# 全国中学生物理竞赛复赛模拟试题第一套（解析与评分标准）

满分 140

## 第一题（15 分）

【解】$\alpha=-\beta$

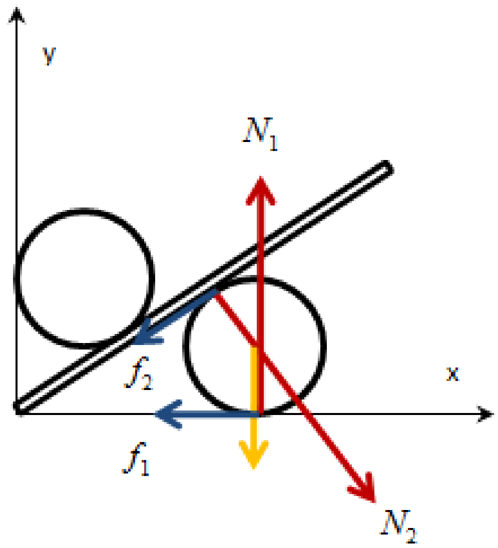
无磁单极子，所以任取一个封闭体，总磁通量为 0。取一个长宽高各在 XYZ 正半轴，顶点在原点 O 的长方体。其在 XYZ 轴上的边长分别为 $x_0$、$y_0$、$z_0$，总磁通为零有：$\alpha x_0\cdot z_0=\beta z_0\cdot x_0$，得$\alpha=-\beta$

评分标准：得出$\alpha=-\beta$得 5 分。说明无磁单极子得 5 分。取封闭体算磁通为零得 5 分。

、

第二题（12 分）

【解】如图设支持力摩擦力为$N_1$、$N_2$、$N_3$、$f_2$、$f_3$，小球半径为$R$，




下球平衡：左右方向受力平衡有

$$N_2\sin\theta = f_2\cos\theta + f_1 \qquad （1）$$

以下球中心为轴转动平衡有

$$f_1R = f_2R \qquad （2）$$

由以原点为轴力矩平衡得$N_1$大于$N_2$，由（2）式知$f_1 = f_2$，所以判断得$f_2$处先滑，滑动临界状况时取 $f_2 = \mu N_2$　（3）

联立（1）（2）（3）有$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta+1} = \mu$　（4）

计算得$\theta = 2\arctan\mu$　（5）

讨论：当$\mu<1$时，上式恒成立。当$\mu\geq1$时，$\theta$为任意值都不会滑动。

评分标准：有受力分析得 2 分，写出（1）（2）（3）各得 2 分，判断出$N_3$大于$N_2$得 2 分，计算得答案（5）式得 2 分。讨论不加分，不讨论不扣分，因为正常情况下$\mu$不大于 1。

第三题（28 分）

【解】（1）设上升到最高点的时间为$t$，则落地时间也为$t$。设爆炸后前面的鸟速度为$v_3$，后边的鸟速度为$v_1$。

上升到最高点竖直方向上有

$$gt=\frac{\sqrt{2}}{2}v \qquad （1）$$

最高点爆炸动量守恒有

$$mv_1+m\frac{\sqrt{2}}{2}v+mv_3=3m\frac{\sqrt{2}}{2}v \qquad （2）$$

爆炸后落地水平方向上有

$$(v_3-v_1)t=d \qquad （3）$$

动能增加量为为

$$\Delta E_k=\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}mv_3^2-2\cdot\frac{1}{2}m(\frac{\sqrt{2}}{2}v)^2 \qquad （4）$$

联立得$E_k=\dfrac{md^2g^2}{2v^2}$ （5）

（2）设上升到最高点的时间为$t$，则中间鸟落地时间也为$t$。设爆炸后上面的鸟向上速度为$v_1$，落地时间为$t_1$，下面的鸟向下的速度为$v_3$，落地时间为$t_3$。

