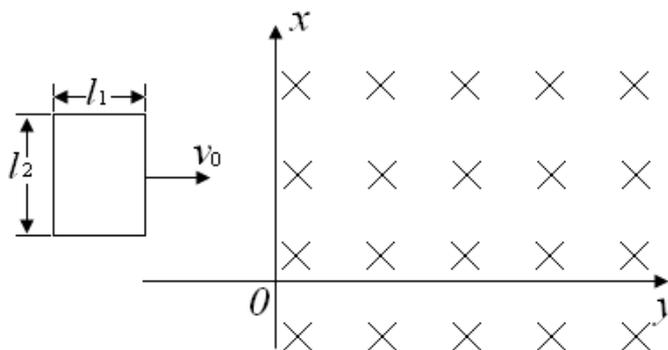
M 将容器隔成 a、b 两室，M 上装有活门 K_2 。容器、隔板、活塞及活门都是绝热的。隔板和活塞可用销钉固定，拔掉销钉即可在容器内左右平移，移动时不受摩擦作用且不漏气。整个容器置于压强为 P_0 、温度为 T_0 的大气中。初始时将活塞 B 用销钉固定在图示的位置，隔板 M 固定在容器 PQ 处，使 a、b 两室体积都等于 V_0 ； K_1 、 K_2 关闭。此时，b 室真空，a 室装有一定量的空气（容器内外气体种类相同，且均可视为理想气体），其压强为 $4P_0/5$ ，温度为 T_0 。已知 1mol 空气温度升高 1K 时内能的增量为 C_v ，普适气体常量为 R。



1. 现在打开 K_1 ，待容器内外压强相等时迅速关闭 K_1 （假定此过程中处在容器内的气体与处在容器外的气体之间无热量交换），求达到平衡时，a 室中气体的温度。

2. 接着打开 K_2 ，待 a、b 两室中气体达到平衡后，关闭 K_2 。拔掉所有销钉，缓慢推动活塞 B 直至到过容器的 PQ 位置。求在推动活塞过程中，隔板对 a 室气体所作的功。已知在推动活塞过程中，气体的压强 P 与体积 V 之间的关系为 $PV^{\frac{C_v+R}{C_v}} = \text{恒量}$ 。

四、（25 分）图中 oxy 是位于水平光滑桌面上的直角坐标系，在 $x > 0$ 的一侧，存在匀强磁场，磁场方向垂直于 oxy 平面向里，磁感应强度的大小为 B。在 $x < 0$ 的一侧，一边长分别为 l_1 和 l_2 的刚性矩形超导导线框位于桌面上，框内无电流，框的一对边与 x 轴平行。线框的质量为 m，自感为 L。现让超导导线框沿 x 轴方向以初速度 v_0 进入磁场区域，试定量地讨论线框以后可能发生的运动情况及与初速度 v_0 大小的关系。（假定线框在运动过程中始终保持超导状态）



五、（25 分）地球赤道表面附近处的重力加速度为 $g_0 = 9.8 \text{ m/s}^2$ ，磁场的磁感应强度的

大小 $B_0 = 3.0 \times 10^{-5} T$, 方向沿经线向北。赤道上空的磁感应强度的大小与 r^3 成反比 (r 为考察点到地心的距离), 方向与赤道附近的磁场方向平行。假设在赤道上空离地心的距离 $r = 5R_e$ (R_e 为地球半径) 处, 存在厚度为 10km 的由等数量的质子和电子的等离子层 (层内磁场可视为匀强磁场), 每种粒子的数密度非常低, 带电粒子的相互作用可以忽略不计。已知电子的质量 $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{kg}$, 质子的质量 $m_p = 1.7 \times 10^{-27} \text{kg}$, 电子电荷量为 $-1.6 \times 10^{-19} C$, 地球的半径 $R_e = 6.4 \times 10^6 \text{m}$ 。

1. 所考察的等离子层中的电子和质子一方面作无规则运动, 另一方面因受地球引力和磁场的共同作用会形成位于赤道平面内的绕地心的环行电流, 试求此环行电流的电流密度。

2. 现设想等离子层中所有电子和质子, 它们初速度的方向都指向地心, 电子初速度的大小 $u_e = 1.4 \times 10^4 \text{m/s}$, 质子初速度的大小 $u_p = 3.4 \times 10^2 \text{m/s}$ 。试通过计算说明这些电子和质子都不可能到到达地球表面。

六、(25分) 图 1 所示为杨氏双缝干涉实验的示意图, 取纸面为 yz 平面。 y 、 z 轴的方向如图所示。线光源 S 通过 z 轴, 双缝 S_1 、 S_2 对称分布在 z 轴两侧, 它们以及屏 P 都垂直于纸面。双缝间的距离为 d , 光源 S 到双缝的距离为 l , 双缝到屏的距离为 D , $d \ll D$, $d \ll l$ 。

1. 从 z 轴上的线光源 S 出发经 S_1 、 S_2 不同路径到 P_0 点的光程差为零, 相干的结果产生一亮纹, 称为零级亮纹。为了研究有一定宽度的扩展光源对于干涉条纹清晰度的影响, 我们先研究位于轴外的线光源 S' 形成的另一套干涉条纹, S' 位于垂直于 z 轴的方向上且与 S 平行, 两者相距 δ_y , 则由线光源 S' 出发分别经 S_1 、 S_2 产生的零级亮纹 P'_0 , P'_0 与 P_0 的距离

$$\delta_y = \underline{\hspace{10em}}$$

2. 当光源宽度为 ω 的扩展光源时, 可将扩展光源看作由一系列连续的、彼此独立的、非相干的线光源组成。这样, 各线光源对应的干涉条纹将彼此错开, 在屏上看到的将是这些干涉条纹的光强相加的结果, 干涉条纹图像将趋于模糊, 条纹的清晰度下降。假设扩展光源各处发出的光强相同、波长皆为 λ 。当 ω 增大导致零级亮纹的亮暗将完全不可分辨, 则此时光源的宽度 $\omega = \underline{\hspace{10em}}$

3. 在天文观测中, 可用上述干涉原理来测量星体的微小角直径。遥远星体上每一点发出的光到达地球处都可视为平行光, 从星体相对的两边缘点发来的两组平行光之间的夹角 θ 就是星体的角直径。遥远星体的角直径很小, 为测量如些微小的角直径, 迈克尔逊设计了测量干涉仪, 其装置简化为图 2 所示。 M_1 、 M_2 、 M_3 、 M_4 是四个平面反射镜, 它们两两平行, 对称放置, 与入射光 (a 、 a') 方向成 45° 角。 S_1 和 S_2 是一对小孔, 它们之间的距离是 d 。 M_1 和 M_2 可以同步对称调节来改变其中心间的距离 h 。双孔屏到观察屏之间的距离是 D 。 a 、 a' 和 b 、 b' 分别是星体上相对着的两边缘点发来的平行光束。设光线 a 、 a' 垂直双孔屏和像屏, 星光的波长是 $\bar{\lambda}$, 试导出星体上角直径 θ 的计算式。

