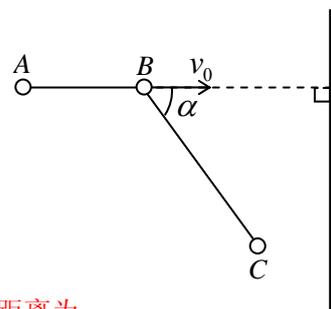


## 2012 年第 29 届全国中学生物理竞赛复赛第三题另解

广东仲元中学 刘雁

三、如图所示，两根刚性轻杆  $AB$  和  $BC$  在  $B$  端牢固粘接在一起， $AB$  延长线与  $BC$  的夹角  $\alpha$  为锐角，杆  $BC$  长为  $l$ ，杆  $AB$  长为  $l \cos \alpha$ 。在杆的  $A$ 、 $B$  和  $C$  三点各固连一质量均为  $m$  的小球，构成一刚性系统。整个系统放在光滑水平桌面上，桌面上有一固定的光滑竖直挡板。杆  $AB$  延长线与挡板垂直。现使该系统以大小为  $v_0$ 、方向沿  $AB$  的速度向挡板平动。在某时刻，小球  $C$  与挡板碰撞，碰撞结束时球心在垂直于挡板方向的分速度为零，且球  $C$  与挡板不粘连。若使球  $C$  碰撞后，球  $B$  先于球  $A$  与挡板相碰，求夹角  $\alpha$  应满足的条件。



从刚体的平面平行运动观点，

另选参考点用角动量守恒定律求碰撞后刚体的角速度

解：如图所示， $P$  为刚体的质心，易求得  $PB$  与挡板平行， $P$ 、 $B$  两点的距离为：

$$\overline{PB} = \frac{l \sin \alpha}{3}$$

质心的速度方向始终与挡板垂直，碰撞刚结束时， $C$  的速度方向与挡板平行。由此可找到刚体的瞬心  $O$ 。且有：

$$\overline{OC} = l \cos \alpha$$

$$\overline{OB} = l \sin \alpha$$

$$\overline{OA} = l$$

碰撞刚结束时， $A$ 、 $B$ 、 $C$  的速度方向分别与  $OA$ 、 $OB$  和  $OC$  垂直，设其大小分别为  $v_A$ 、 $v_B$  和  $v_C$ ，设碰撞后质心的速度大小为  $v_p$ ，刚体的角速度为  $\omega$ ，

则有：

$$v_A = \omega \overline{OA} = \omega l$$

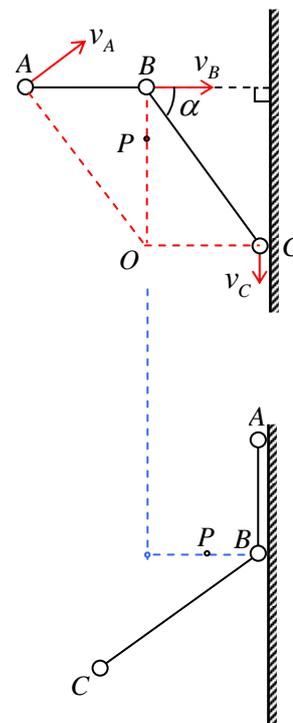
$$v_B = \omega \overline{OB} = \omega l \sin \alpha$$

$$v_C = \omega \overline{OC} = \omega l \cos \alpha$$

$$v_p = \omega \overline{OP} = \omega(\overline{OB} - \overline{PB}) = \frac{2\omega l \sin \alpha}{3}$$

以  $C$  点为参考点，则碰撞前后刚体的角动量守恒。

$$mv_A(l + l \cos^2 \alpha) + mv_B l \sin \alpha = 2mv_0 l \sin \alpha$$



解得：
$$\omega = \frac{v_0 \sin \alpha}{l}$$

$$v_P = \frac{2v_0 \sin^2 \alpha}{3}$$

系统绕质心转过  $\frac{\pi}{2}$  所需时间为：

$$t = \frac{\frac{1}{2}\pi}{\omega} = \frac{\pi l}{2v_0 \sin \alpha}$$

若球 B 先于球 A 与挡板相碰，则在球 C 与挡板碰撞后至 B 球与挡板相碰所用的时间小于 t。即有：

$$\frac{l \cos \alpha - PB}{v_P} < t$$

解得：

$$\alpha > \arctan \frac{3}{1 + \pi}$$

即： $\alpha > 36^\circ$

原参考答案及评分标准

解法一

如图 1 所示，建直角坐标  $Oxy$ ，x 轴与挡板垂直，y 轴与挡板重合。碰撞前体系质心的速度为  $v_0$ ，方向沿 x 轴正方向，以 P 表示系统的质心，以  $v_{px}$  和  $v_{py}$  表示碰撞后质心的速度分量，J 表示墙作用于小球 C 的冲量的大小。根据质心运动定理有