同样（1）式成立。

上升到最高点竖直方向上有

$$2gh=(\frac{\sqrt{2}}{2}v)^2 \qquad （6）$$

在最高点爆炸时竖直方向上动量守恒有

$$mv_1=mv_3 \qquad （7）$$

爆炸后落地时间差为

$$t_1 - t_3 = \frac{d}{\frac{\sqrt{2}}{2}v} \qquad (8)$$

爆炸后竖直方向上有

$$v_3 t_3 + \frac{1}{2}g t_3^2 = h \qquad (9)$$

$$-v_1 t_1 + \frac{1}{2}g t_1^2 = h \qquad (10)$$

中间鸟落地时，空中鸟离地距离

$$\Delta h = h - (-v_1 t + \frac{1}{2}g t^2) \qquad (11)$$

$$\text{或}\Delta h = v' t$$

由（7）式有$v_1 = v_3$令其为$v'$

把（9）式减（10）式联立（8）式有

$$v' = \frac{\sqrt{2}gd}{2v} \qquad (12)$$

把（1）式（6）式（12）式代入（11）或把（1）式（12）式代入（11）

得：$\Delta h = \dfrac{d}{2}$　　（13）

（3）设爆炸增加的速度为$v'$，则从质心系看爆炸增加的能量为

$$\Delta E = 2 \cdot \frac{1}{2} m v'^2 \qquad (14)$$

代入（5）式有$v' = \dfrac{dg}{\sqrt{2}v}$

令爆炸前水平速度$\dfrac{\sqrt{2}}{2}v = v_0$，以爆炸点为原点列抛物线方程

$$x = v' \cos\theta t + v_0 t$$

$$y = v' \sin\theta t - \frac{1}{2}g t^2 \qquad (15)$$

消去$t$有

$$y=\frac{v'\sin\theta}{v'\cos\theta+v_0}x-\frac{1}{2}\frac{g}{(v'\cos\theta+v_0)^2}x^2 \qquad （16）$$

这是一个 $y=f(\theta,x)$ 的方程，取 $x$ 为定值，求 $y=f(\theta)$ 的最大最小值。得到的 $y=f(x)$ 即为所求。

【或解】以爆炸点为原点有方程 $(x-v_0t)^2+(y+\frac{1}{2}gt^2)^2=(v't)^2$

对 $t$ 求导有 $-v_0(x-v_0t)+2(y+\frac{1}{2}gt^2)gt=2v'^2t$

化简有 $(\frac{1}{2}g^2)t^3+(yg+v_0{}^2-v'^2)t+(-v_0x)=0$

即 $t^3+pt+q=0$

解得 $t=(-\frac{q}{2}+((\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}+(-\frac{q}{2}-((\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}$

代入原始方程得解。

所以 $(x-v_0t)^2+(y+\frac{1}{2}gt^2)^2=(v't)^2$

其中 $t=(-\frac{q}{2}+((\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}+(-\frac{q}{2}-((\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}$

其中 $p=\dfrac{yg+v_0{}^2-v'^2}{\frac{1}{2}g^2}$， $q=\dfrac{-v_0x}{\frac{1}{2}g^2}$

评分标准：第（1）题中，（1）（2）（3）（4）（5）式每式 2 分。

第（2）题中，（7）（8）（11）（13）式每式 2 分，（9）（10）式每式 1 分。如果以质心系直接得（13）式给全分。

第（3）题中，（14）式 2 分，（16）式 2 分，说明包络线的求法 4 分。

第四题（12 分）

【解】(1) 设小行星质量为$m$，爆炸的能量为$\Delta E$，燃料的质量为$m_{燃料}$，爆炸后增加的速度为$v$，与地球擦肩而过的速度为$v'$。

质能方程有$\Delta E = 4\% m_{燃料} c^2$ （1）

在质心系来看爆炸能量$\Delta E = 2 \cdot \frac{1}{2} m v^2$ （2）

最少能量使得碎片不撞地球有碎片增加的速度$v$必定垂直与行星与地球连线。对碎片列能量方程有

$$\frac{1}{2}\frac{m}{2}(v_0^2+v^2)-\frac{GM\frac{m}{2}}{l}=\frac{1}{2}\frac{m}{2}v'^2-\frac{GM\frac{m}{2}}{R} \quad （3）$$

对碎片列角动量方程有

$$\frac{m}{2}lv=\frac{m}{2}Rv' \quad （4）$$

把（4）式代入（3）式得

$$v^2=\frac{v_0^2+2gR^2(\frac{1}{R}-\frac{1}{l})}{\frac{l^2}{R^2}-1} \quad （5）$$

把（5）代入（2）式代入（1）式得

$$m_{燃料}=\frac{m}{4\%2c^2}\frac{v_0^2+2gR^2(\frac{1}{R}-\frac{1}{l})}{\frac{l^2}{R^2}-1} ， \quad （6）$$