注: 将星体作圆形扩展光源处理时, 研究扩展光源的线度对于干涉条纹图像清晰度的影响会遇到数学困难, 为简化讨论, 本题拟将扩展光源作宽度为 ω 的矩形光源处理。

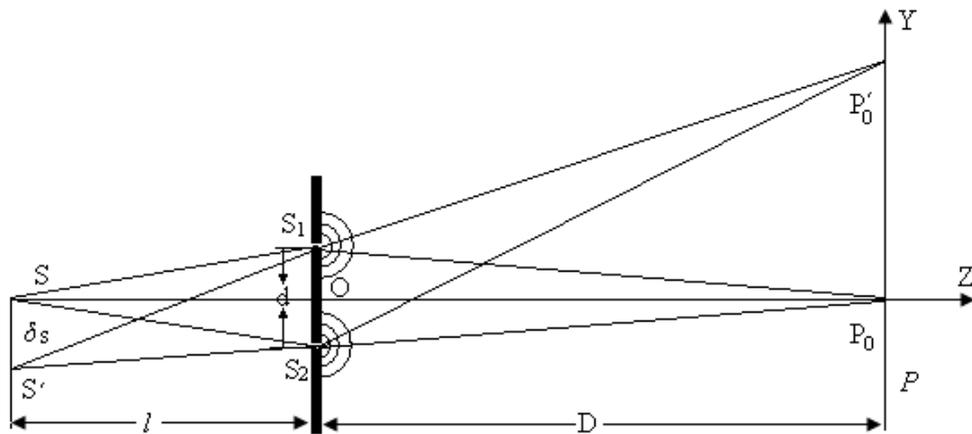


图 1

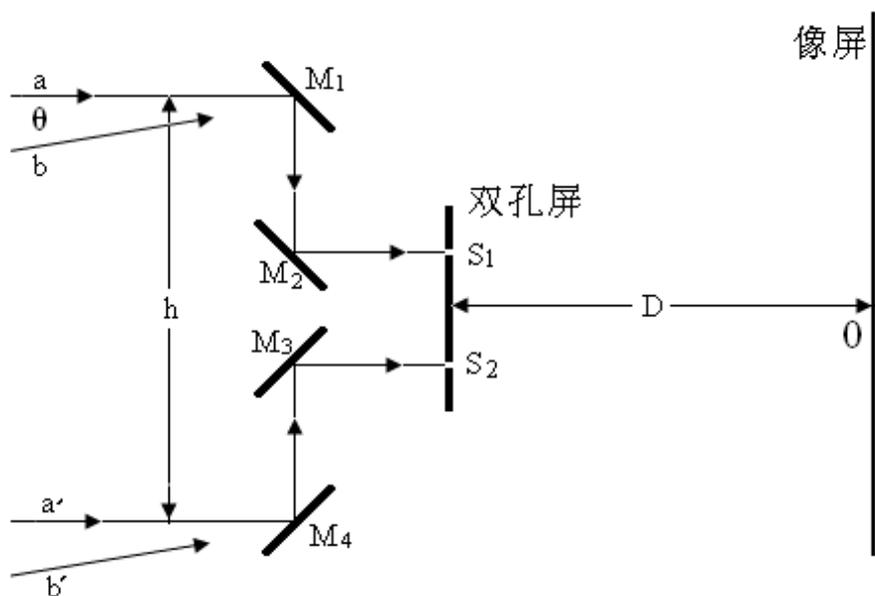
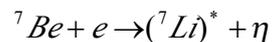
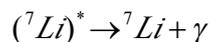


图 2

七、(20 分) 今年是我国著名物理学家、曾任浙江大学物理系主任的王淦昌先生诞生一百周年。王先生早在 1941 年就发表论文，提出了一种探测中微子的方案： ${}^7\text{Be}$ 原子核可以俘获原子的 K 层电子而成为 ${}^7\text{Li}$ 的激发态 $({}^7\text{Li})^*$ ，并放出中微子（当时写作 η ）



而 $({}^7\text{Li})^*$ 又可以放出光子 γ 而回到基态 ${}^7\text{Li}$



由于中微子本身很难直接观测，能对上述过程相关物理量的测量，就可以确定中微子的存在，1942 年起，美国物理学家艾伦 (R. Davis) 等人根据王淦昌方案先后进行了实验，初步证实了中微子的存在。1953 年美国物理学家莱因斯 (F. Reines) 在实验中首次发现了中微子，莱因斯与发现轻子的美国物理学家佩尔 (M. L. Perl) 分享了 1995 年诺贝尔物理学奖。

现用王淦昌的方案来估算中微子的质量和动量。若实验中测得锂核 (${}^7\text{Li}$) 反冲能量 (即 ${}^7\text{Li}$ 的动能) 的最大值 $E_R = 56.6\text{eV}$, γ 光子的能量 $h\gamma = 0.48\text{Mev}$ 。已知有关原子核和电子静止能量的数据为 $m_{\text{Li}}c^2 = 6533.84\text{Mev}$; $m_{\text{Be}}c^2 = 6534.19\text{Mev}$; $m_e c^2 = 0.51\text{Mev}$ 。设在第一个过程中, ${}^7\text{Be}$ 核是静止的, K 层电子的动能也可忽略不计。试由以上数据, 算出的中微子的动能 P_η 和静止质量 m_η 各为多少?

参考解答

一、参考解答：

如果小球的水平速度比较大，它与平板的第一次碰撞正好发生在平板的边缘 Q 处，这时 u_0 的值便是满足题中条件的最大值；如果小球的水平速度 u_0 较小，在它于平板发生第一次碰撞后再次接近平板时，刚好从平板的边缘 Q 处越过而不与平板接触，这时 u_0 的值便是满足题中条件的最小值。

设小球从台面水平抛出到与平板发生第一次碰撞经历的时间为 t_1 ，有

$$h = \frac{1}{2} g t_1^2 \quad (1)$$

若碰撞正好发生在 Q 处，则有

$$L = u_0 t_1 \quad (2)$$

从 (1)、(2) 两式解得的 u_0 值便是满足题中条件的最大值，即

$$u_{0\max} = L \sqrt{\frac{g}{2h}} \quad (3)$$

代入有关数据得

$$u_{0\max} = 0.71 \text{m/s} \quad (4)$$

如果 $u_0 < u_{0\max}$ ，小球与平板的碰撞处将不在 Q 点。设小球第一次刚要与平板碰撞时在竖直方向的速度为 v_1 ，则有

$$v_1 = \sqrt{2gh} \quad (5)$$

以 v_1' 、 V_1' 分别表示碰撞结束时刻小球和平板沿竖直方向的速度，由于碰撞时间极短，在碰撞过程中，小球和平板在竖直方向的动量守恒。设小球和平板的质量都是 m ，则有

$$m v_1 = m v_1' + m V_1' \quad (6)$$

因为碰撞是弹性的，且平板是光滑的，由能量守恒可得

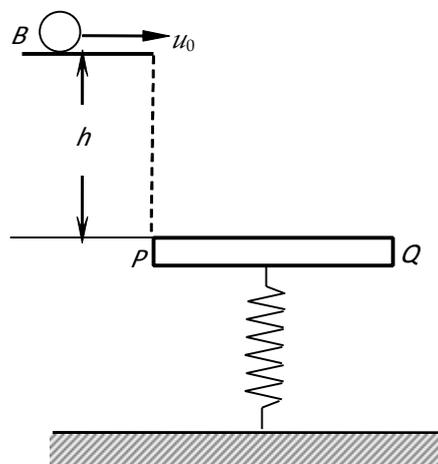
$$\frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m u_0^2 = \frac{1}{2} m v_1'^2 + \frac{1}{2} m V_1'^2 + \frac{1}{2} m u_0^2 \quad (7)$$

解 (6)、(7) 两式，得

$$v_1' = 0 \quad (8)$$

$$V_1' = v_1 = \sqrt{2gh} \quad (9)$$

碰撞后，平板从其平衡位置以 V_1' 为初速度开始作简谐振动。取固定坐标，其原点 O 与平板处于平衡位置时板的上表面中点重合， x 轴的方向竖直向下，若以小球和平板发生碰撞的时刻作



为 $t=0$ ，则平板在 t 时刻离开平衡位置的位移

$$x_{PQ} = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (10)$$

式中

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (11)$$

A 和 φ 是两个待定的常量，利用参考圆方法，在 t 时刻平板振动的速度

$$v_{PQ} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi) \quad (12)$$

因 $t=0$ 时， $x_{PQ} = 0$ ， $v_{PQ} = V'$ ，由 (9)、(11)、(12) 式可求得

$$A = \frac{\sqrt{2gh}}{2\pi} T \quad (13)$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} \quad (14)$$

把 (13)、(14) 式代入 (10) 式，得

$$x_{PQ} = \frac{\sqrt{2gh}}{2\pi} T \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (15)$$

碰撞后，小球开始作平抛运动。如果第一次碰撞后，小球再经过时间 t_2 与平板发生第二次碰撞且发生在 Q 处，则在发生第二次碰撞时，小球的 x 坐标为

$$x_B(t_2) = \frac{1}{2}gt_2^2 \quad (16)$$

平板的 x 坐标为

$$x_{PQ}(t_2) = \frac{\sqrt{2gh}}{2\pi} T \cos\left(\frac{2\pi}{T}t_2 - \frac{\pi}{2}\right) \quad (17)$$