$$-J = 3mv_{px} - 3mv_0 \tag{1}$$

$$0 = 3mv_{py} - 0 \tag{2}$$

由 (1) 和 (2) 式得

$$v_{px} = \frac{3mv_0 - J}{3m} \tag{3}$$

$$v_{py} = 0 \tag{4}$$

可在质心参考系中考察系统对质心的角动量。在球 C 与挡板碰撞过程中，质心的坐标为

$$x_p = -l \cos \alpha \tag{5}$$

$$y_p = -\frac{1}{3}l \sin \alpha \tag{6}$$

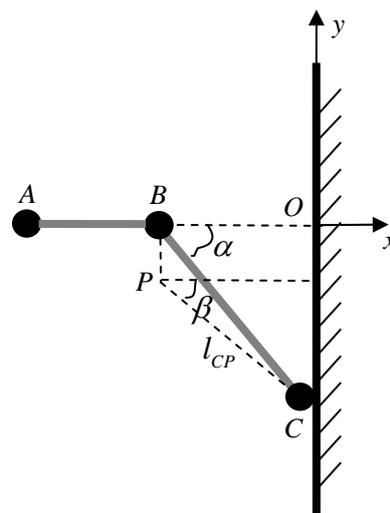


图 1

球 C 碰挡板前，三小球相对于质心静止，对质心的角动量为零；球 C 碰挡板后，质心相对质心参考系仍是静止的，三小球相对质心参考系的运动是绕质心的转动，若转动角速度为  $\omega$ ，则三小球对质心 P 的角动量

$$L = m\omega l_{AP}^2 + m\omega l_{BP}^2 + m\omega l_{CP}^2 \quad (7)$$

式中  $l_{AP}$ 、 $l_{BP}$  和  $l_{CP}$  分别是  $A$ 、 $B$  和  $C$  三球到质心  $P$  的距离，由图 1 可知

$$l_{AP}^2 = l^2 \cos^2 \alpha + \frac{1}{9} l^2 \sin^2 \alpha \quad (8)$$

$$l_{BP}^2 = \frac{1}{9} l^2 \sin^2 \alpha \quad (9)$$

$$l_{CP}^2 = l^2 \cos^2 \alpha + \frac{4}{9} l^2 \sin^2 \alpha \quad (10)$$

由 (7)、(8)、(9) 和 (10) 各式得

$$L = \frac{2}{3} ml^2 \omega (1 + 2 \cos^2 \alpha) \quad (11)$$

在碰撞过程中，质心有加速度，质心参考系是非惯性参考系，在质心参考系中考察动力学问题时，必须引入惯性力。但作用于质点系的惯性力的合力通过质心，对质心的力矩等于零，不影响质点系对质心的角动量，故在质心参考系中，相对质心角动量的变化仍取决于作用于球  $C$  的冲量  $J$  的冲量矩，即有

$$J \frac{2}{3} l \sin \alpha = L \quad (12)$$

【也可以始终在惯性参考系中考察问题，即把桌面上与体系质心重合的那一点作为角动量的参考点，则对该参考点(12)式也成立】

由 (11) 和 (12) 式得

$$\omega = \frac{J \sin \alpha}{ml(1 + 2 \cos^2 \alpha)} \quad (13)$$

球  $C$  相对于质心参考系的速度分量分别为 (参考图 1)

$$v_{CPx} = -\omega l_{CP} \sin \beta = -\omega(l \sin \alpha - |y_p|) \quad (14)$$