（2）设爆炸后质量大的碎块质量为$m_1$，质量小的碎块质量为$m_2$，

在质心系来看爆炸能量$\Delta E=\frac{1}{2}m_1v^2+\frac{1}{2}m_2v^2$ （7）

爆炸动量守恒有$m_1v_1=m_2v_2$ （8）

$m_1$质量更大，速度更小，$m_1$不撞地球则$m_2$不撞。

与（1）相同有$v_1^2=\dfrac{v_0^2+2gR^2(\frac{1}{R}-\frac{1}{l})}{\frac{l^2}{R^2}-1}$　　　　（9）

把（9）式代入（8）式代入（7）式代入（1）得增加的质量

$$\Delta m_{燃料}=\frac{2}{9}m_{燃料}=\frac{m}{4\%9c^2}\frac{v_0^2+2gR^2(\frac{1}{R}-\frac{1}{l})}{\frac{l^2}{R^2}-1}\quad（10）$$

评分标准：（1）（2）（7）（8）式 1 分，（3）（4）（6）（10）式 2 分。

、

第五题（16 分）

【解】（1）设左棒速度为$v_1$，右棒速度为$v_2$，

两棒动量定理$BIl\Delta t = m\Delta v_1$， $BI2l\Delta t = m\Delta v_2$有$v_2 = 2(v - v_1)$ （1）

最后静止电动势为 0 有$Bv_1 l = Bv_2 2l$ （2）

联立得$v_1 = \frac{4}{5}v$， $v_2 = \frac{2}{5}v$ （3）

（2）回路中电流$Q = \sum I\Delta t = \sum \frac{m\Delta v_1}{Bl} = \frac{m(v - v_1)}{Bl} = \frac{mv}{5Bl}$ （4）

（3）安培力总功$W_{总} = \frac{1}{2}mv^2 - (\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2) = \frac{1}{10}mv^2$ （5）

评分标准：（1）（2）（3）式各 2 分，算出（4）得 5 分算出（5）得 5 分。

、

第六题（20 分）

【解】设等容燃烧后温度为$T_{容}$，绝热膨胀后温度为$T_{绝}$，输入能量等于输出能量

$$P_0\Delta V_0+n\Delta tL+\frac{n\Delta t}{u}C_VT_0=\frac{n\Delta t}{u}C_VT_{容}=\frac{1}{2}n\Delta tv^2+\frac{n\Delta t}{u}C_VT_{绝}+P\Delta V \quad (1)$$

将$P_0\Delta V_0=\frac{n\Delta t}{u}RT_0$，$P\Delta V=\frac{n\Delta t}{u}RT$式代入（1）式有

$$T_{容}=T_0+\frac{R}{C_V}+\frac{uL}{C_V} \quad (2)$$

$$(C_V+R)T_0+uL=\frac{1}{2}uv^2+(C_V+R)T_{绝} \quad (3)$$

有绝热方程$T_{容}\Delta V_0^{\gamma-1}=T_{绝}\Delta V_{绝}^{\gamma-1}$　（4）

将$\Delta V_0=\frac{n\Delta tRT_0}{uP_0}$，$\Delta V_{绝}=v\Delta ts$代入（4）式有

$$T_{容}(\frac{nRT_0}{uP_0})^{\gamma-1}=T_{绝}(vs)^{\gamma-1} \quad (5).$$

火箭推力$F=\frac{n\Delta tv}{\Delta t}=nv$　（6）

联立（2）（3）（5）得

$$1=\frac{1}{2}\frac{u}{(C_V+R)T_0+uL}v^2+\frac{C_V+R}{C_V}(\frac{nRT_0}{uP_0sv})^{\gamma-1} \quad (7)$$

解出$v$代入（6）式解得$F$（8）

【注】此题原来挂出的解法是往年物理竞赛复赛的惯例解法，是把气体绝热膨胀当作恒力处理。实际上在现实中我们做这样的模型处理是不合理的。合理的解法如此解，但最后的求解涉及到高次方程的求解。故复赛考试中一般不作此要求。复赛考试中如有当恒力处理也一般算对。