在碰撞时，有

$$x_B(t_2) = x_{PQ}(t_2) \quad (18)$$

由 (16)、(17)、(18) 式，代入有关数据得

$$4.90t_2^2 = 4.41 \cos\left(\pi t_2 - \frac{\pi}{2}\right) \quad (19)$$

这便是 t_2 满足的方程式，通过数值计算法求解方程可得（参见数值列表）

$$t_2 = 0.771\text{s} \quad (20)$$

如果第二次碰撞正好发生在平板的边缘 Q 处，则有

$$L = u_0(t_1 + t_2) \quad (21)$$

由 (1)、(20) 和 (21) 式得

$$u_0 = \frac{L}{t_1 + t_2} = 0.46 \text{m/s} \quad (22)$$

而满足题中要求的 u_0 的最小值应大于 (22) 式给出的值. 综合以上讨论, u_0 的取值范围是

$$0.46 \text{m/s} < u_0 \leq 0.71 \text{m/s} \quad (23)$$

附: (19) 式的数值求解

用数值解法则要代入 t_2 不同数值, 逐步逼近所求值, 列表如下:

t_2	0.730	0.750	0.760	0.765	0.770	0.771	0.772	0.775	0.780	0.790	0.810
$x_{PQ} = 4.41 \cos\left(\pi t_2 - \frac{\pi}{2}\right)$	3.31	3.12	3.02	2.96	2.91	2.91	2.90	2.86	2.81	2.70	2.48
$x_B = 4.90 t_2^2$	2.61	2.76	2.83	2.87	2.91	2.91	2.91	2.94	2.98	3.06	3.21
$x_{PQ} - x_B$	0.70	0.36	0.19	0.09	0	0	-0.01	-0.08	-0.17	-0.36	-0.73

二、参考解答:

解法一

因为 B 点绕 A 轴作圆周运动, 其速度的大小为

$$v_B = \omega l \quad (1)$$

B 点的向心加速度的大小为

$$a_B = \omega^2 l \quad (2)$$

因为是匀角速转动, B 点的切向加速度为 0, 故 a_B 也是 B 点的加速度, 其方向沿 BA 方向. 因为 C 点绕 D 轴作圆周运动, 其速度的大小用 v_C 表示, 方向垂直于杆 CD , 在考察的时刻, 由图可知, 其方向沿杆 BC 方向. 因 BC 是刚性杆, 所以 B 点和 C 点沿 BC 方向的速度必相等, 故有

$$v_C = v_B \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \omega l \quad (3)$$

此时杆 CD 绕 D 轴按顺时针方向转动, C 点的法向加速度

$$a_{Cn} = \frac{v_C^2}{CD} \quad (4)$$

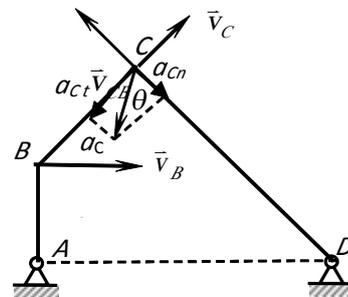
由图可知 $\overline{CD} = 2\sqrt{2}l$, 由 (3)、(4) 式得

$$a_{Cn} = \frac{\sqrt{2}}{8} \omega^2 l \quad (5)$$

其方向沿 CD 方向.

下面来分析 C 点沿垂直于杆 CD 方向的加速度, 即切向加速度 a_{Ct} . 因为 BC 是刚性杆, 所以 C 点相对 B 点的运动只能是绕 B 的转动, C 点相对 B 点的速度方向必垂直于杆 BC . 令 v_{CB} 表示其速度的大小, 根据速度合成公式有

$$\vec{v}_{CB} = \vec{v}_C - \vec{v}_B$$



由几何关系得

$$v_{CB} = \sqrt{v_B^2 - v_C^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} v_B = \frac{\sqrt{2}}{2} \omega l \quad (6)$$

由于 C 点绕 B 作圆周运动, 相对 B 的向心加速度

$$a_{CB} = \frac{v_{CB}^2}{CB} \quad (7)$$

因为 $\overline{CB} = \sqrt{2}l$, 故有

$$a_{CB} = \frac{\sqrt{2}}{4} \omega^2 l \quad (8)$$

其方向垂直杆 CD .

由 (2) 式及图可知, B 点的加速度沿 BC 杆的分量为

$$(a_B)_{BC} = a_B \cos \frac{\pi}{4} \quad (9)$$

所以 C 点相对 A 点 (或 D 点) 的加速度沿垂直于杆 CD 方向的分量

$$a_{Ct} = a_{CB} + (a_B)_{BC} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \omega^2 l \quad (10)$$

C 点的总加速度为 C 点绕 D 点作圆周运动的法向加速度 a_{Cn} 与切向加速度 a_{Ct} 的合加速度, 即

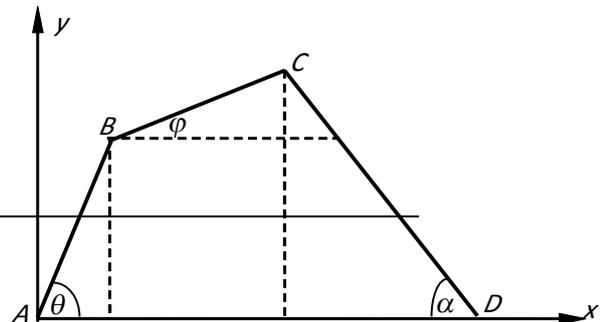
$$a_C = \sqrt{a_{Cn}^2 + a_{Ct}^2} = \frac{\sqrt{74}}{8} \omega^2 l \quad (11)$$

a_C 的方向与杆 CD 间的夹角

$$\theta = \arctan \frac{a_{Ct}}{a_{Cn}} = \arctan 6 = 80.54^\circ \quad (12)$$

解法二: 通过微商求 C 点加速度

以固定点 A 为原点作一直角坐标系 Axy , Ax 轴与 AD 重合, Ay 与 AD 垂直. 任意时刻 t , 连杆的位形如图所示,



此时各杆的位置分别用 θ , φ 和 α 表示, 且已知 $AB=l$, $BC=\sqrt{2}l$, $CD=2\sqrt{2}l$, $AD=3l$,

$\frac{d\theta}{dt} = -\omega$, C 点坐标表示为

$$x_C = l\cos\theta + \sqrt{2}l\cos\varphi \quad (1)$$

$$y_C = l\sin\theta + \sqrt{2}l\sin\varphi \quad (2)$$

将 (1)、(2) 式对时间 t 求一阶微商, 得

$$\frac{dx_C}{dt} = -l\left(\sin\theta\frac{d\theta}{dt} + \sqrt{2}\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}\right) \quad (3)$$

$$\frac{dy_C}{dt} = l\left(\cos\theta\frac{d\theta}{dt} + \sqrt{2}\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}\right) \quad (4)$$

把 (3)、(4) 式对时间 t 求一阶微商, 得

$$\frac{d^2x_C}{dt^2} = -l\left[\cos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2} + \sqrt{2}\cos\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \sqrt{2}\sin\varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right] \quad (5)$$

$$\frac{d^2y_C}{dt^2} = l\left[-\sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2} - \sqrt{2}\sin\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \sqrt{2}\cos\varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right] \quad (6)$$

根据几何关系, 有

$$CD\sin\alpha = AB\sin\theta + BC\sin\varphi$$

$$CD\cos\alpha + AB\cos\theta + BC\cos\varphi = 3l$$

即

$$2\sqrt{2}\sin\alpha = \sin\theta + \sqrt{2}\sin\varphi \quad (7)$$

$$2\sqrt{2}\cos\alpha = 3 - \cos\theta - \sqrt{2}\cos\varphi \quad (8)$$

将 (7)、(8) 式平方后相加且化简, 得

$$\sqrt{2}\sin\theta\sin\varphi + \sqrt{2}\cos\theta\cos\varphi - 3\cos\theta - 3\sqrt{2}\cos\varphi - 2 = 0 \quad (9)$$

对 (9) 式对时间 t 求一阶微商, 代入 $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\frac{d\theta}{dt} = -\omega$, 得

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2}\omega \quad (10)$$

对 (9) 式对时间 t 求二阶微商, 并代入上述数据, 得

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{3}{8}\omega^2 \quad (11)$$

将 (10)、(11) 式以及 θ , φ , $\frac{d\theta}{dt}$ 的数值代入 (5)、(6) 式, 得

$$\frac{d^2x_C}{dt^2} = -\frac{5}{8}l\omega^2$$

$$\frac{d^2y_C}{dt^2} = -\frac{7}{8}l\omega^2$$

所以

$$a_c = \sqrt{\left(\frac{d^2 x_c}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 y_c}{dt^2}\right)^2} = \frac{\sqrt{74}}{8} \omega^2 \quad (12)$$