$$v_{CPy} = -\omega l_{CP} \cos \beta = -\omega l \cos \alpha \quad (15)$$

球  $C$  相对固定参考系速度的  $x$  分量为

$$v_{Cx} = v_{CPx} + v_{px} \quad (16)$$

由 (3)、(6)、(13) 和 (16) 各式得

$$v_{Cx} = -\frac{J}{m(1 + 2 \cos^2 \alpha)} + v_0 \quad (17)$$

根据题意有

$$v_{Cx} = 0 \quad (18)$$

由 (17) 和 (18) 式得

$$J = mv_0(1 + 2 \cos^2 \alpha) \quad (19)$$

由 (13) 和 (19) 式得

$$\omega = \frac{v_0 \sin \alpha}{l} \quad (20)$$

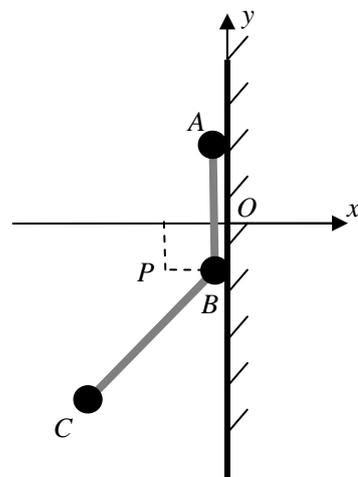


图 2

球  $A$  若先于球  $B$  与挡板发生碰撞，则在球  $C$  与挡板碰撞后，整个系统至少应绕质心转过  $\pi/2$  角，即杆  $AB$  至

少转到沿  $y$  方向, 如图 2 所示. 系统绕质心转过  $\pi/2$  所需时间

$$t = \frac{\frac{1}{2}\pi}{\omega} \quad (21)$$

在此时间内质心沿  $x$  方向向右移动的距离

$$\Delta x = v_{Px}t \quad (22)$$

若

$$|y_p| + \Delta x > |x_p| \quad (23)$$

则球  $B$  先于球  $A$  与挡板碰撞. 由 (5)、(6)、(14)、(16)、(18)、(21)、(22) 和 (23) 式得

$$\alpha > \arctan \frac{3}{1+\pi} \quad (24)$$

即

$$\alpha > 36^\circ \quad (25)$$

**评分标准:**

本题 25 分. (1)、(2)、(11)、(12)、(19)、(20) 式各 3 分, (21) 式 1 分, (22)、(23) 式各 2 分.(24)或 (25)式 2 分.

**解法二**

如图 1 所示, 建直角坐标系  $Oxy$ ,  $x$  轴与挡板垂直,  $y$  轴与挡板重合, 以  $v_{Ax}$ 、 $v_{Ay}$ 、 $v_{Bx}$ 、 $v_{By}$ 、 $v_{Cx}$  和  $v_{Cy}$  分别表示球  $C$  与挡板刚碰撞后  $A$ 、 $B$  和  $C$  三球速度的分量, 根据题意有

$$v_{Cx} = 0 \quad (1)$$

以  $J$  表示挡板作用于球  $C$  的冲量的大小, 其方向沿  $x$  轴的负方向, 根据质点组的动量定理有

$$-J = mv_{Ax} + mv_{Bx} - 3mv_0 \quad (2)$$

$$0 = mv_{Ay} + mv_{By} + mv_{Cy} \quad (3)$$

以坐标原点  $O$  为参考点, 根据质点组的角动量定理有

$$Jl \sin \alpha = mv_{Ay}(l \cos \alpha + l \cos \alpha) + mv_{By}l \cos \alpha + mv_0l \sin \alpha \quad (4)$$

因为连结小球的杆都是刚性的, 故小球沿连结杆的速度分量相等, 故有

$$v_{Ax} = v_{Bx} \quad (5)$$

$$v_{Cy} \sin \alpha = v_{By} \sin \alpha - v_{Bx} \cos \alpha \quad (6)$$

$$v_{Ax} \cos \theta - v_{Ay} \sin \theta = -v_{Cy} \sin \theta \quad (7)$$

(7) 式中  $\theta$  为杆  $AB$  与连线  $AC$  的夹角. 由几何关系有

$$\cos \theta = \frac{2 \cos \alpha}{\sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha}} \quad (8)$$

