智浪教育—普惠英才文库

高考与竞赛

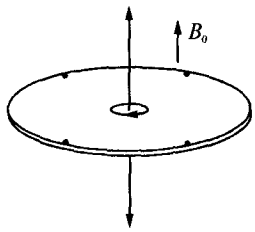
第 29 届全国中学物理竞赛决赛电磁学试题的解析与思考*

陈红君　曹　雷（长春师范学院物理学院　吉林　130032）
费金有（吉林师范大学　吉林　136000）

摘　要　电磁学历来是竞赛试题的热点难点部分，占的分值较大。本文选取第 29 届全国中学物理竞赛决赛的电磁学试题，从审题、析题、解题和解后再思四个环节来进行分析，熟练掌握这四个环节有助于学生能力和素质的提高。

关键词　圆线圈　磁感应强度　电场　薄圆盘
文章编号　1002－0748(2013)11－0069　　**中图分类号**　G633·7　　**文献标识码**　B

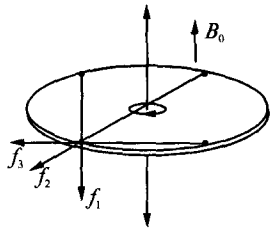
原题　如图所示，一半径为 R 的轻质绝缘塑料薄圆盘水平放置，可绕过圆盘中心的竖直固定轴无摩擦地自由转动。一半径为 a 的轻质小圆线圈（$a \ll R$）固定在盘面上，圆线圈与圆盘共轴。在盘边缘处等间隔地固定 4 个质量均为 m 的带正电的金属小球，每个小球所带电荷量均为 q。此装置处在一磁感应强度大小为 B_0、方向竖直向上的均匀强磁场中。初始时圆盘静止，圆线圈中通有恒定电流 I。方向沿顺时针方向（从上往下看）。若切断圆线圈中的电流，则圆盘将发生转动。求薄圆盘稳定转动后，圆盘在水平方向对每个金属小球的作用力的大小。假设金属小球可视为质点，不计小圆线圈的自感和带电金属小球因运动所产生的磁场。



已知固定在圆盘面上的半径为 a、通有电流 I 的圆线圈在圆盘面内、距线圈圆心的距离为 r 处（$r \gg a$）产生的磁场的磁感应强度的大小为 $B = k_m \dfrac{2\pi a^2 I}{r^3}$，式中 k_m 为已知常量，当线圈中的电流沿顺时针方向时，磁场方向垂直于圆盘平面且竖直向上，静电力常量为 k_e。

审题：解答物理竞赛题时，不要急于动笔，乱套公式，要全面分析题意，弄清题目涉及的问题，研究的对象，要求解的问题以及所经历的物理过程。要特别注意挖掘题中隐含条件，进而在头脑中形成物理模型和图示。

析题：由题意（轻质绝缘塑料薄圆盘）知薄圆盘的质量忽略不计，轻质小圆线圈（$a \ll R$）固定在盘面上，小圆环的质量忽略不计，小圆环固定在薄圆盘上。切断圆线圈中的电流，则圆盘将发生转动，其原因在于变化的磁场引起圆线圈转动，而圆线圈与圆盘固定在一起。题目所求为薄圆盘稳定转动后（以恒定角速度 ω 转动，即转动平衡问题），圆盘在水平方向对每个金属小球的作用力的大小。假设金属小球可视为质点，且忽略每个小球的重力。所以研究对象即为每个金属小球，由于金属小球是均匀放置在薄圆盘上，所以可以取其中一个进行受力分析，受到其他三个带电金属小球的电场力，方向指向半径；磁场力，由于在切断线圈中的电流时，引起合磁场的变化，变化的磁场产生涡旋电场，由对称性可知，在整个圆盘边缘处，涡旋电场的场强大小相等。设小球受到圆盘的水平作用力为 f，根据以上的分析可以列出矢量方程为 $\vec{f} + \vec{f}_B + \vec{f}_E = m\omega^2 \vec{R}$。要求的是 $\vec{f}$ 的大小，所以要先求出磁场力 $\vec{f}_B$，电场力 $\vec{f}_E$，角速度 ω 的大小（逆向推理）。



解题：首先求电场力，如图受力分析知

$$f_{合} = f_2 + f_3\cos 45^\circ + f_1\cos 45^\circ$$

* 本课题受长春市社会科学规划项目，“长春市中小学教育均衡发展现状调查与对策研究”资助。

$$\vec{f}_E = -f_{合} = q\left(k_e \frac{q}{4R^2} + k_e \frac{\sqrt{2}q}{2R^2}\right) = k_e \frac{q^2(1+2\sqrt{2})}{4R^2}$$