由图知, a_c 与 x 轴的夹角为 β

$$\tan \beta = \left(\frac{d^2 y_c}{dt^2}\right) / \left(\frac{d^2 x_c}{dt^2}\right) = 1.4 \quad (13)$$

所以求得

$$\beta = \arctan 1.4 = 54.46^\circ$$

这个夹角在第三象限, 为 234.46° , 故 a_c 与 CD 的夹角

$$\gamma = 80.54^\circ \quad (14)$$

三、参考解答:

1. 设 a 室中原有气体为 ν mol, 打开 K_1 后, 有一部分空气进入 a 室, 直到 K_1 关闭时, a 室中气体增加到 ν' mol, 设 a 室中增加的 $(\nu' - \nu)$ mol 气体在进入容器前的体积为 ΔV , 气体进入 a 室的过程中, 大气对这部分气体所作的功为

$$A = p_0 \Delta V \quad (1)$$

用 T 表示 K_1 关闭后 a 室中气体达到平衡时的温度, 则 a 室中气体内能增加量为

$$\Delta U = \nu' C_V (T - T_0) \quad (2)$$

由热力学第一定律可知

$$\Delta U = A \quad (3)$$

由理想气体状态方程, 有

$$\frac{4}{5} p_0 V_0 = \nu R T_0 \quad (4)$$

$$p_0 \Delta V = (\nu' - \nu) R T_0 \quad (5)$$

$$p_0 V_0 = \nu' R T \quad (6)$$

由以上各式解出

$$T = \frac{5(C_V + R)}{5C_V + 4R} T_0 \quad (7)$$

2. K_2 打开后, a 室中的气体向 b 室自由膨胀, 因系统绝热又无外界做功, 气体内能不变, 所以温度不变 (仍为 T), 而体积增大为原来的 2 倍. 由状态方程知, 气体压强变为

$$p = \frac{1}{2} p_0 \quad (8)$$

关闭 K_2 , 两室中的气体状态相同, 即

$$p_a = p_b = p, \quad T_a = T_b = T, \quad V_a = V_b = V_0, \quad \text{且 } v_a = v_b = \frac{1}{2}v' \quad (9)$$

拔掉销钉后，缓慢推动活塞 B，压缩气体的过程为绝热过程，达到最终状态时，设两室气体的压强、体积和温度分别为 p'_a 、 p'_b 、 V'_a 、 V'_b 、 T'_a 、 T'_b ，则有

$$p_a V_a^{\frac{C_V+R}{C_V}} = p'_a V_a'^{\frac{C_V+R}{C_V}} \quad (10)$$

$$p_b V_b^{\frac{C_V+R}{C_V}} = p'_b V_b'^{\frac{C_V+R}{C_V}} \quad (11)$$

由于隔板与容器内壁无摩擦，故有

$$p'_a = p'_b \quad (12)$$

由理想气体状态方程，则有

$$p'_a V'_a = \nu_a R T'_a \quad (13)$$

$$p'_b V'_b = \nu_b R T'_b \quad (14)$$

因

$$V'_a + V'_b = V_0 \quad (15)$$

由 (8)~(15) 式可得

$$V'_a = V'_b = \frac{1}{2}V_0 \quad (16)$$

$$T'_a = T'_b = 2^{\frac{R}{C_V}} T \quad (17)$$

在推动活塞压缩气体这一绝热过程中，隔板对 a 室气体作的功 W 等于 a 室中气体内能的增加，即

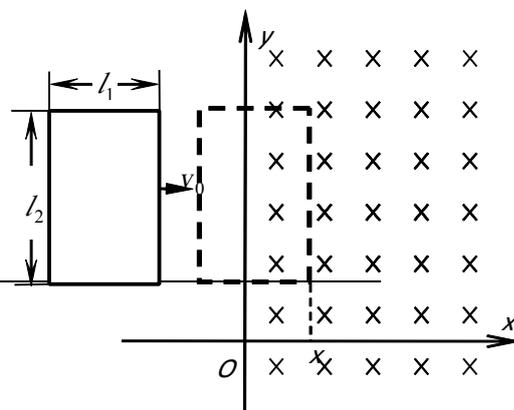
$$W = \frac{1}{2} \nu' C_V (T'_a - T) \quad (18)$$

由 (6)、(17) 和 (18) 式得

$$W = \frac{C_V}{2R} \left(2^{\frac{R}{C_V}} - 1 \right) p_0 V_0 \quad (19)$$

四、参考解答：

设某一时刻线框在磁场区域的深度为 x ($x \leq l_1$)，速度为 v ，因线框的一条边切割磁感应线产生的感应电动势为 $\mathcal{E} = vBl_2$ ，它在线框中引起感应电流，感应电流的变化又



引起自感电动势。设线框的电动势和电流的正方向均为顺时针方向，则切割磁感应线产生的电动势 \mathcal{E}_v 与设定的正方向相反，自感电动势 $\mathcal{E}_L = -L \frac{\Delta i}{\Delta t}$ 与设定的正方向相同。因线框处于超导状态，电阻 $R=0$ ，故有

$$\mathcal{E}_L - \mathcal{E}_v = -L \frac{\Delta i}{\Delta t} - vBl_2 = iR = 0$$

(1)

即

$$L \frac{\Delta i}{\Delta t} + Bl_2 \frac{\Delta x}{\Delta t} = 0 \quad (2)$$

或

$$Bl_2 \Delta x = -L \Delta i \quad (3)$$

即

$$\frac{\Delta i}{\Delta x} = -\frac{Bl_2}{L} \quad (4)$$

可见 i 与 x 成线性关系，有

$$i = -\frac{Bl_2}{L} x + C \quad (5)$$

C 为一待定常数，注意到 $x=0$ 时， $i=0$ ，可得 $C=0$ ，故有

$$i = -\frac{Bl_2}{L} x \quad (6)$$

$x>0$ 时 $i<0$ ，电流为负值表示线框中电流的方向与设定的正方向相反，即在线框进入磁场区域时右侧边的电流实际流向是向上的。外磁场作用于线框的安培力

$$f = Bl_2 i = -\frac{B^2 l_2^2}{L} x \quad (7)$$

其大小与线框位移 x 成正比，方向与位移 x 相反，具有“弹性力”的性质。下面分两种情形做进一步分析：

(i) 线框的初速度 v_0 较小，在安培力的作用下，当它的速度减为 0 时，整个线框未全部进入磁场区，这时在安培力的继续作用下，线框将反向运动，最后退出磁场区。线框一进一出的运动是一个简谐振动的半个周期内的运动，振动的圆频率

$$\omega = \sqrt{\frac{B^2 l_2^2}{Lm}} \quad (8)$$

周期

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Lm}{B^2 l_2^2}} \quad (9)$$

振动的振幅可由能量关系求得，令 x_m 表示线框速度减为 0 时进入磁场区的深度，这时线框的初始动能全部转换为“弹性力”的“弹性势能”，由能量守恒可得

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{B^2 l_2^2}{L}\right)x_m^2 \quad (10)$$

得

$$x_m = \sqrt{\frac{Lmv_0^2}{B^2 l_2^2}} \quad (11)$$

故其运动方程为

$$x = \frac{v_0 \sqrt{Lm}}{Bl_2} \sin\left(\frac{Bl_2}{\sqrt{Lm}}t\right), \quad t \text{ 从 } 0 \text{ 到 } \pi \frac{\sqrt{Lm}}{Bl_2} \quad (12)$$

半个周期后，线框退出磁场区，将以速度 v_0 向左匀速运动。因为在这种情况下 x_m 的最大值是 l_1 ，即

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}\frac{B^2 l_2^2}{L}l_1^2 \quad (13)$$

由此可知，发生第 (i) 种情况时， v_0 的值要满足下式

$$\frac{1}{2}mv_0^2 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{B^2 l_2^2}{L}\right)l_1^2$$

$$\text{即 } v_0 \leq \frac{Bl_1 l_2}{\sqrt{mL}} \quad (14)$$

(ii) 若线框的初速度 v_0 比较大，整个线框能全部进入磁场区。当线框刚进入磁场区时，其速度仍大于 0，这要求 v_0 满足下式

$$v_0 > \frac{Bl_2 l_1}{\sqrt{mL}} \quad (15)$$

当线框的初速度满足 (15) 式时，线框能全部进入磁场区，在全部进入磁场区域以前，线框的运动方程与 (12) 式相同，但位移区间是 $x=0$ 到 $x=l_1$ ，所以时间间隔与 (12) 式不同，而是从 0 到

$$t_1 = \frac{\sqrt{Lm}}{Bl_2} \left[\arcsin \frac{Bl_1 l_2}{\sqrt{Lmv_0^2}} \right] \quad (16)$$