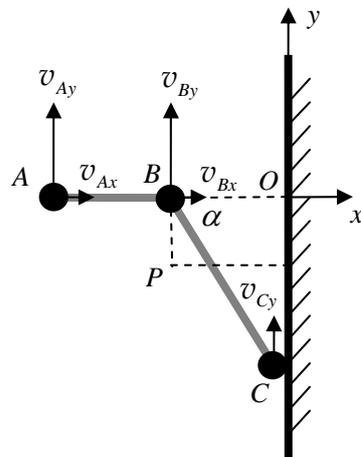


图 1

$$\sin \theta = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha}} \quad (9)$$

解以上各式得

$$J = mv_0(1 + 2 \cos^2 \alpha) \quad (10)$$

$$v_{Ax} = v_0 \sin^2 \alpha \quad (11)$$

$$v_{Ay} = v_0 \sin \alpha \cos \alpha \quad (12)$$

$$v_{Bx} = v_0 \sin^2 \alpha \quad (13)$$

$$v_{By} = 0 \quad (14)$$

$$v_{Cy} = -v_0 \sin \alpha \cos \alpha \quad (15)$$

按题意，自球  $C$  与挡板碰撞结束到球  $A$ （也可能球  $B$ ）碰撞挡板墙前，整个系统不受外力作用，系统的质心作匀速直线运动。若以质心为参考系，则相对质心参考系，质心是静止不动的， $A$ 、 $B$  和  $C$  三球构成的刚性系统相对质心的运动是绕质心的转动。为了求出转动角速度，可考察球  $B$  相对质心的速度。由(11)到(15)各式，在球  $C$  与挡板碰撞刚结束时系统质心  $P$  的速度

$$v_{Px} = \frac{mv_{Ax} + mv_{Bx} + mv_{Cx}}{3m} = \frac{2}{3}v_0 \sin^2 \alpha \quad (16)$$

$$v_{Py} = \frac{mv_{Ay} + mv_{By} + mv_{Cy}}{3m} = 0 \quad (17)$$

这时系统质心的坐标为

$$x_p = -l \cos \alpha \quad (18)$$

$$y_p = -\frac{1}{3}l \sin \alpha \quad (19)$$

不难看出，此时质心  $P$  正好在球  $B$  的正下方，至球  $B$  的距离为  $|y_p|$ ，而球  $B$  相对质心的速度

$$v_{BPx} = v_{Bx} - v_{Px} = \frac{1}{3}v_0 \sin^2 \alpha \quad (20)$$

$$v_{BPy} = 0 \quad (21)$$

可见此时球  $B$  的速度正好垂直  $BP$ ，故整个系统对质心转动的角速度

$$\omega = \frac{v_{BPx}}{|y_p|} = \frac{v_0 \sin \alpha}{l} \quad (22)$$

若使球  $A$  先于球  $B$  与挡板发生碰撞，则在球  $C$  与挡板碰撞后，整个系统至少应绕质心转过  $\pi/2$  角，即杆  $AB$  至少转到沿  $y$  方向，如图 2 所示。系统绕质心转过  $\pi/2$  所需时间

$$t = \frac{\frac{1}{2}\pi}{\omega} \quad (23)$$

在此时间内质心沿  $x$  方向向右移动的距离

$$\Delta x = v_{Px}t \quad (24)$$

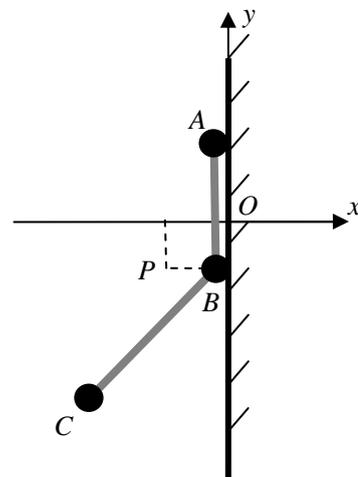


图 2

若

$$|y_p| + \Delta x > |x_p| \quad (25)$$

则球  $B$  先于球  $A$  与挡板碰撞. 由以上有关各式得

$$\alpha > \arctan \frac{3}{1+\pi} \quad (26)$$

即

$$\alpha > 36^\circ \quad (27)$$

**评分标准:**

本题 25 分. (2)、(3)、(4)、(5)、(6)、(7) 式各 2 分, (10)、(22) 式各 3 分, (23) 式 1 分, (24)、(25) 式各 2 分, (26) 或(27)式 2 分.