这里比较难求的是磁场力，带电小球在变化的磁场中受洛伦兹力的作用，由于不计小圆线圈的自感和带电金属小球因运动所产生的磁场，所以有 $f_{B_0} = qvB_0 = qB_0\omega R$，所以现在只需要求出 ω，问题就解决了。难点就在于由薄圆盘稳定转动后的隐含条件是否能分析出以恒定角速度 ω 转动，即转动平衡问题。所以由角动量定理知：

$$L\Delta t = J\omega \quad (L = \sum L_i,\ J = 4mR^2)$$

涡旋电场作用于第 i 个金属小球的力矩为 $L_i = qE_CR$（E_C 表示圆盘边缘处涡旋电场场强的大小），所以我们的目标转化为求 E_C。设 ε 表示感应电动势，则有 $\varepsilon = E_C 2\pi R (U = Ed)$（化曲为直的思想）。根据法拉第电磁感应定律，感应电动势的大小为 $\varepsilon = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$，式中 $\Delta\Phi$ 是指在切断圆线圈电流过程经过 Δt 时间的磁通量的改变量。为了求出圆线圈对圆盘以外的圆盘所在平面的磁通量，先考察该磁场对半径为 r_i 与 r_{i+1} 之间的圆环的磁通量 Φ_i，此磁通量可用 r_i 处的磁感应强度 $B = k_m \frac{2\pi a^2 I}{r_i^3}$ 与圆环面积 $2\pi r_i(r_{i+1} - r_i)$ 的乘积来表示，即

$$\Phi_i = k_m \frac{2\pi a^2 I}{r_i^3} 2\pi r_i (r_{i+1} - r_i) = BS$$
$$= 4\pi^2 k_m a^2 I \frac{1}{r_i^2}(r_{i+1} - r_i)$$

利用数学极限思想 $r_i \approx r_{i+1}$ 所以有 $r_i^2 \approx r_i r_{i+1}$，所以有

$$\Phi_i = -4\pi^2 a^2 k_m I\left(\frac{1}{r_{i+1}} - \frac{1}{r_i}\right)$$

圆线圈磁场对圆盘以外的圆盘所在平面的磁通量为

$$\Phi = \sum \Phi_i = \sum -4\pi^2 a^2 k_m I\left(\frac{1}{r_{i+1}} - \frac{1}{r_i}\right)$$

这里 $r_1 = R$，$r_\infty = \infty$ 经计算得

$$\Phi = \frac{4\pi^2 a^2 k_m I}{R}$$

由于电流切断后，磁场消失，故通过圆盘的磁通量变化大小为

$$\Delta\Phi = \frac{4\pi^2 a^2 k_m I}{R}$$

由以上分析可求得 $E_C = \frac{2\pi a^2 k_m I}{R^2 \Delta t}$，由楞次定律可知涡旋电场沿顺时针方向，涡旋电场作用于第 i 个金属小球的力矩为

$$L_i = qE_cR = \frac{2k_m\pi a^2 q}{R}\frac{I}{\Delta t}$$

方向垂直于圆盘面竖直向下。涡旋电场对四个小球的合力矩

$$L = \sum L_i = qE_cR = \frac{8k_m\pi a^2 q}{R}\frac{I}{\Delta t}$$

在圆线圈电流消失过程中，Δt 时间内涡旋电场作用于四个金属小球的合力矩的冲量为

$$L\Delta t = \frac{8k_m\pi a^2 q}{R} I$$

若金属小球绕固定转轴的角动量为 ω，则有

$$\frac{8k_m\pi a^2 q}{R} I = J\omega = 4mR^2\omega$$

由此得 $\omega = \frac{2k_m\pi a^2 q}{mR^3} I$，所以金属小球转动时，受到磁感应强度为 B_0 的磁场作用力的大小为

$$f_B = qB_0R\omega = \frac{2k_m\pi a^2 q^2 B_0}{mR^2} I$$

力的方向指向圆心。所以根据前面的分析 $f + f_B - f_E = m\omega^2 R$，有

$$f = \frac{4k_m^2\pi^2 a^4 q^2}{mR^5} I^2 + k_e \frac{q^2(1+2\sqrt{2})}{4R^2} - \frac{2k_m\pi a^2 q^2 B_0}{mR^2} I$$

解后再思：部分同学由于缺少对问题进行定性分析，所以此题是学生失分比较多的一题，因为本题涉及复杂的数学运算（包括极限、积分、三角函数、化曲为直等）而且还涉及大学物理的角动量定理、力矩等相关知识，不是按照以往的常规套路，考生不善于通过对物理过程及其隐含条件的分析，把物理问题单纯数学化，形成思维的单线性，直接导致思路受限，解题困难；所以对题的整体把握和对于题目中的关键信息的提炼以及新旧知识的灵活运用都是每个参赛选手必须具备的能力。在平时要加强训练，启发学生的思维，开拓解题的思路，提高解题的能力是提高竞赛成绩的关键。

参考文献

[1] 29届全国中学生物理竞赛决赛试题
[2] 杨林.解答物理题的四个环节[J].黔东南民族师范高等专科学校学报，2002(6)