因为线框的总电动势总是为 0，所以一旦线框全部进入磁场区域，线框的两条边都切割磁感应线，所产生的电动势之和为 0，因而自感电动势也为 0。此后线框中维持有最大的电流 $i_m = -\frac{Bl_2}{L}l_1$ ，磁场对线框两条边的安培力的合力等于零，线框将在磁场区域匀速前进，运动的速度可由下式决定

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2 l_2^2}{L} l_1^2$$

即

$$v = \sqrt{v_0^2 - \frac{B^2 l_1^2 l_2^2}{Lm}} \quad (17)$$

五、参考解答：

解法一：

1. 由于等离子层的厚度远小于地球的半径，故在所考察的等离子区域内的引力场和磁场都可视为匀强场. 在该区域内磁场的磁感应强度

$$B = \left(\frac{R_0}{r} \right)^3 B_0 = \frac{3.0 \times 10^{-5}}{125} \text{T} = 2.4 \times 10^{-7} \text{T}$$

(1)

引力加速度

$$g = \left(\frac{R_0}{r} \right)^2 g_0 = \frac{9.8}{25} \text{m/s}^2 = 0.39 \text{m/s}^2 \quad (2)$$

考察等离子层中的某一质量为 m 、电荷量为 q 、初速度为 u 的粒子，取粒子所在处为坐标原点 O ，作一直角坐标系 $Oxyz$ ， Ox 轴指向地球中心， Oz 沿磁场方向，如图 1 所示. 该粒子的初速度在坐标系中的三个分量分别为 u_x 、 u_y 和 u_z . 因作用于粒子的引力沿 x 轴正方向，作用于粒子的洛伦兹力与 z 轴垂直，故粒子在 z 轴方向不受力作用，沿 z 轴的分速度保持不变. 现设想在开始时刻，附加给粒子一沿 y 轴正方向大小为 v_0 的速度，同时附加给粒子一沿 y 轴负方向大小为 v_0 的速度，要求与其中一个 v_0 相联系的洛伦兹力正好与粒子所受的地球引力相平衡，即

$$qv_0B = mg$$

得

$$v_0 = \frac{mg}{qB}$$

(3)

用 v 表示 u_x 与沿 y 轴的速度 $u_y \pm v_0$ 的合速度（对质子取正号，对电子取负号），有

$$v = \sqrt{u_x^2 + (u_y \pm v_0)^2}$$

(4)

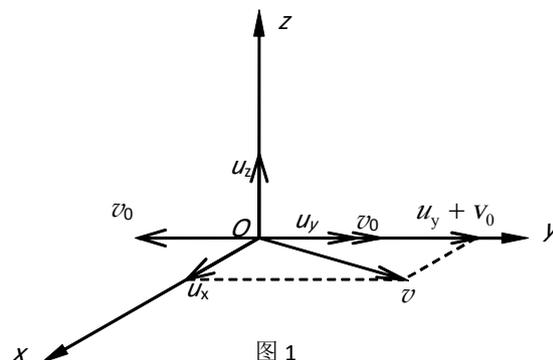


图 1

这样，所考察的粒子的速度可分为三部分：

沿 z 轴的分速度 u_z 。其大小和方向都保持不变，但对不同的粒子是不同的，属于等离子层中粒子的无规则运动的速度分量。

沿 y 轴的速度 v_0 。对带正电的粒子，速度的方向沿 y 轴的负方向，对带负电的粒子，速度的方向沿 y 轴的正方向。与这速度联系的洛伦兹力正好和引力抵消，故粒子将以速率 v_0 沿 y 轴运动。由 (3) 式可知， v_0 的大小是恒定的，与粒子的初速度无关，且对同种的粒子相同。

在 Oxy 平面内的速度 v 。与这速度联系的洛伦兹力使粒子在 Oxy 平面内作速率为 v 的匀速率圆周运动，若以 R 表示圆周的半径，则有

$$qvB = m \frac{v^2}{R}$$

得

$$R = \frac{mv}{qB} \quad (5)$$

由 (4)、(5) 式可知，轨道半径不仅与粒子的质量有关，而且与粒子的初速度的 x 分量 u_x 和 y 分量 u_y 有关。圆周运动的速度方向是随时间变化的，在圆周运动的一个周期内的平均速度等于 0。

由此可见，等离子层内电子和质子的运动虽然相当复杂，但每个粒子都具有由 (3) 式给出的速度 v_0 ，其方向垂直于粒子所在处的地球引力方向，对电子，方向向西，对质子，方向向东。电子、质子这种运动称为漂移运动，对应的速度称为漂移速度。漂移运动是粒子的定向运动，电子、质子的定向运动就形成了环绕地球中心的环形电流。

由 (3) 式和 (1)、(2) 两式以及有关数据可得电子和质子的漂移速度分别为

$$v_{0e} = 9.2 \times 10^{-6} \text{ m/s} \quad (6)$$

$$v_{0p} = 1.7 \times 10^{-2} \text{ m/s}$$

(7)

由于电子、质子漂移速度的方向相反，电荷异号，它们产生的电流方向相同，均为沿纬度向东。根据电流密度的定义有

$$j = nq(v_{0p} + v_{0e}) \quad (8)$$

代入有关数据得

$$j = 2.8 \times 10^{-14} \text{ A/m}^2 \quad (9)$$

电流密度的方向沿纬度向东。

2. 上一小节的讨论表明，粒子在 Oxy 平面内作圆周运动，运动的速率由 (4) 式给出，它与粒子的初速度有关。对初速度方向指向地心的粒子，圆周运动的速率为

$$v = \sqrt{u_x^2 + v_0^2} \quad (10)$$

由 (1)、(2)、(3)、(5)、(10) 各式并代入题给的有关数据可得电子、质子的轨道半

径分别为

$$R_e = 0.33\text{m} \quad (11)$$

$$R_p = 14.8\text{m} \quad (12)$$

以上的计算表明, 虽然粒子具有沿引力方向的初速度, 但由于粒子还受到磁场的作用, 电子和质子在地球半径方向的最大下降距离分别为 $2R_e = 0.66\text{m}$ 和 $2R_p = 29.6\text{m}$, 都远小于等离子层的厚度, 所考察的电子和质子仍在等离子层内运动, 不会落到地面上.

解法二:

1. 由于等离子层的厚度远小于地球半径, 故在所考察等离子区域内的引力场和磁场都可视为匀强场. 在该区域内磁场的磁感应强度

$$B = \left(\frac{R_0}{r}\right)^3 B_0 = \frac{3.0 \times 10^{-5}}{125} \text{T} = 2.4 \times 10^{-7} \text{T}$$

(1)

引力加速度

$$g = \left(\frac{R_0}{r}\right)^2 g_0 = \frac{9.8}{25} \text{m/s}^2 = 0.39 \text{m/s}^2 \quad (2)$$

考察等离子层中的某一质量为 m , 电荷量为 q , 初速度为 u 的粒子, 取粒子所在处为坐标原点 O , 作一直角坐标系 $Oxyz$, Ox 轴指向地球中心, Oz 沿磁场方向, 如图 1 所示. 该粒子的初速度在坐标系中的三个分量分别为 u_x , u_y 和 u_z . 若以 v_x , v_y , v_z 表示粒子在任意时刻 t 的速度 v 在 x 方向、 y 方向和 z 方向的分速度, 则带电粒子在引力和洛伦兹力的共同作用下的运动方程为