第七题（22 分）

【解】（1）电子加速度$a=\frac{ke^2}{m_e r^2}$ 代入$P=ka^2$有$P=\frac{k^3e^4}{m_e^2 r^4}$ （1）

电子能量$E=-\frac{ke^2}{r}$代入$P=\frac{dE}{dt}$有$P=\frac{ke^2}{2r^2}v$ （2）

联立（1）（2）有$\frac{2k^2e^2}{m_e^2 r^2}=v$ （3）

两边同乘$\Delta t$有$\frac{2k^2e^2}{m_e^2}\Delta t=r^2\Delta r$ （4）

由$\Delta(r^3)=3r^2\Delta r$有得$t=\frac{m_e^2}{6k^2e^2}r_0^3$ （5）

（2）考虑两体问题有折合质量$u=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ （6）

角动量$L=u\omega r^2=n\hbar$ （7）

受力$\frac{ke^2}{r^2}=u\omega^2 r$ （8）

代入能量方程$E_{总}=-\frac{1}{2}\frac{ke^2}{r}$ （9）

有$E_{总}=-\frac{1}{2}\frac{k^2e^4}{\hbar^2}\frac{u}{n^2}$ （10）

又$\Delta E_{总}=h\upsilon$将（10）式代入有$v=\frac{1}{2}\frac{k^2e^4}{\hbar^2}(\frac{1}{n_2^2}-\frac{1}{n_1^2})u$ （11）

分辨率精度$\frac{\Delta\upsilon}{\upsilon}=\frac{\Delta u}{u}$

对于氢$u_1=\frac{m_em_p}{m_e+m_p}$对于氘$u_2=\frac{m_e2m_p}{m_e+2m_p}$ （12）

$m_e$远小于$m_p$，有$u=m_e$，$\Delta u=\frac{m_em_e}{2m_p}$ （13）

则$\frac{\Delta\upsilon}{\upsilon}=\frac{m_e}{2m_p}$ （14）

评分标准：（1）（2）（3）（4）（5）式各 2 分。得出（11）式 10 分，可用两体问题自行推导公式。得出（14）式 2 分

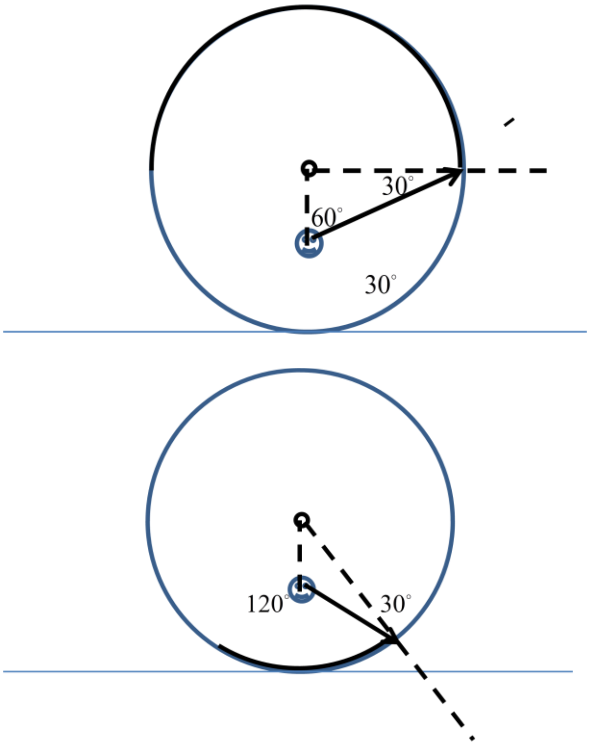
、

、

第八题（15 分）

【解】全反角 $\sin C=\dfrac{1}{n}$

如图三角形里 $\dfrac{\sin C}{\frac{\sqrt{3}}{3}R}=\dfrac{\sin\theta}{R}$ 有 $\theta=60^\circ$ 或 $\theta=120^\circ$ （1）




有光出射的面积为 $2\pi R^2+2\pi R^2\dfrac{\sqrt{3}}{3}=(1+\dfrac{\sqrt{3}}{3})2\pi R^2$

评分标准：算出（1）式 5 分，画出图 5 分，得出答案 5 分。