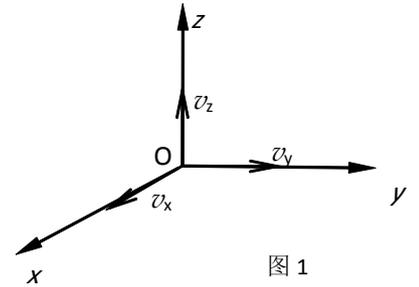


图 1

$$m \frac{dv_x}{dt} = mg + qv_y B = qB \left(v_y + \frac{mg}{qB} \right) \quad (3)$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = -qv_x B \quad (4)$$

$$m \frac{dv_z}{dt} = 0 \quad (5)$$

(5) 式表明, 所考察粒子的速度在 z 轴上的分量保持不变, 即

$$v_z = u_z \quad (6)$$

作变量代换, 令

$$V_x = v_x \quad V_y = v_y + v_0 \quad (7)$$

其中

$$v_0 = \frac{mg}{qB} \quad (8)$$

把 (7)、(8) 式代入 (3)、(4) 式得

$$m \frac{dV_x}{dt} = qBV_y \quad (9)$$

$$m \frac{dV_y}{dt} = -qV_x B \quad (10)$$

由 (9)、(10) 两式可知, 作用于粒子的力 F 在 x 和 y 方向的分量分别为

$$F_x = qBV_y$$

$$F_y = -qBV_x$$

若用 θ_1 表示 F 的方向与 x 轴的夹角, θ_2 表示 V 的方向与 x 轴的夹角, 而 $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$, 则有

$$\tan \theta_1 = \frac{F_y}{F_x} = -\frac{V_x}{V_y}$$

$$\tan \theta_2 = \frac{V_y}{V_x}$$

可见 $\tan \theta_1 \cdot \tan \theta_2 = -1$, 表明 F 的方向与 V 的方向垂直, 粒子将在 F 的作用下在 Oxy 平面内作速率为 V 的匀速圆周运动. 若以 R 表示圆周的半径, 则有

$$qVB = m \frac{V^2}{R}$$

$$R = \frac{mV}{qB} \quad (11)$$

在匀速圆周运动中, V 的大小是不变的, 任何时刻 V 的值也就是 $t=0$ 时刻 V 的值, 由 (7) 式和已知条件在 $t=0$ 时刻有

$$V_x = u_x \quad V_y = u_y + v_0$$

故有

$$V = \sqrt{u_x^2 + (u_y + v_0)^2} \quad (12)$$

以上讨论表明, 粒子的运动可分成三部分:

根据 (6) 式 $v_z = u_z$, 可知粒子沿 z 轴的分速度大小和方向都保持不变, 但对不同的粒子是不同的, 属于等离子层中粒子的无规则运动的速度分量.

根据 (7) 式可得 $v_x = V_x$, $v_y = V_y - v_0$, 表明粒子在 Oxy 平面内以速率 V 作圆周运动的同时, 又以速度 v_0 沿 y 轴运动. V_x 、 V_y 是圆周运动速度的 x 分量和 y 分量. 圆周运动的轨道半径不仅与粒子的质量有关, 而且与粒子的初速度的 x 分量 u_x 和 y 分量 u_y 有关. 圆周运动的

速度方向是随时间变化的，在圆周运动的一个周期内的平均速度等于 0。

沿 y 轴的速度 v_0 由 (8) 式给出，其大小是恒定的，与粒子的初速度无关，同种粒子相同，但对带正电的粒子，其方向沿 y 轴的负方向，对带负电的粒子，其方向沿 y 轴的正方向。

由此可见，等离子层内电子和质子虽然相当复杂，但每个粒子都具有由 (8) 式给出的速度 v_0 ，其方向垂直于粒子所在处的地球引力，对电子，方向向西，对质子，方向向东。电子、质子这种运动称为漂移运动，对应的速度称为漂移速度。漂移运动是粒子的定向运动，电子、质子的定向运动就形成了环绕地球中心的环形电流。

由 (8) 式和 (1)、(2) 两式以及有关数据可得电子和质子的漂移速度分别为

$$v_{0e} = 9.2 \times 10^{-6} \text{ m/s}$$

(13)

$$v_{0p} = 1.7 \times 10^{-2} \text{ m/s} \quad (14)$$

由于电子、质子漂移速度的方向相反，电荷异号，它们产生的电流方向相同，均为沿纬度向东。根据电流密度的定义有

$$j = nq(v_{0p} + v_{0e})$$

(15)

代入有关数据得

$$j = 2.8 \times 10^{-14} \text{ A/m}^2$$

(16)

电流密度的方向沿纬度向东。

2. 上一小节的讨论表明，粒子在 Oxy 平面内作圆周运动，运动的速率由 (12) 式给出，它与粒子的初速度有关。对初速度方向指向地心的粒子，圆周运动的速率为

$$V = \sqrt{u_x^2 + v_0^2} \quad (17)$$

因题给出的电子与质子的初速度 u_x 是不同的，电子、质子的质量又是不同的，故电子、质子在 Oxy 平面内作圆周运动的半径也是不同的。由 (1)、(2)、(8)、(11)、(12) 各式并代入有关数据可得电子、质子的轨道半径分别为

$$R_e = 0.33 \text{ m} \quad (18)$$

$$R_p = 14.8 \text{ m}$$

(19)

以上的计算表明，虽然粒子具有沿引力方向的初速度，但由于粒子还受到磁场的作用，电子和质子在地球半径方向的最大下降距离分别为 $2R_e = 0.66 \text{ m}$ 和 $2R_p = 29.6 \text{ m}$ ，都远小于电离层的厚度，所考察的电子和质子仍在等离子层内运动，不会落到地面上。

六、参考解答：

1. $\frac{D}{l}\delta s$
2. $\frac{l}{d}\lambda$

附 1、2 两问的参考解法:

1. 求 S' 经双缝产生的干涉图像的零级亮纹 P_0 的位置

设 P_0 点的坐标为 y'_0 , 它也就是光源 S' 与 S 分别对应的干涉条纹的零级亮纹之间的距离, 即

$$P_0P_0 = \delta y = y'_0 - 0 = y'_0$$

由双缝到 P_0 点的光程差 $\Delta_1 = S_2P_0 - S_1P_0$, 从 S_1 作 S_2P_0 的垂线交于 H 点, 三角形 OP_0P_0 与三角形 S_1HS_2 相似, 因 $D \gg d$, 则

$$\Delta_1 = \frac{d}{D}y'_0 = \frac{d}{D}\delta y \quad (\text{附 1})$$

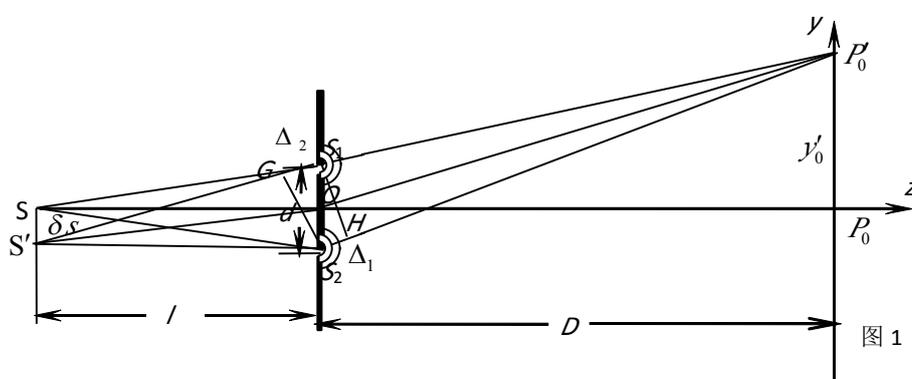


图 1

从 S_2 作 $S'S_1$ 的垂线交于 G , S' 到双缝的光程差

$$\Delta_2 = \overline{S'S_2} - \overline{S'S_1} \quad (\text{附 2})$$

三角形 SOS' 与三角形 S_1GS_2 相似, 因 $l \gg d$, 则

$$\Delta_2 = \overline{S'S_2} - (\overline{S'G} + \overline{GS_1}) = -\overline{GS_1} = -\frac{d}{l}\delta s \quad (\text{附 3})$$

对满足零光程差条件的 P_0 而言,

$$\left[\overline{S'S_2} + \overline{S_2P_0} \right] - \left[\overline{S'S_1} + \overline{S_1P_0} \right] = \Delta_1 + \Delta_2 = \frac{d}{D}\delta y - \frac{d\delta s}{l} = 0$$

得

$$\delta y = \frac{D}{l} \cdot \delta s \quad (\text{附 4})$$

2. 在线光源情况下, 可以导出双缝干涉的相邻两亮纹的间距为

$$\Delta y = \frac{D}{d}\lambda \quad (\text{附 5})$$

δs 值不同对应着扩展光源中不同位置的线光源. 不难证明, 它们经双缝产生干涉条纹的间距 Δy 均如 (5) 式所示. 宽度为 w 的扩展光源是由一系列 δs 值不同的、连续分布的、相互独立的线光源构成. 因此扩展光源在观察屏上产生的干涉图像的强度是由每个线光源产生干涉条纹的强度相加而成. 当扩展光源宽度为 w 时, 对于光源最边缘点有

$$\delta s = w \quad (\text{附 6})$$

代入 (4) 式

$$\delta y = \frac{D}{l} w \quad (\text{附 7})$$

若

$$\Delta y = \delta y \quad (\text{附 8})$$

则相当于扩展光源最边缘的线光源产生的干涉条纹错开了一个条纹间距. 由于扩展光源各部分产生的干涉条纹的光强分布都相同, 各套干涉条纹强度相加的结果使屏上各处光强相等, 变得一片模糊而无法分辨. 由 (5) 式和 (7) 式, 求得为使条纹能被分辨, 扩展光源允许的最大宽度

$$w = \frac{l}{d} \lambda \quad (\text{附 9})$$

3.

解法一

如图 2 所示, ad' 是由扩展光源上端边缘发出的平行光, bb' 是由扩展光源下端边缘发出的平行光. 设 ab 光线交于 M_1 点, $d'b'$ 光线交于 M_2 点. ad' 光束中的光线 a 经过 $M_1M_3S_1P$ 到达观察屏上 P 点; 光线 d' 经过 $M_2M_4S_2P$ 到达观察屏上 P 点, 两相干光波产生干涉, 在观察屏上产生一套干涉条纹. 同理, 平行光束 bb' 在观察屏上产生另一套干涉条纹. 从扩展光源不同部位发出的、倾角在 0

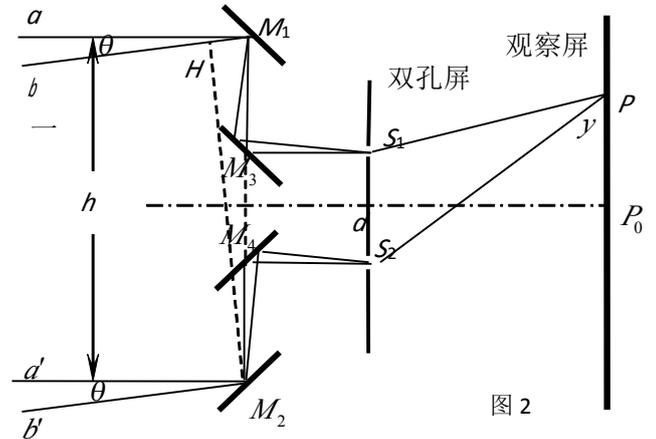


图 2

和 θ 之间不同角度入射的平行光束, 经迈克尔逊测星仪相应的反射镜走过不同路径到双孔, 然后在观察屏上产生很多套干涉条纹. 这些干涉条纹光强度彼此相加, 屏幕上就形成了光强度的分布图像. 根据第 2 问的结果, 其清晰度取决于来自扩展光源上下边缘发出的平行光 ad' 与 bb' 分别在屏幕上产生两套干涉条纹的相对位置错开的程度.

由对称性考虑, 平行光束 ad' 中两条光线 a 和 d' 在观察屏上 P_0 的光程差为 0, 即平行光 ad' 产生的那套干涉条纹的零级亮纹就在 P_0 处. 现讨论以倾角 θ 斜入射的平行光束 bb' 通过整个光学装置后, 在观察屏上某点发生干涉时的光程差. 光束 bb' 中的光线 b 入射 M_1 的光线经 M_3 反射到达 S_1 , 光线 b 从 M_1 点算起, 所经光程为 $\overline{M_1M_3} + \overline{M_3S_1}$; 光线 b' 入射 M_2 的光线经 M_4 反射到达 S_2 , 光线 b' 从 M_2 点算起, 所经光程为 $\overline{M_2M_4} + \overline{M_4S_2}$. 由对称性可得

$$\overline{M_1M_3} + \overline{M_3S_1} = \overline{M_2M_4} + \overline{M_4S_2} \quad (1)$$

也就是说从 M_1 和 M_2 算起, 光线 b 和 b' 到达 S_1 与 S_2 的光程是相等的, 但是光线 b 和 b' 在到达 M_1 和 M_2 时, 二者的相位却不同. 由 M_2 作斜入射光线 bM_1 的垂线交 H 点, M_2 与 H 相位相等, 因此, 斜入射的两条平行光线 b 和 b' 到达 S_1 和 S_2 时的相位差是光程差 $\overline{HM_1}$ 引起的

$$\Delta_1' = [\overline{M_2M_4S_2}] - [\overline{HM_1M_3S_1}] = -\overline{HM_1} = -h\theta \quad (2)$$

从扩展光源下边缘发出的平行光束斜入射到测星干涉仪, 经双孔后发出的相干光在观察屏上

坐标为 y (坐标原点取在 P_0 上) 的 P 点上引起的光程差

$$\Delta = \Delta'_1 + \Delta_1 \approx -h\theta + \frac{d}{D}y \quad (3)$$

其零级亮纹所在位置 P'_0 对应的光程差 $\Delta = 0$, 故 P'_0 的坐标

$$y'_0 = h\theta \cdot \frac{D}{d} \quad (4)$$

这也就是平行光 ad' 与 bb' 产生的干涉条纹的零级亮纹 (也是两套条纹) 错开的距离

$$\delta y = h\theta \cdot \frac{D}{d} \quad (5)$$

因在线光源情况下, 可以导出双孔干涉的相邻两亮纹的间距为

$$\Delta y = \frac{D}{d}\lambda$$

(6)

当二者错开一个条纹间隔时, 即 $\Delta y = \delta y$, 代入 (6) 式 (星光波长采用 $\bar{\lambda}$), 得

$$\theta = \frac{\bar{\lambda}}{h} \quad (7)$$

远处的星体作为扩展光源发出的光经过“测星仪”到达双孔, 在屏上观察到干涉条纹的清晰度下降, 由小到大调节 M_1 、 M_2 距离 h , 当屏幕上条纹消失时, 记下此时 h 的值代入 (7) 式就可确定扩展光源角直径 θ 的大小.

注: 实际星体都看作均匀亮度的圆形扩展光源, 通过调节 h 使屏幕上的干涉条纹消失, 即各处强度完全相等时, 通过数学计算, 用迈克尔逊测星仪测量得的星体角直径 $\theta = 1.22 \frac{\bar{\lambda}}{h}$.

解法二

如图 3 所示, 对 M_1 、 M_3 而言, 找出 S_1 对 M_3 的中间像 S_1'' 和对 M_1 所成的像 S_1' 以及光线 a 在 M_1 、 M_3 的反射点 F 和 G . 由物像的对称性可知 $\overline{GS_1} = \overline{GS_1''}$, $\overline{FS_1} = \overline{FS_1''}$, 故

$$\overline{FS_1'} = \overline{FG} + \overline{GS_1}$$

即从光线 a 上一点到 S_1' 和到 S_1 的光程相等. 同理可证, 从光线 b 上一点到 S_1' 和到 S_1 的光程相等; 对 M_2 、 M_4 (未画出) 而言, 从光线 a' 上一点到 S_2' 和到 S_2 的光程相等; 从光线 b' 上一点到 S_2' 和到 S_2 的光程相等.

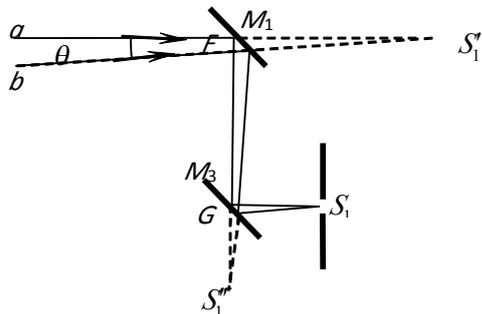


图 3

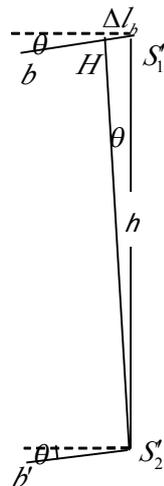


图 4

因此，光线 a 到 S_1 处与光线 a' 到 S_2 处引起的光程差 ΔL_a 与没有反射镜 M_1 、 M_2 时两光线到 S_1' 、 S_2' 处的光程相等。因 a 、 a' 垂直双孔屏，故

$$\Delta L_a = 0 \quad (1)$$

通过双孔 S_1 、 S_2 后，光线 a 、 a' 在 P_0 的光程差

$$\Delta L'_a = 0 \quad (2)$$

平行光束 $b'b'$ 斜入射时，可从 S_1' 、 S_2' 处求 b 、 b' 两光线到达 S_1 、 S_2 处的光程差 ΔL_b 。由 S_2' 作 bS_1' 的垂线 $S_2'H$ （见图 4），

$$\Delta L_b = \overline{HS_1'} = h \sin \theta \approx h\theta \quad (3)$$

说明光线 b' 超前于光线 b 。

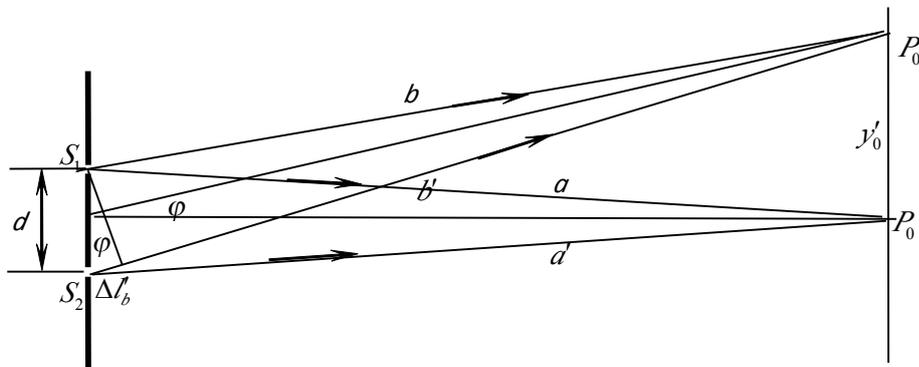


图 5

通过双孔 S_1 、 S_2 后光线 b 、 b' 射出的相干光线在屏幕上形成的零级亮纹不可能位于 P_0 处，因为二者到达双孔前光线 b' 已超前了光线 b ，如图 5 所示，光线 b' 经过 S_2 孔后要多走一段光程来抵消前面的相位差，以达到与光线 b 在没有光程差的情况下相交于远方屏幕上，形成干涉零级亮纹。该点所对应的 b' 经过 S_2 孔后多走的光程

$$\Delta L'_b = \overline{S_2P_0} - \overline{S_1P_0} = d \sin \varphi \approx d\varphi \quad (4)$$

从 $\Delta L_b = \Delta L'_b$ 可求得平行光束 $b'b'$ 经双孔后在观察屏上的干涉零级条纹位置 P'_0 。由 (3) 式和 (4) 式，得

$$\varphi = \frac{h}{d}\theta \quad (5)$$

P'_0 的位置坐标

$$y'_0 = D \tan \varphi \approx D\varphi \quad (6)$$

由小到大调节反射镜 M_1 、 M_2 之间的距离（也就是 S'_1 、 S'_2 之间的距离） h ，直到屏幕上的干涉条纹消失，即各处强度完全相等时，记下此时 h 的值。这时相干光 bb' 在屏幕上零级亮纹位置 P'_0 与 P_0 的距离

$$\overline{P'_0 P_0} = y'_0 - 0 = \delta y = D\varphi \quad (7)$$

当 $\overline{P'_0 P_0}$ 等于条纹间隔 Δy ，即

$$\overline{P'_0 P_0} = \frac{D}{d}\bar{\lambda} \quad (8)$$

代入 (7) 式得

$$\varphi = \frac{\bar{\lambda}}{d} \quad (9)$$

由 (5)、(9) 两式，得

$$\theta = \frac{\bar{\lambda}}{h} \quad (10)$$

解法三

根据第 2 问的结果，为使条纹能被分辨，扩展光源的允许宽度为 $w = \frac{l}{d}\lambda$ ，从而扩展光源对双缝中心的张角为

$$\theta' = \frac{w}{l} = \frac{\lambda}{d} \quad (1)$$

如图 3 所示，对 M_1 、 M_3 而言，找出 S_1 对 M_3 的中间像 S'_1 和对 M_1 所成的像 S''_1 以及光线 a 在 M_1 、 M_3 的反射点 F 和 G 。由物像的对称性可知 $\overline{GS'_1} = \overline{GS''_1}$ ， $\overline{FS'_1} = \overline{FS''_1}$ ，故

$$\overline{FS'_1} = \overline{FG} + \overline{GS'_1}$$

即从光线 a 上一点到 S'_1 和到 S_1 的光程相等。同理可证，从光线 b 上一点到 S'_1 和到 S_1 的光程相等；对 M_2 、 M_4 （未画出）而言，从光线 a' 上一点到 S'_2 和到 S_2 的光程相等；从光线 b' 上一点到 S'_2 和到 S_2 的光程相等。从分析可知， S'_1 为 S_1 经 M_3 、 M_1 反射的等效像点， S'_2 为 S_2 经 M_4 、 M_2 反射的等效像点，从而可将测星干涉看作是经双孔 S'_1 、 S'_2 的等效杨氏双缝干涉，其缝距为

$$\overline{S'_1 S'_2} = h \quad (2)$$

由小到大调节反射镜 M_1 、 M_2 之间的距离（也就是 S'_1 、 S'_2 之间的距离） h ，直到屏幕上的干涉条纹消失，即各处强度完全相等，这时只需将测得的 h 直接替换 (1) 式中的 d ，可得计算星体角直径的公式

$$\theta = \frac{\bar{\lambda}}{h} \quad (3)$$

得到与前两种解法相同的结果.

七、参考解答:

根据题意, ${}^7\text{Be}$ 核和 κ 层电子的动量都为零, 在第一个反应中, 若用 \bar{p}_{Li^*} 表示激发态锂核 (${}^7\text{Li}$)^{*} 的动量, \bar{p}_η 表示中微子 η 的动量, 则由动量守恒定律有

$$\bar{p}_{\text{Li}^*} + \bar{p}_\eta = 0$$

(1)

即激发态锂核的动量与中微子的动量大小相等, 方向相反. 在第二个反应中, 若用 \bar{p}_{Li} 表示反冲锂核 ${}^7\text{Li}$ 的动量, \bar{p}_γ 表示光子的动量, 则由动量守恒定律有

$$\bar{p}_{\text{Li}^*} = \bar{p}_{\text{Li}} + \bar{p}_\gamma$$

(2)

由 (1)、(2) 式得

$$\bar{p}_{\text{Li}} = -(\bar{p}_\gamma + \bar{p}_\eta)$$

(3)

当锂核的反冲动量 p_{Li} 最大时, 其反冲能量也最大. 由 (3) 式可知, 当中微子的动量与 γ 光子的动量同方向时, 锂核的反冲动量最大. 注意到 γ 光子的动量

$$p_\gamma = \frac{h\nu}{c}$$

(4)

有

$$p_{\text{Li}} = p_\eta + \frac{h\nu}{c}$$

(5)

由于锂核的反冲能量比锂核的静能小得多, 锂核的动能与其动量的关系不必用相对论关系表示, 这时有

$$E_{\text{R}} = \frac{p_{\text{Li}}^2}{2m_{\text{Li}}}$$

(6)

由 (5)、(6) 式得

$$p_\eta c = \sqrt{2m_{\text{Li}}c^2 E_{\text{R}}} - h\nu$$

(7)

代入有关数据得

$$p_{\eta} = 0.38\text{MeV}/c$$

(8)

用 E_{η} 表示中微子的能量，根据相对论有

$$E_{\eta} = \sqrt{m_{\eta}^2 c^2 + p_{\eta}^2 c^2} \quad (9)$$

根据能量守恒定律有

$$m_{\text{Be}} c^2 + m_e c^2 = m_{\text{Li}} c^2 + E_{\text{R}} + h\nu + E_{\eta} \quad (10)$$

由 (9)、(10) 式得

$$m_{\eta} c^2 = \left[(m_{\text{Be}} c^2 + m_e c^2 - m_{\text{Li}} c^2 - E_{\text{R}} - h\nu)^2 - p_{\eta}^2 c^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

(11)

由 (8) 式和已知数据得

$$m_{\eta} \approx 0.00\text{MeV}/c^2$$

(12)

由 (12) 式可知，所算出的中微子静止质量的数值在题给数据的误差范围之内，故不能确定中微子的静止质量。如果有，其质量一定小于 $0.1\text{MeV}/c^2$ 。